

УДК 621.396.25

І.В. Захарченко

Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

## МОДИФІКОВАНЕ ДИСКРЕТНЕ ХАОТИЧНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМУ ЧЕБИШЕВА

Запропоновано та досліджено модифіковане дискретне хаотичне відображення на основі поліному Чебишева першого роду третього порядку, яке дозволяє наблизити спектр хаотичних сигналів до спектру "білого" шуму. Модифіковане відображення дозволяє побудувати сигнальні сузір'я для проектування хаотичних сигнально-кодових конструкцій.

**Ключові слова:** хаотичний процес, відображення, біфуркаційна діаграма, показник Ляпунова, сигнально-кодова конструкція, сигнальне сузір'я.

### Вступ

Постановка проблеми. Одним з напрямків підвищення якості функціонування бездротових багатоканальних систем передачі даних спеціального призначення є забезпечення енергетичної та структурної скритності таких систем. Традиційно, для підвищення енергетичної скритності використовують широкопasmові сигнали. Перспективним підходом у цьому напрямку є побудова систем передачі даних з використанням властивостей динамічного хаосу. Це пов'язане з тим, що хаотичні сигнали володіють ознаками випадкових (шумових) процесів й при цьому можуть бути відтворено необхідну кількість разів на основі вибраного хаотичного відображення з заданими початковими умовами і параметрами [1]. Хаотичні системи передачі даних можуть функціонувати при рівні корисного сигналу, нижчому за рівень шумів. У випадку виявлення хаотичного сигналу, для відтворення інформації, яка в ньому міститься, необхідно знати точну структуру генератора хаосу та спосіб внесення інформації в хаотичне коливання [1].

Таким чином, використання динамічного хаосу для бездротових багатоканальних систем передачі даних спеціального призначення є перспективним з точки зору одночасного забезпечення енергетичної і структурної скритності.

### Основна частина

Як відомо з роботи [1], генератори хаотичних сигналів будуються на основі дискретних відображень та безперервних нелінійних динамічних систем.

Нижче у роботі розглядається підхід до генерації хаотичних коливань на основі дискретних відображень. Для оцінки якості сгенерованих хаотичних коливань в інтересах систем передачі даних спеціального призначення аналізуються: – біфуркаційна діаграма; – показник Ляпунова; – кореляційна функція; – енергетичний спектр.

В роботі [2] було проаналізовано відомі однорічні однопараметричні відображення, а саме: логі-

стичне, кубічне, напівкола, гармонічне, степеневе, зсуву, "тент" та відображення на основі поліномів Чебишева за вищевказаними показниками. В результаті аналізу, для застосування в якості генератора хаосу, було обрано відображення на основі поліному Чебишева 1 роду 3 порядку:

$$x_{n+1} = 4x_n^3 - 3x_n. \quad (1)$$

Відображення на основі поліному Чебишева 2 порядку було запропоновано використовувати для генерації хаотичних коливань в роботі [3]. Запропонований підхід був розвинений в роботах [4–5], де використовувався поліном Чебишева 3 порядку.

Слід відзначити, що особливістю вказаного відображення є відсутність управляючого параметру, що обмежує його використання для побудови систем передачі інформації.

Дослідимо якість хаотичних коливань, що генеруються за допомогою модифікованого відображення на основі поліному Чебишева, що має наступний вигляд:

$$x_{n+1} = \lambda \cdot (4x_n^3 - 3x_n), \quad (2)$$

де  $\lambda$  – управляючий параметр.

Для запропонованого відображення (2) біфуркаційна діаграма має наступний вигляд (рис. 1).

Вигляд біфуркаційної діаграми свідчить про наявність хаотичних режимів при  $0,78 \geq \lambda \geq 1$ .

Показник Ляпунова дозволяє дати точну кількісну оцінку швидкості розбігання фазових траєкторій процесу, що досліджуються. Позитивні значення показника Ляпунова свідчать про наявність хаотичного режиму коливань динамічної системи [1]. Для систем, побудованих за допомогою дискретних відображень розрахунок показника Ляпунова

$$\Lambda = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln \frac{D_i}{\varepsilon} \quad (3)$$

між парами хаотичних реалізацій  $x$  та  $y$  здійснюється шляхом відстеження характеру еволюції відстаней

$$D_n = |x_n - y_n| \quad (4)$$

між відліками  $x_n$  і  $y_n$  хаотичного процесу, що досліджуються, де  $n$  – номер відліку, а

$$\varepsilon = |x_0 - y_0|, \quad (5)$$

де  $\varepsilon$  – величина обурення початкових умов.

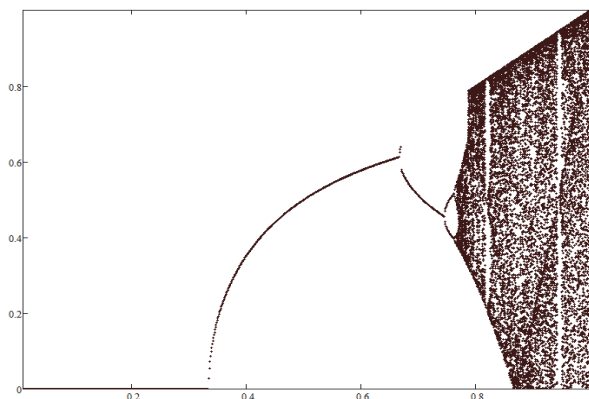


Рис. 1. Біфуркаційна діаграма модифікованого відображення на основі поліному Чебишева

Для цього за допомогою модифікованого відображення на основі поліному Чебишева (2) були згенеровані пари хаотичних реалізацій  $x_n$  та  $y_n$ ,  $n \in [0,001; 0,999]$  з початковими умовами  $x_{n_0} = 0,1 \cdot n$  та  $y_{n_0} = x_{n_0} + \varepsilon$ ;  $\varepsilon = 0,005$  при варіаціях управляючого параметру дискретного відображення  $\lambda = 0,001 \cdot i$ ,  $i \in [1; 999]$ . Далі, для кожного з варіан-

тів початкових умов розраховувались показники Ляпунова за виразами (4–5) для всіх значень управляючого параметру  $\lambda$ .

Графік залежності показника Ляпунова  $\Lambda$  від значень управляючого параметру  $\lambda$  при початкових умовах  $x_{n_0} = 0,1$  та  $y_{n_0} = 0,105$  наведено на рис. 2.

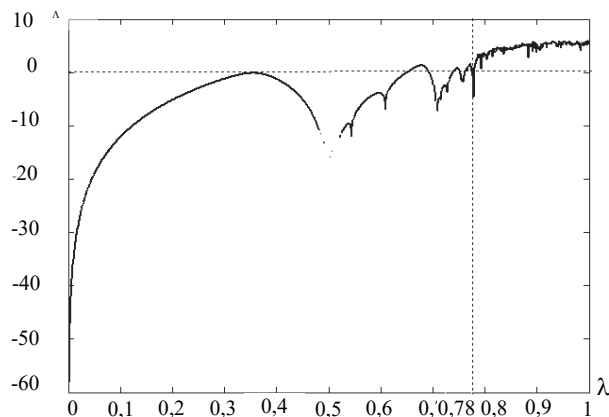


Рис. 2. Показник Ляпунова при  $x_{n_0} = 0,1$ ;  $y_{n_0} = 0,105$

З рис. 2 видно, що стійкий хаотичний режим в системі спостерігається для  $0,78 \leq \lambda \leq 1$ .

Графік залежності показника Ляпунова  $\Lambda$  від значень управляючого параметру  $\lambda$  при початкових умовах  $x_{n_0} = 0,5$  та  $y_{n_0} = 0,505$  наведено на рис. 3.

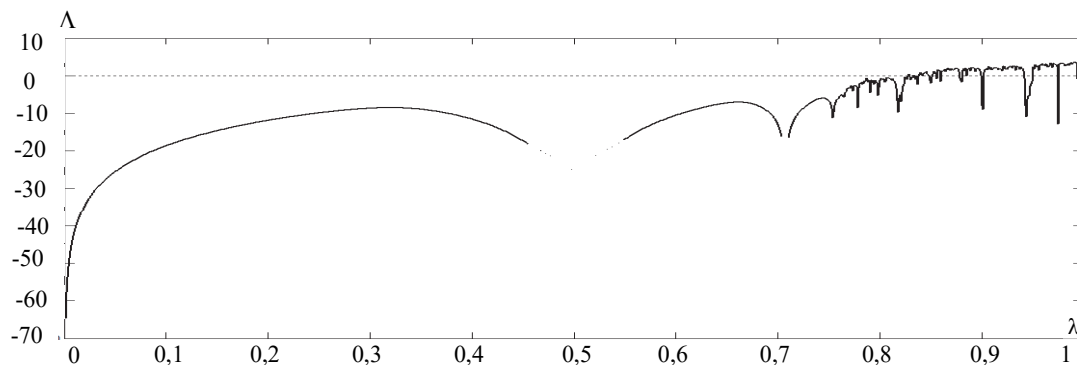


Рис. 3. Показник Ляпунова при  $x_{n_0} = 0,5$ ;  $y_{n_0} = 0,505$

Як видно з рис. 3 для вказаних початкових умов стійкий хаотичний режим в системі не спостерігається.

Слід зазначити, що особливістю відображення на основі поліному Чебишева (1) є той факт, що у випадку  $x_{n_0} = 0,5$  отримана реалізація не є хаотичною і має наступний вигляд (рис. 4).

Такий результат спостерігається і для реалізацій модифікованого відображення (2) при вказаному значенні початкових умов  $x_{n_0} = 0,5$ . Реалізації, які отримані за допомогою модифікованого відображення (2) для значень управляючого параметру  $0 \leq \lambda \leq 1$  приймають регулярний вигляд або зату-

хають. На рис. 5, а, б наведено вигляд таких реалізацій при  $x_{n_0} = 0,5$  з  $\lambda = 0,3$  та  $\lambda = 0,9$ .

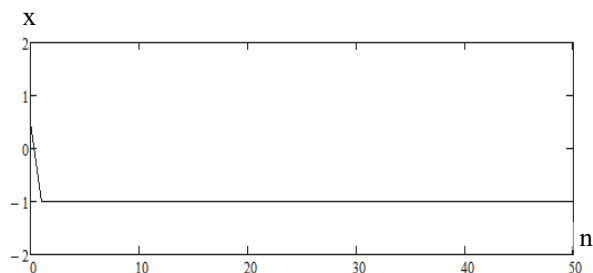


Рис. 4. Вигляд реалізації для відображення Чебишева (1) при  $x_{n_0} = 0,5$

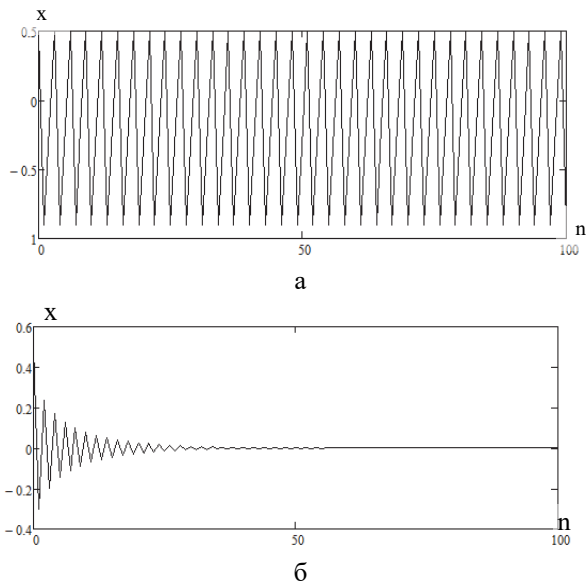


Рис. 5. Вигляд реалізацій для модифікованого відображення (2) при: а –  $x_{n_0} = 0,5$  та  $\lambda = 0,3$ ; б –  $\lambda = 0,9$

Графік залежності показника Ляпунова  $\Lambda$  від значень управляючого параметру  $\lambda$  при початкових умовах  $x_{n_0} = 0,8$  та  $y_{n_0} = 0,805$  наведено на рис. 6.

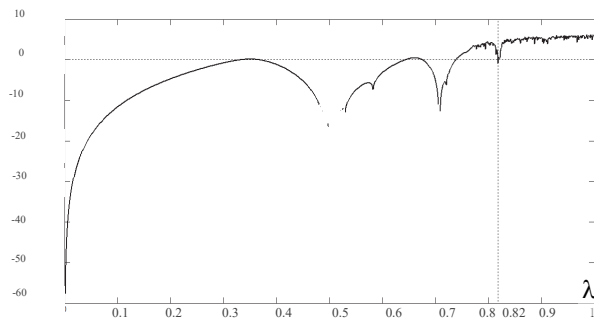


Рис. 6. Показник Ляпунова при  $x_{n_0} = 0,8$ ;  $y_{n_0} = 0,805$

При вказаних початкових умовах хаотичний режим в системі спостерігається для  $0,82 \leq \lambda \leq 1$ .

Графік залежності показника Ляпунова  $\Lambda$  від значень управляючого параметру  $\lambda$  при початкових умовах  $x_{n_0} = 0,866$  та  $y_{n_0} = 0,871$  наведено на рис. 7.

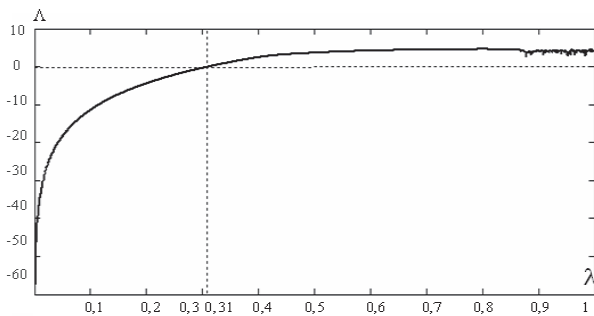


Рис. 7. Показник Ляпунова при  $x_{n_0} = 0,866$ ;  $y_{n_0} = 0,871$

Хаотичний режим в системі спостерігається для  $0,31 \leq \lambda \leq 1$ .

Для більш детальної оцінки отриманих результатів для всіх вищевказаних початкових умов розраховувалась площа поверхні

$$S = \sum_{k=1}^i \Delta_k ; \Delta_k > 0 \quad (6)$$

під кривими графіків для області  $\Delta_k > 0$ . Значення  $S$  прямо пропорційно кількості хаотичних реалізацій з позитивним показником Ляпунова, що генеруються модифікованим відображенням. Величина площі  $S$  під кривими графіків  $\Delta_k > 0$  для початкових умов  $x_{n_0} \in [0,1; 0,999]$ , наведено на рис. 8.

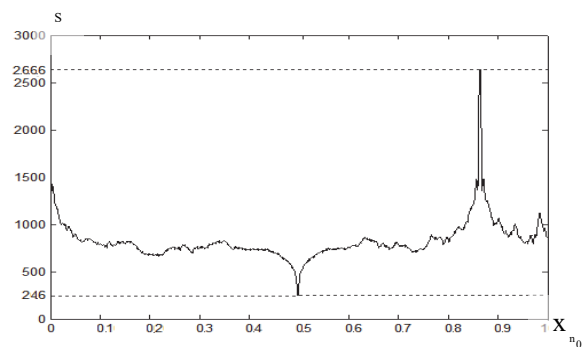


Рис. 8. Величина площі поверхні  $S$  під кривою графіків для початкових умов  $x_{n_0} \in [0;1]$  для  $\Delta_k > 0$

З рис. 8 видно, що найменшою є площа для  $x_{n_0} = 0,5$ . Найбільшого значення  $S$  набуває при  $x_{n_0} = 0,866$ .

В отриманій множини хаотичних реалізацій (рис. 8) не всі реалізації володіють рівномірним спектром, необхідним для забезпечення енергетичної скритності. Оцінка якості згенерованих хаотичних реалізацій за критерієм рівномірності спектру [6] визначалась за наступним виразом:

$$C = \frac{G(x_1 \dots x_n)}{A(x_1 \dots x_n)} = n \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}, \quad (7)$$

де  $C$  – коефіцієнт рівномірності спектру.

Для запропонованого модифікованого відображення (2) при зміні значень управляючого параметру  $0,91 \leq \lambda \leq 1$  та початкових умов  $0,001 \leq x_0 > 1$  величина  $C \rightarrow 0,67$ .

Для класичного відображення Чебишева (1) при зміні початкових умов  $0,001 \leq x_0 > 1$  величина  $C \rightarrow 0,64$ .

Енергетичні спектри хаотичних реалізацій, які отримано на основі модифікованого хаотичного відображення (2) для  $x_{n_0} = 0,2$ ;  $\lambda = 0,98$  та  $x_{n_0} = 0,8$ ,  $\lambda = 0,83$  мають наступний вигляд (рис. 9.)

Дискретне хаотичне відображення на основі поліному Чебишева (1) дозволяє побудувати сигнальне сузір'я, всі точки розташовані лише на прямій (рис. 10).

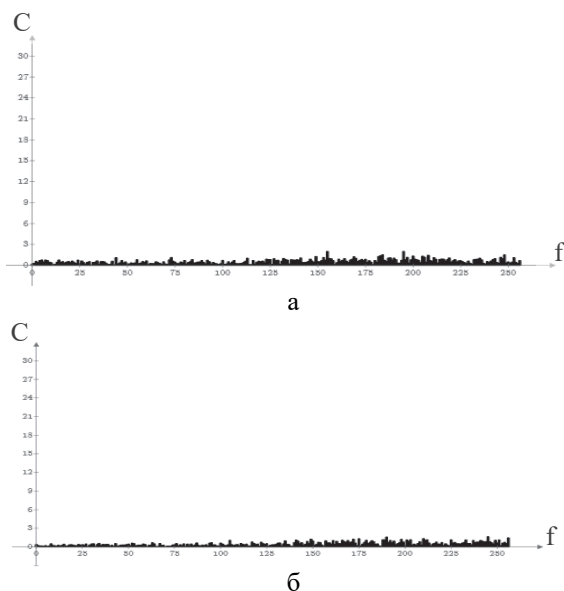


Рис. 9. Енергетичний спектр реалізацій на основі модифікованого відображення для:  
а –  $x_{n_0} = 0,2$ ;  $\lambda = 0,98$  та б –  $x_{n_0} = 0,8$ ;  $\lambda = 0,83$

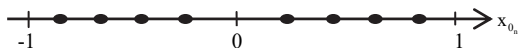


Рис. 10. Сигнальне сузір'я для відображення на основі поліному Чебишева

Для запропонованого модифікованого хаотичного відображення (2) сигнальне сузір'я розташовується на площині за рахунок варіації початкових умов  $x_{n_0}$  та управляючого параметру  $\lambda$  і може мати наступний вигляд:

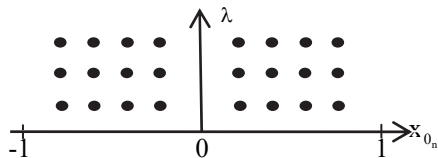


Рис. 11. Сигнальне сузір'я для модифікованого відображення на основі поліному Чебишева

### МОДИФИЦИРОВАННОЕ ДИСКРЕТНОЕ ХАОТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМА ЧЕБЫШЕВА

И.В. Захарченко

Предложено и исследовано модифицированное дискретное хаотическое отображение на основе полинома Чебышева первого рода третьего порядка, которое позволяет повысить качество хаотических реализаций по критерию равномерности спектра. Модифицированное отображение позволяет построить сигнальные созвездия для проектирования хаотических сигнально-кодовых конструкций.

**Ключевые слова:** хаотический процесс, отображение, бифуркационная диаграмма, показатель Ляпунова, сигнально-кодовая конструкция, сигнальное созвездие.

### MODIFIED DISCRETE CHAOTIC MAP BASED ON CHEBYSHEV POLYNOMIAL

I.V. Zakharchenko

In this paper the modified discrete chaotic map based on Chebyshev polynomial of the first kind and the third order was proposed and investigated. This map allows to improve the quality of the chaotic implementation according to the criterion of uniform spectrum. The modified map makes it possible to construct a signal constellation for the design of chaotic signal-code constructions.

**Keywords:** chaotic process, mapping, bifurcation diagram, Lyapunov exponent, signal-code construction, constellation.

Слід зазначити, що розташування точок такого сузір'я не обов'язково може мати регулярний вигляд. Модифіковане відображення (2) може бути використане для проектування хаотичних сигнально-кодових конструкцій багатоканальних хаотичних систем передачі даних спеціального призначення.

### Висновки

Для побудови багатоканальних систем передачі даних спеціального призначення із застосуванням хаотичних сигналів доцільним є використання у якості генератору хаотичних коливань модифікованого відображення на основі поліному Чебишева. Такий підхід дозволяє проектувати хаотичні сигнально-кодові конструкції.

### Список літератури

1. Генераторы хаотических колебаний: учеб. пособ. // Б.И. Шахтарин и др. – М.: Гелиос, АРВ, 2007. – 248 с.
2. Захарченко И.В. Анализ выбора дискретного отображения нелинейной динамической системы для построения хаотических систем передачи данных / И.В. Захарченко // Сборник научных работ Харьковского университета Повітряних Сил. – 2016. – №3(48). – С. 86-91.
3. Improved bit error probability for secure wireless communications systems based on technology DCSK-MIMO technology in the case of Rayleigh fading channel / L. Abdulmir, D. Johakar, U. Sripaty and M. Kulkarni // News of Higher Schools. Radioelectronic. – 2013. – Vol. 56, №10. – Pp. 28-41.
4. Озеров С.В. Применение ММО технологии на хаотических несущих для разделения абонентов в многоканальных системах военной радиосвязи / С.В. Озеров // Системы озброєння і військова техніка. – 2013. – № 1(33). – С. 42-45.
5. Васюта К.С. Мультирадарная информационно-измерительная система на основе хаотических сигналов / К.С.Васюта, Ф.Ф. Зоц, С.В. Озеров // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. – 2013. – № 3. – С. 26-30.
6. Маркел Д. Линейное предсказание речи / Д. Маркел, А. Грей. – М.:Связь, 1980. – 308 с.

Надійшла до редколегії 10.11.2016

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. К.С. Васюта, Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.