УДК 519.6:330.43 DOI: 10.30748/soi.2017.148.31

А.А. Засядько, С.С. Королюк

Черкаський навчально-науковий інститут ДВНЗ "Університет банківської справи", Київ

МОДЕЛЮВАННЯ МАКСИМІЗАЦІЇ ПРИБУТКУ НА ОСНОВІ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА

Робота присвячена дослідженню екстремуму функції для оптимізації роботи виробничого підприємства за допомогою виробничої функції Кобба-Дугласа. Отримана залежність максимального значення функції прибутку двохресурсного підприємства від показників цієї функції. Аналіз такої залежності дає можливість оцінити значення цих параметрів, при яких функція прибутку досягне максимуму. В роботі проведено моделювання показників двохфакторної моделі виробництва з метою отримання максимізації прибутку, на основі якого була проведена оцінка числових значень всіх параметрів, що входять в функцію прибутку двохресурсного підприємства. Були проведені дослідження чутливості функції прибутку на зміну параметрів, що розглядаються.

Ключові слова: *виробнича функція Кобба-Дугласа, двохфакторна модель виробництва, економетрична модель, максимізація прибутку, чутливість.*

Вступ

Постановка проблеми у загальному вигляді. Одним з напрямків максимізації прибутку виробництва є застосування виробничих функцій. Виробнича функція – це економетрична модель, що відображає залежність показників виробничогосподарської діяльності від факторів, що визначають ці показники. До основних показників можна віднести: обсяг продукції, що випускається, прибуток, рентабельність, собівартість, фондовіддача й інші. Факторами для цих показників можуть бути: робоча сила, основні засоби або капітал, земля, продуктивність праці та інші. Виробнича функція дає можливість дослідити для галузей та економіки в цілому показники середньої і граничної ефективності ресурсів робочої сили і основних виробничих фондів, граничні норми заміщення ресурсів у виробничому процесі.

До найвідоміших виробничих функцій відноситься функція Кобба-Дугласа, яка визначає залежність між обсягом виробництва, обсягами капіталу та витратами ресурсів праці. Дослідження показали, що багато явищ виробництва добре апроксимуються залежностями такого типу. За допомогою функції Кобба-Дугласа можна прогнозувати обсяги виробництва, оцінювати ефективність виробництва та використання окремих виробничих факторів, визначати можливість взаємозаміни факторів виробництва, оцінювати масштаб виробництва та його вплив на ефективність виробництва, виявляти вплив НТП на процеси виробництва. Таким чином, застосування функції Кобба-Дугласа щодо планування виробництва дозволяє знаходити обґрунтовані управлінські рішення. Протягом багатьох років економетричні дослідження були спрямовані в основному не на заміну її іншими видами функцій, а на модифікацію виробничої функції, яка могла б адекватніше описати реальні економічні співвідношення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Науковими дослідженнями в сфері застосування математичних моделей при аналізі діяльності складних соціально-економічних систем присвячені роботи вітчизняних та зарубіжних науковців Р. Акофф, К. Бравий, В. Вітлінського, В. Геєця, М. Іванова, А. Камінського, Ю. Лисенка, В. Порохні, О. Разумовського, Л. Сергєєвої, В. Тимохіна, М. Хазова та інших.

На сьогоднішній день існує великий перелік робіт, що присвячені теорії і практиці застосування функції Кобба-Дугласа [1–12]. Проте вони належним чином не торкаються питання застосування методу дослідження екстремуму функції для оптимізації роботи виробничого підприємства за допомогою виробничої функції Кобба-Дугласа. Вирішенню поставленої задачі і присвячується означена робота.

Мета роботи: дослідження виробничої функції Кобба-Дугласа і моделювання показників двохфакторної моделі виробництва з метою отримання максимізації прибутку.

Виклад основного матеріалу дослідження

При дослідженні ефективності роботи виробничого підприємства використовують поняття субституційної виробничої функції [1]. Вона відображає функціональний зв'язок між об'ємом ефективно використаних факторів виробництва (працею та майновим капіталом) і з їх допомогою досягнутим випуском продукції при існуючих технічних і організаційних знаннях. Така функція відображає кількість випущеної продукції і показує, що виробництво може бути збільшене за рахунок підвищення кількісної характеристики одного з факторів, в той час як кількісна характеристика іншого фактору виробництва залишається без змін. В іншому варіанті виробництво залишається без змін при різноманітних кількісних комбінаціях факторів праці та майнового капіталу.

Субституційна виробнича функція має в загальному випадку наступний вигляд:

$$y = y(K, L); y'_x > 0; y''_{xx} > 0, \quad (1)$$

де K – число виробничого капіталу; L – число виробничих трудових годин або, іншими словами, число виробничих одиниць гуманного капіталу.

Найбільш простою є двохфакторна модель виробничої функції Кобба-Дугласа, за допомогою якої розкривається взаємозв'язок праці (L) и капіталу (K). Ці фактори взаємозамінні и взаємодоповнювальні. Ще в 1928 році американські вчені – економіст П. Дуглас и математик Ч. Кобб – створили макроекономічну модель, яка дозволяє оцінювати вклад різних факторів виробництва в збільшення об'єму виробництва або національного доходу. Ця функція має вигляд:

$$y = AK^{\alpha}L^{\beta}. \quad (2)$$

В таких випадках в якості виробничої функції зручно використовувати функцію Кобба-Дугласа [1]:

$$f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}. \quad (3)$$

Тут значення функції f(x,y) відображає кількість випущеної продукції, величини x і y є кількісними показниками використаних при виробництві ресурсів обох видів, наприклад, по витратам капіталу та праці, що відображають вклад праці і капіталу у виготовлення продукції, α і β – безрозмірні показники еластичності випуску продукції по затратам кожного з видів ресурсів відповідно, A – деяка постійна, що переводить одиниці виміру праці і капіталу в одиниці виміру продукту.

Вибір параметрів α і β здійснюється методами регресивного аналізу. Між цими параметрами є певний зв'язок. Їх сума порівнюється з одиницею. Важлива властивість коефіцієнтів еластичності ресурсів функції Кобба-Дугласа: сума коефіцієнтів еластичності дорівнює показнику ефекту розширення масштабу. Якщо α і β в сумі перевищують одиницю, то виробнича функція має зростаючий ефект від масштабу виробництва (це означає, що якщо величини x і y збільшуються в деякій пропорції, то величина f(x,y) зростає в більшій пропорції). Якщо ж їх сума дорівнює одиниці, то говорять про постійний ефект від масштабу виробництва (величина f(x,y) збільшується в тій же пропорції, що і величини x і y), або рівень ефективності ресурсів не залежить від масштабів виробництва. У випадку, коли сума параметрів α і β менша, ніж одиниця, то має місце зменшувальний ефект від масштабу виробництва (величина f(x,y) збільшується в менший пропорції, ніж величини x і y), або з розширенням масштабів виробництва середні витрати ресурсів в розрахунку на одиницю продукції зменшуються. Зазначимо, що ці властивості не залежать від числових значень K і L і зберігаються в кожній точці виробничої функції, тобто коефіцієнти α і β постійні, які не залежать від об'єму факторів K і L.

Коефіцієнти еластичності мають велике значення для аналізу ВФ і характеризують відсоток приросту об'єму випуску продукції при збільшені витрат ресурсу на 1%. Таким чином, збільшення витрат капіталу на 1% приводить до зростання випуску продукції на α відсотків, а зростання витрат праці на 1% приводить до зростання випуску продукції на β відсотків. Якщо α = 0,25, то зростання витрат капіталу на 1% збільшує об'єм виробництва на 0,25%. Можна допустити, що обидві величини α і β знаходяться між нулем та одиницею. Вони повинні бути додатними, оскільки збільшення витрат виробничих факторів повинно викликати зростання випуску продукції. В той же час, можливо, вони будуть менше одиниці, оскільки доцільне припущення, що зменшення ефекту від масштабу виробництва приводить до більш повільного зростання випуску продукції, ніж витрати виробничих факторів, якщо інші фактори залишаються постійними.

Еластичність випуску продукції по капіталу і праці дорівнює відповідно α та β, оскільки має місце співвідношення

$$\frac{\partial y / \partial K}{y / K} = \frac{A\left(\alpha\left[K^{\alpha-1}\right]\right)L^{\beta}}{AK^{\alpha-1}L^{\beta}} = \alpha. \quad (4)$$

Аналогічним чином легко показати, що (dy/dL)/(y/L) дорівнює β.

В відповідності з припущенням про конкурентність ринку фактори виробництва α і β мають інтерпретацію як прогнозовані долі прибутку, який отримується відповідно за рахунок капіталу і праці. Якщо ринок праці має конкурентний характер, то ставка заробітної плати (w) дорівнюватиме граничному продукту праці (dy/dL):

$$w = \frac{\partial y}{\partial L} = AK^{\alpha}\beta L^{\beta-1} = \frac{\beta y}{L}. \quad (5)$$

Таким чином, загальна сума заробітної плати (wL) дорівнюватиме βy, а доля праці в загальному випуску продукції (wL/Y) складе постійну величину β. Аналогічним чином норма прибутку виражається через dy/dK:

$$\rho = \frac{\partial y}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = \frac{\alpha y}{K}, \tag{6}$$

і, таким чином, загальний прибуток (ρK) дорівнюватиме αy, а доля прибутку буде постійною величиною α. Це означає, що граничний приріст продукції за рахунок приросту кожного ресурсу визначається як добуток коефіцієнта еластичності на середню ефективність ресурсу. Параметр А у функції Кобба-Дугласа залежить від вибраних одиниць вимірювання Y, K, L; водночас числове значення цього параметра визначається також ефективністю виробничого процесу. У цьому можна переконатись, порівнявши дві виробничі функції, які відрізняються одна від одної лише значенням параметра А.

Для фіксованих значень K і L тієї функції, де більше числове значення параметра а, відповідає більше значення Y. Отже, і виробничий процес, який описується цією функцією, буде ефективнішим. Другі похідні функції Кобба-Дугласа мають такий вигляд:

$$Y^{*}_{KK} = \frac{\alpha(\alpha-1)Y}{K^2}; \tag{7}$$

$$Y^{*}_{LL} = \frac{\beta(\beta-1)Y}{L^2}.$$

Враховуючи, що $0<\alpha<1$ і $0<\beta<1$, $Y_{KK}<0$ і $Y_{LL}<0$ справджується висновок: при збільшенні ресурсів граничний приріст обсягу продукції зменшуватиметься. Якщо обсяг продукції у функції Кобба-Дугласа вважати сталим (const), то можна обчислити граничні норми заміщення ресурсів:

$$h = \frac{Y'_K}{Y'_L} = \frac{\alpha L}{\beta K}. \tag{8}$$

Звідси бачимо, що гранична норма заміщення ресурсів у функції Кобба-Дугласа визначається як добуток співвідношень обсягів ресурсів та їхніх коефіцієнтів еластичності.

Швидкість зміни норми заміщення ресурсів у зв'язку зі зміною обсягу ресурсів обчислюється так:

$$\frac{\partial h}{\partial L} = \frac{\alpha}{\beta K}; \frac{\partial h}{\partial K} = \frac{\alpha L}{\beta K^2}. \tag{9}$$

Мірою швидкості зміни h є еластичність заміщення ресурсів K і L, що визначається як відношення зміни обсягу ресурсів до зміни величини h:

$$h_{\frac{K}{L}} = \frac{h(Lh+K)}{KL\left(h\frac{\partial h}{\partial K} - \frac{\partial h}{\partial L}\right)} = 1. \tag{10}$$

Отже, еластичність заміщення в кожній точці кривої, що характеризує виробничу функцію Кобба-Дугласа, дорівнює одиниці.

Розглянемо тепер поведінку функції під час зміни масштабу виробництва. Для цього припустимо, що витрати кожного ресурсу виробництва збільшилися в λ разів, тоді нове значення Y\` визначатиметься так:

$$Y' = a(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}Y. \tag{11}$$

За припущення, що мета господарської діяльності — максимізація прибутку, можна проілюструвати інші властивості виробничої функції. Запишемо функцію прибутку в такому вигляді:

$$\Pi = bY^{r+1} - wL - rK + \lambda[f(K,L) - Y] \tag{12}$$

Підприємець вибирає такі значення Y, L, K які максимізують прибуток при обмеженнях, що накладаються виробничою функцією. Величини b, w, r – параметри функції прибутку, λ – множник Лагранжа. Якщо виробничий процес у даному співвідношенні подається функцією Кобба-Дугласа, то можна записати умови максимізації прибутку:

$$w = \frac{\lambda\beta Y}{L};\ r = \frac{\lambda\alpha Y}{K};\ \frac{w}{r} = \frac{\beta K}{\alpha L}, \tag{13}$$

$\lambda=(r+1)P$ при $r\neq-1$, де $P=bY'$.

Звідси обсяги ресурсів такі:

$$L = \frac{(r+1)P\beta Y}{w};\ K = \frac{(r+1)P\alpha Y}{r}. \tag{14}$$

У цьому випадку максимальне значення випуску продукції, якщо $\alpha+\beta\neq1$, можна записати так:

$$Y = aK^{\alpha}L^{\beta} = \\ = a\left[\frac{(r+1)P\alpha Y}{r}\right]^{\alpha}\left[\frac{(r+1)P\beta Y}{w}\right]^{\beta}. \tag{15}$$

При r = 1 згідно із записаними щойно умовами максимізації (15) дістанемо:

$$K = \frac{w\alpha L}{\beta r};\ L = a\left(\frac{w\alpha}{\beta r}\right)^{\alpha}L^{\alpha+\beta}. \tag{16}$$

Отже, необхідні умови для забезпечення максимізації прибутку дають змогу визначити відповідні витрати робочої сили і основного капіталу. З розширенням масштабів виробництва ефективність витрат ресурсів спадає, що відповідає максимізації прибутку в умовах досконалої конкуренції.

При побудові виробничої функції Кобба-Дугласа параметри A, α, β можна оцінити за допомогою лінійного регресивного аналізу методом найменших квадратів (МНК):

1) Виробничу функцію Кобба–Дугласа приводять до лінійного виду шляхом логарифмування

$$\ln(y) = \ln(A) + \alpha\ln(K) + \beta\ln(L). \tag{17}$$

2) При використанні МНК мета полягає в мінімізації суми квадратичних відхилень (SSD) між величинами, що спостерігаються $\ln(y_i)$, (i=1…N; N – кількість спостережень) і відповідними оцінками $\ln(\hat{A}), \hat{\alpha}, \hat{\beta}$.

$$SSD = \sum_{i=1}^{N}\left(\ln(y_1) - \ln(\hat{y}_i)\right)^2 = \\ = \sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}\ln(y_i) - \ln(\hat{A}) - \\ -\hat{\alpha}\ln(K_i) - \hat{\beta}\ln(L_i)\end{pmatrix}^2. \tag{18}$$

Отримаємо вираз для максимального значення функції прибутку двохресурсного підприємства. Він дозволить оцінити значення параметрів α, β, p_0, p_1, p_2, K, L при яких значення функції прибутку буде максимальним.

Розглянемо випадок двохресурсного виробництва. Кількість виробленої продукції задамо функцією Коба-Дугласа у вигляді (будемо для зручності вважати, що A=1).

Розглянемо випадок двохресурсного виробництва. Кількість виробленої продукції задамо функцією Коба-Дугласа у вигляді (будемо для зручності вважати, що A=1):

$$f(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}. \tag{19}$$

Нехай p_0 – вартість одиниці виробленої продукції, а p_1 і p_2 – вартості одиниці використаних ресурсів першого і другого виду відповідно. Тоді чистий прибуток підприємства визначається функцією прибутку, яка має наступний вигляд:

$$P(x,y) = p_0 x^{\alpha} y^{\beta} \cdot p_1 x \cdot p_2 y. \tag{20}$$

Оскільки нас цікавить випадок отримання максимального прибутку, дослідимо функцію прибутку на наявність екстремуму. Враховуючи необхідну умову екстремуму, обчислимо частинні похідні першого порядку по змінним x і y:

$$P'_x(x,y) = \alpha p_0 x^{\alpha-1} y^{\beta} \cdot p_1;$$

$$P'_y(x,y) = \beta p_0 x^{\alpha} y^{\beta-1} \cdot p_2. \tag{21}$$

Для знаходження можливих екстремальних точок прирівняємо похідні до нуля і отримаємо систему наступних рівнянь

$$\alpha p_0 x^{\alpha-1} y^{\beta} = p_1; \; \beta p_0 x^{\alpha} y^{\beta-1} = p_2. \tag{22}$$

Систему необхідно розв`язати відносно змінних x і y. З першого рівняння виразимо y^{β}, а друге рівняння перепишемо інакше:

$$y^{\beta} = \frac{p_1 x^{\alpha-1}}{\alpha p_0}; \; \frac{\beta p_0 x^{\alpha} y^{\beta 1}}{y} = p_2. \tag{23}$$

Після підстановки першого виразу в друге рівняння, отримаємо вираз для зв`язку між величинами, що виражають кількість використаних ресурсів.

$$y = \frac{\beta p_1 x}{\alpha p_2}. \tag{24}$$

Якщо його врахувати в обох рівняннях вихідної системи, маємо наступні співвідношення: ;

$$x^{1-(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha^{1-\beta} p_0}{p_1^{1-\beta} p_2^{\beta}} * \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta};$$

$$y^{1-(\alpha+\beta)} = \frac{\beta^{1-\alpha} p_0}{p_2^{1-\alpha} p_1^{\alpha}} * \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}. \tag{25}$$

Тепер необхідно перевірити виконання достатньої умови існування екстремуму функції прибутку. Обчислимо частинні похідні функції прибутку другого порядку

$$P''_{xx} = -\alpha(1-\alpha) p_0 \frac{y^{\beta}}{x^{2-\alpha}}; \; P''_{yy} = -\beta(1-\beta) p_0 \frac{x^{\alpha}}{y^{2-\beta}};$$

$$P''_{xy} = \frac{\alpha\beta p_0}{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}}. \tag{26}$$

Далі побудуємо вираз

$$\Delta(x,y) = \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta) p_0^2 \frac{x^{\alpha} y^{\beta}}{x^{2-\alpha} y^{2-\beta}} - \left(\frac{\alpha\beta p_0}{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}}\right)^2. \tag{27}$$

Після нескладних спрощень він набуває вигляду

$$\Delta(x,y) = \frac{\alpha\beta p_0^2}{x^{2-2\alpha} y^{2-2\beta}} \left(1-(\alpha+\beta)\right). \tag{28}$$

Функція прибутку буде мати екстремум лише у випадку, коли Δ(x, y)>0. З отриманого виразу видно, що це буде відбуватися тільки у випадку, коли виконується умова α+β<1.

Таким чином, координати екстремальної точки функції прибутку дорівнюють

$$\tilde{x} = \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta} \beta^{1-\alpha}}{p_1^{1-\beta} p_2^{\beta}}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}; \; \tilde{y} = \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha} \alpha^{\alpha}}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}. \tag{29}$$

Тепер можна знайти екстремальне значення функції прибутку

$$P_{max}(\tilde{x},\tilde{y}) = p_0 \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta} \beta^{\beta}}{p_1^{1-\beta} p_2^{\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha} \alpha^{\alpha}}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} -$$

$$-p_1 \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta} \beta^{\beta}}{p_1^{1-\beta} p_2^{\beta}}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} - p_2 \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha} \alpha^{\alpha}}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}. \tag{30}$$

Отриманий вираз дозволяє обчислювати екстремальне значення функції прибутку виробничого підприємства. Він залежить від вартості продукції виробництва та вартості ресурсів, а також від параметрів α і β. Представимо отриманий вираз для наступних значень вартості продукції та ресурсів: $p_0=2$, $p_1=1$, $p_2=0{,}5$. В цьому випадку максимальне значення функції прибутку буде залежати лише від параметрів α і β. Вираз набуває наступного вигляду

$$P_{max}(\alpha,\beta) = 2\left[2\alpha^{1-\beta}(2\beta)^{\beta}\right]^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \times$$

$$\times \left[2\alpha^{\alpha}(2\beta)^{1-\alpha}\right]^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} - \left[2\alpha^{1-\beta}(2\beta)^{\beta}\right]^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} - \tag{31}$$

$$-0{,}5\left[2\alpha^{\alpha}(2\beta)^{1-\alpha}\right]^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}}.$$

На рис. 1 представлена графічна залежність максимального значення функції прибутку P_{max} від параметрів α і β.

З рис. 1 видно, що функція $P_{max}=P_{max}(\alpha, \beta)$ є багатоекстремальною. Її локальні максимуми спостерігається в вузькій діагональній смузі області значень параметрів α і β, для яких обов'язково виконується умова α+β<1. При певних значеннях параметрів α і β досягається головний максимум. Наступні локальні максимуму – на порядок менші. Завдяки дискретизації області сингулярності, які утворюються ступенями $\left(\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}\right)$ в (29–31) при α+β →1, на рисунку згладжені.

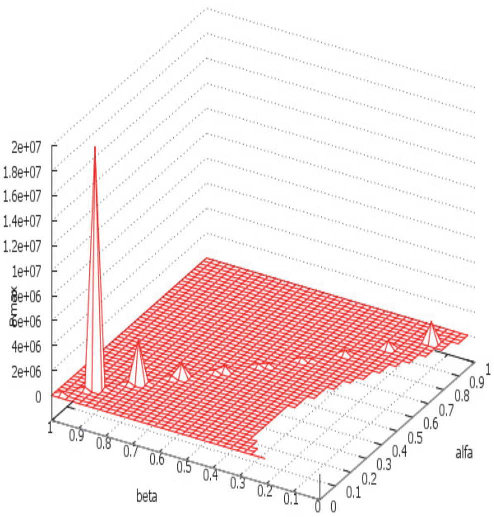


Рис. 1. Залежність максимального значення функції прибутку P_{max} від параметрів α і β

Нехай p_0 – вартість одиниці виробленої продукції, а p_1 і p_2 – вартості одиниці використаних ресурсів першого і другого виду відповідно. Тоді чистий прибуток підприємства визначається функцією прибутку, яка має наступний вигляд:

$$P(x,y) = p_0 x^{\alpha} y^{\beta} - p_1 x - p_2 , \qquad (32)$$

і, відповідно до неї функцію максимального прибутку

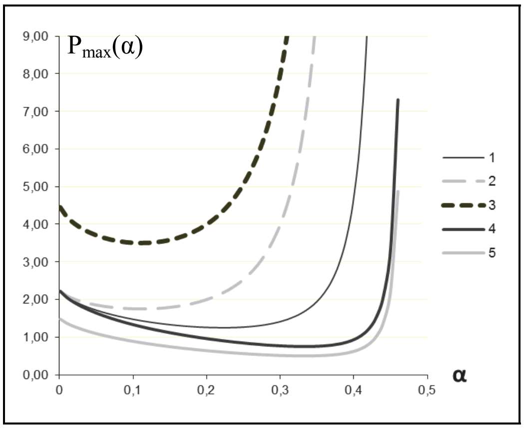
$$P_{max}(\tilde{x},\tilde{y}) = p_0 \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}}{p_1^{1-\beta} p_2^{\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} - \qquad (33)$$

$$-p_1 \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}}{p_1^{1-\beta} p_2^{\beta}}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} - p_2 \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} .$$

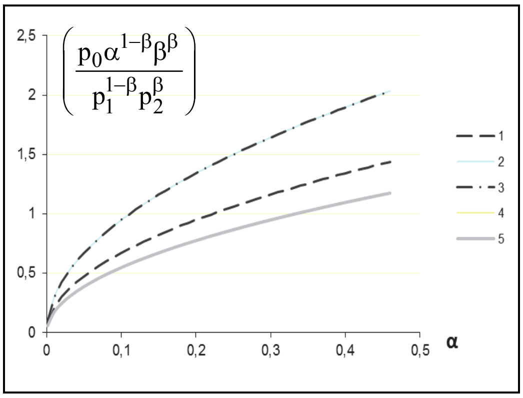
Дослідимо можливі значення параметрів функції прибутку у випадку P(x,y)>0. Як показали дослідження, особливості функції P(x,y) і умова її додатності накладають ряд обмежень на числові значення параметрів α, β, x, y, p_0, p_1, p_2 і на їх співвідношення між собою. Спершу були з'ясовані критичні параметри, що впливають на додатність функції прибутку. Цими параметрами виявилися коефіцієнти еластичності α, β.

Функція прибутку має чим більшу додатню ОДЗ, чим більше α+β→1. Тому були обрані числові значення для еластичностей α=0,5; β=0,43, які вже допускають достатньо вільне варіювання інших значень параметрів x, y, p_0, p_1, p_2 у випадку P(x,y) >0. На рис. 2 показані залежності $P_{max}(\alpha)$ (33) при певних значеннях параметрів β, p_0, p_1, p_2. Це дослідження показало, що вид залежності $P_{max}(\alpha)$ буде подібним до розглянутих навіть при інших комбінаціях параметрів p_0, p_1, p_2.

Були проведені також дослідження чутливості функції прибутку на зміну параметрів, які показані на рис. 3. При цьому змінювалися значення капітальних затрат K (вісь x).



а



б

Рис. 2. Дослідження функції прибутку $P_{max}(\alpha)$ – а – і $f(\alpha)=\left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}}{p_1^{1-\beta} p_2^{\beta}}\right)$, що входить в функцію $P_{max}(\alpha)$ при β=0,5; p_0=3:
1 – p_1=1; p_2=1;
2 – p_1=0,5; p_2=1; 3 – p_1=1; p_2=0,5;
4 – p_1=1,5; p_2=1; 5 – p_1=1; p_2=1,5

Рис. 3 ілюструє істотну чутливість і нестійкість до зміни значень початкових параметрів: зміна Δ p_1 на 5% призводить до зміни функції прибутку на шість порядків (криві 2, 3). Це унеможливлює адекватне обчислення прибутковості за навіть незначною невизначеністю в 5% початкових параметрів і навіть для двохфакторного виробництва.

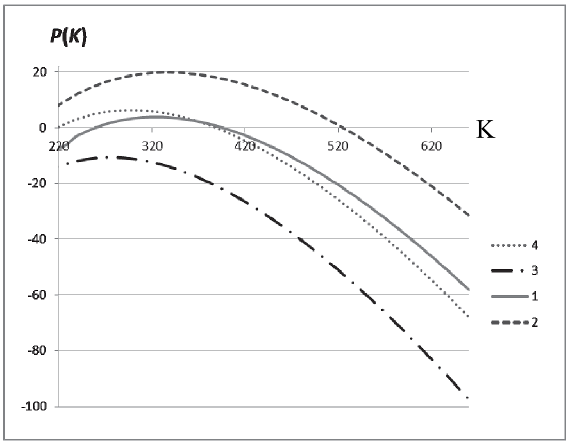


Рис 3. Дослідження чутливості функції прибутку P(K) при L=300; β =0,43; p_0=3; p_2=1:
1 – α =0,5; p_1=1 – початкова залежність;
2 – α =0,5; p_1=0,95; Δ p_1=-5%; ΔP(K)=402%;
3 – α =0,5; p_1=1,05; Δ p_1=+5%; ΔP(K)=-202%;
4 – α =0,505; p_1=1,05; Δ p_1=+5%; Δ α = +5%; ΔP(K)=66%

Проте одночасна зміна декількох параметрів може взаємно компенсувати результуюче значення (крива 4).

Висновки

Робота присвячена дослідженню екстремуму функції для оптимізації роботи виробничого підприємства за допомогою виробничої функції Кобба-Дугласа. Отримана залежність максимального значення функції прибутку двохресурсного підприємства від показників еластичності випуску продукції α і β. Аналіз такої залежності дає можливість оцінити значення цих параметрів, при яких функція прибутку досягне максимуму. Дослідження функції прибутку показало, що при деяких значеннях показників еластичності випуску продукції, максимальне значення функції прибутку збільшується на декілька порядків, що є важливим для розрахунку ефективності роботи виробничих підприємств.

В роботі проведено моделювання показників двохфакторної моделі виробництва з метою отримання максимізації прибутку, на основі якого була проведена оцінка числових значень всіх параметрів, що входять в функцію прибутку двохресурсного підприємства. Були проведені дослідження чутливості функції прибутку на зміну параметрів, що розглядаються.

Список літератури

1. *Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навч. посіб. / В.В. Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.*
2. *Кейнс Дж. М. Общая теория занятости, процента и денег / Дж. М. Кейнс. – М.: Гелиос АРВ, 2002. – 352 с.*
3. *Міхайленко В.М. Математичний аналіз для економістів / В.М. Міхайленко, Н.Д. Федоренко. – К.: Європейський ун-т, 2002.*
4. *Теорія оптимальних рішень. Моделювання та керування в умовах невизначеності: зб. наук. пр. / ред.: Т.П. Мар'янович; НАН України. Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова. – К., 2000. – 174 с.*
5. *Хома І.Б. Економіко-математичні методи аналізу діяльності підприємств / І.Б, Хома, В.В. Турко; Нац. ун-т «Львів. Політехніка». – Л.: Вид-во Нац. ун-ту «Львів. Політехніка», 2008. – 328 с.*
6. *Засядько А.А. Дослідження ефективності роботи виробничого підприємства / А.А. Засядько, С.С. Королюк // Матеріали International Scientific-Practical Conference Economic Development Strategy in Terms of European Integration., Kaunas, 2016. – 341 p.*

Надійшла до редколегії 14.03.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.А. Кучук, НТУ "ХПІ", Харків.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА-ДУГЛАСА

А.А. Засядько, С.С. Королюк

Статья посвящена исследованию экстремума функции для оптимизации работы производственного предприятия с помощью производственной функции Кобба-Дугласа. Получена зависимость максимального значения функции прибыли двухресурсного предприятия от параметров этой функции. Анализ этой зависимости дает возможность оценить значения этих параметров, при которых функция прибыли достигает максимума. В работе проведено моделирование параметров двухфакторной модели производства с целью получения максимизации прибыли, на основе которой была проведена оценка численных значений всех параметров, которые входят в функцию прибыли двухресурсного предприятия. Были проведены исследования чувствительности функции прибыли.

Ключевые слова: *производственная функция Кобба-Дугласа, двухфакторная модель производства, эконометрическая модель, максимизация прибыли, чувствительность.*

MODELLING THE PROFIT MAXIMIZATION USING THE COBB-DOUGLAS' PRODUCTION FUNCTION

A.A. Zasjad`ko, S.S. Korolyuk

The article is devoted to the research of the extrimum function to optimize the work of an industrial enterprise using the Cobb-Douglas' production function. The dependence of the maximum value of two-resource industrial enterprise profit function on the indexes of the function was obtained. The analysis of such dependence makes it possible to estimate the values of these parameters when the profit function attains a maximum. The simulation of the indexes of the two-factor enterprise pattern to obtain the maximum profit was conducted. Numerical values of the parameters of the two-resource enterprise profit function was estimated. The study of quick response of the profit function on changing the parameters analyzed was performed.

Keywords: *Cobb-Douglas' production function, two-factor production models, econometric model, profit maximization, quick response.*