УДК 519.213 DOI: 10.30748/soi.2017.149.07

В.Ю. Дубницкий, О.Е. Петренко

Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ «Университет банковского дела», Харьков

УПРАВЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ОТКАЗОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Предложен способ управления интенсивностью отказов положительно определённых случайных величин с использованием функции эластичности по параметрам распределения, определённым как функции, выраженные с использованием его числовых характеристик. Для распределений экспоненциального типа, использованных в работе, получены оценки параметров методом моментов и методом максимума правдоподобия. Для решения уравнений метода максимума правдоподобия использован метод Ньютона. Для использованных распределений приведены выражения функции эластичности, позволяющие управлять процессом получения материалов с заданными свойствами.

Ключевые слова: *надёжность, функции распределения, эластичность, метод Ньютона, метод моментов, метод максимума правдоподобия.*

Введение

При управлении надежностью радиоэлектронных систем у конструктора есть три источника влияния: элементная база, программные средства и архитектура устройства. При управлении надёжностью механических систем у конструктора есть два пути повышения надёжности: изменение расчетной или кинематической схемы изделия и изменение в нужном направлении механических характеристик конструкционных материалов. В предположении, что эти свойства суть случайные величины, зная связь между математическим ожиданием, среднеквадратическим отклонением и параметрами закона распределения требуемого свойства можно, используя соответствующие технологические приёмы, получить их значения, необходимые для обеспечения требуемой надежности изделия. На это было обращено внимание в работах [1…5].

Анализ литературы. Задача управления функцией распределения была рассмотрена в работе [1]. Была выбрана система пропорционального управления, в которой величина управляющего воздействия была пропорциональна функции эластичности плотности распределения случайной величины по её числовым характеристикам – математическому ожиданию и среднеквадратическому отклонению. Пусть объектом управления будет известная функция распределения $F(X;\Theta)$. Примем, что по условию задачи известна в явном виде зависимость $\Theta = \theta(M)$, где M – вектор числовых характеристик данного распределения. Без ограничения общности предположим, что M=2. Предположим, что зависимость числовых характеристик распределения: математического ожидания m и дисперсии σ^2 от его параметров θ_1, θ_2 известна и имеет вид:

$$\begin{aligned} m &= \varphi(\theta_1,\theta_2); \\ \sigma^2 &= \phi(\theta_1,\theta_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Решая систему (1) в явном или численном виде относительно θ_1,θ_2 получим выражения вида:

$$\begin{aligned} \hat\theta_1 &= u(m,\sigma^2); \\ \hat\theta_2 &= v(m,\sigma^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда функция распределения $F(X;\Theta)$ примет вид:

$$F(X;\Theta) = F(x,\theta_1,\theta_2) = F(x;u(m,\ \sigma^2),v(m,\sigma^2)). \tag{3}$$

Плотность распределения примет вид:

$$f(X;\Theta) = f(x,\theta_1,\theta_2) = f(x;u(m,\ \sigma^2),v(m,\sigma^2)). \tag{4}$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть начальное значение вероятности безотказной работы равно величине

$$P_1(x) = 1 - F_1(x;u(m_1,\ \sigma_1{}^2),v(m_1,\sigma_1{}^2)). \tag{5}$$

Для того чтобы увеличить вероятность безотказной работы до величины

$$P_2(x) = 1 - F_2(x;u(m_2,\ \sigma_2{}^2),v(m_2,\sigma_2{}^2)) \tag{6}$$

есть следующие, имеющие физический смысл, возможности:

– увеличить (уменьшить) математическое ожидание лимитирующего свойства, то есть сделать так, чтобы выполнялось условие $m_2 > m_1$ или $m_1 < m_2$;

– уменьшить среднеквадратическое отклонение (дисперсию) лимитирующего свойства, то есть сделать так, чтобы $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$;

– совместное применение каждого из этих подходов.

Примем, что нам известны:

– плотность распределения случайной величины X и (или) её функция распределения, и численные значения параметров этих функций;

– способы определения квантилей указанных распределений;

– технология, обеспечивающая изменение в нужном направлении величины математического ожидания и среднеквадратического отклонения определяющего свойства.

Для дальнейшего рассмотрения задачи примем, что статистические свойства внешней, по отношению к изделию среды, в рамках решения данной задачи неизменны.

Требуется определить величину управляющего воздействия (вектора приращения ΔM) для обеспечения требуемого уровня надёжности.

Для решения поставленной задачи воспользуемся известными в теории автоматического управления [6] функциями чувствительности и функциями эластичности, применяющимися при исследовании систем различной природы. Относительной чувствительностью или эластичностью $E_x(y)$ функции $y(x)$ по переменной x называют выражение вида:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \qquad (7)$$

Эта величина показывает, на сколько процентов изменится величина y, если величина x изменится на один процент [7]. Весьма важное место в теории надёжности отведено функции интенсивности отказов или функция риска, имеющий вид [13]:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}. \qquad (8)$$

Для наиболее распространённых в практике расчётов видов плотностей распределений в работе [8] приведены функции интенсивности отказов, которые в работе [9] проанализированы методом дифференциального исчисления, а именно для них определены области возрастания или убывания функций в зависимости от изменения параметров рассматриваемых распределений. В работе [10] для плотности распределения выплаты страховых премий предложены функции вида:

$$f(x) = x^2 e^{-x} \qquad (9)$$

и:

$$f(x) = \frac{x(x+a)e^{-x/b}}{b^2(a+2b)}, \quad 0 < x < \infty,\ b > 0. \qquad (10)$$

Функция вида (9) не содержит параметров и поэтому не может быть использована в данной работе. Принимая её за основу, в работе рассмотрена функция вида:

$$f(x) = \frac{\beta^3}{2} x^2 e^{-\beta x},\ \beta > 0,\ x \ge 0. \qquad (11)$$

В работе [11] показано, что математическое ожидание m распределения вида (10) имеет вид:

$$m = 2b^2(a + 3b); \qquad (12)$$

дисперсия:

$$D = \frac{2b^2\left(6b^2 + 6ab + a^2\right)}{(a+2b)^2}. \qquad (13)$$

Соответственно среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma = \frac{b}{(a+2b)}\sqrt{2\left(6b^2 + 6ab + a^2\right)}. \qquad (14)$$

Связь между параметрами распределения и его числовыми характеристиками определена таким образом:

$$\rho = 3m + \sqrt{3\left(m^2 - 2D\right)}; \qquad (15)$$

$$a = \frac{\rho^2/6 - m\cdot\rho/3}{m - \rho}; \qquad (16)$$

$$b = \rho/6. \qquad (17)$$

Цель работы. Разработка способа управления интенсивностью отказов положительно определённых случайных величин с использованием функции эластичности по параметрам распределения, определённым как функции, выраженные с использованием его числовых характеристик.

Полученные результаты

Рассмотрим применение предлагаемой методики на примерах функций плотностей вероятности вида (11) и (10). Рассмотрим интеграл вида:

$$\int_0^\infty \frac{\beta^3}{2} x^2 e^{-\beta x} dx = 1 - \left.\frac{e^{-\beta x}\left(\beta^2 x^2 + 2\beta x + 2\right)}{2}\right|_0^\infty = 1. \qquad (18)$$

Следовательно, функция распределения вероятности, соответствующая плотности вида (11), примет вид:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta^3}{2} x^2 e^{-\beta x} dx = 1 - \frac{e^{-\beta x}\left(\beta^2 x^2 + 2\beta x + 2\right)}{2}. \qquad (19)$$

Математическое ожидание для распределения вида (11) примет вид:

$$m = \int_0^\infty \frac{\beta^3}{2} x^3 e^{-\beta x} dx = \frac{3}{\beta}. \qquad (20)$$

Второй начальный момент для распределения вида (11) примет вид:

$$\alpha_2 = \int_0^\infty \frac{\beta^3}{2} x^{z4} e^{-\beta x} dx = \frac{12}{\beta^2}. \qquad (21)$$

Дисперсию распределения вида (11) определим из условия:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - m^2 = \frac{3}{\beta^2}; \qquad (22)$$

среднеквадратическое распределение этого распределения:

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{\beta}. \qquad (23)$$

В соответствии с условиями (8), (11), (19) функция интенсивности отказов для распределения вида (11) примет вид:

$$\lambda(x) = \frac{\beta^3 x^2}{\beta^2 x^2 + 2\beta x + 2}. \qquad (24)$$

Из ограничений, указанных в условии (11), следует, что величина $\lambda(x) > 0$.

Так как величина:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{2\beta^3 x\left(\beta x + 2\right)}{\left(\beta^2 x^2 + 2\beta x + 2\right)^2} > 0, \qquad (25)$$

то рассматриваемое распределение принадлежит к классу стареющих распределений по классификации, приведенной в работе [13]. В этой же работе показано, что нижняя граница вероятности безотказной работы P(x) любого стареющего распределения со средним m может быть определена по условию:

$$P(x) = \begin{cases} \exp(-x/m), & x < m; \\ 0, & x \ge m. \end{cases} \qquad (26)$$

Используя условие (20), представим условие (26) в виде:

$$P(x) = \begin{cases} \exp(-\beta x/3), & x < 3/\beta; \\ 0, & x \ge 3/\beta. \end{cases} \qquad (27)$$

Используя условия (7), (20) и (24) получим, что:

$$E_\beta(\lambda) = \frac{2\left(\beta x + 2\right)}{\beta^2 x^2 + 2\beta x + 2} = \frac{2m(3x + 2m)}{9x^2 + 6mx + 2m^2}. \qquad (28)$$

В тех случаях, когда оценку $\hat{\beta}$ величины β требуется определить по выборочным данным, то следует использовать метод моментов или метод максимума правдоподобия. Для этого запишем функцию правдоподобия для плотности распределения вида (11):

$$L = \frac{\beta^{3n}}{2^n}\prod_{i=1}^{n} x_i^2 e^{-\beta x_i}. \qquad (29)$$

Следовательно, логарифм этой функции примет вид:

$$\ln L = 3n\ln\beta - n\ln 2 + 2\ln\sum_{i=1}^{n} x_i - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (30)$$

Далее получим следующее:

$$\frac{d\ln L}{d\beta} = \frac{3n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \qquad (31)$$

Откуда следует, что:

$$\frac{3n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \beta, \qquad (32)$$

следовательно,

$$\frac{3}{m} = \beta. \qquad (33)$$

Сравнивая условия (20) и (33), приходим к выводу, что для распределения вида (11) оценка его параметра, полученная методами моментов и максимума правдоподобия, совпадают.

Рассмотрим подробнее функцию вида (10). Так, как в работе [10] отсутствует функция рассматриваемого распределения, то получим её:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx =$$
$$= \frac{e^{-x/b}\left[be^{x/b}\left(a + 2b\right) - x^2 - x(a + 2b) - b(a + 2b)\right]}{b(a + 2b)}. \qquad (34)$$

Используя условия (8), (10) и (34) получим, что интенсивность отказов для данного распределения примет вид:

$$\lambda(x) = \frac{x(x + a)}{b\left[x^2 + x\left(a + 2b\right) + b\left(a + 2b\right)\right]}. \qquad (35)$$

Из условий (10) и (35) следует, что $\lambda(x) > 0$. Рассмотрим величину:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{x(x + 2b)}{\left[x^2 + x(a + 2b) + b(a + 2b)\right]^2}. \qquad (36)$$

Так, как функция, определяемая условием (36), положительна, то это означает, что распределение вида (10) и (34) принадлежит к классу стареющих распределений. Следовательно, используя условия (12) и (26) определим нижнюю границу вероятности безотказной работы P(x) в таком виде:

$$P(x) = \begin{cases} \exp(-x/m) = \exp\left(-\dfrac{x}{2b^2\left(a + 3b\right)}\right), & x < m; \\ 0, \quad x \ge m. \end{cases} \qquad (37)$$

Для определения величины управляющих воздействий на величину математического ожидания, определяемого условием (12), используя условие (7) определим соответствующие эластичности:

$$E_a\left(m\right) = \frac{a}{a + 3b}; \qquad (38)$$

$$E_b\left(m\right) = \frac{2a + 9b}{a + 3b}. \qquad (39)$$

В том случае, когда параметры распределения вида (10) неизвестны, но для их определения дана выборка, состоящая из $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n$ наблюдений, то для получения оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров a и b следует использовать метод максимума правдоподобия. Функция правдоподобия для распределения вида (10) примет вид:

$$L = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i \left(x_i + a\right) \exp\left(-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{b^{2n}\left(a+2b\right)^n}. \quad (40)$$

Логарифм функции правдоподобия примет вид:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln x_i + \ln\left(\left(x_i + a\right) - \frac{x_i}{b}\right)\right] - \\ -\left[2n\ln b + n\left(a+2b\right)\right]. \quad (41)$$

Оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров a и b определяют в результате решения системы вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial a} = -\dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i + a\left(n-1\right) - 2b}{\left(a+2b\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + a\right)} = 0; \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial b} = \dfrac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \dfrac{2n}{a+2b} - \dfrac{2n}{b} = 0. \end{cases} \quad (42)$$

Решение системы (42) может быть получено, например, методом Ньютона в том виде, в котором он описан, например, в работе [12]. Для упрощения работы при составлении программной реализации указанного метода приведём необходимые соотношения. Для решения системы вида:

$$\begin{cases} U_1(a, b_2 = 0; \\ U_2(a, b_2 = 0 \end{cases} \quad (43)$$

относительно неизвестных следует определить матрицу. Для системы (43) получим, что:

$$T(t_1, t_2) = T(\hat{a}, \hat{b}). \quad (44)$$

Тогда решение этих систем будем искать в виде:

$$T^{(p+1)} = T^{(p)} - W^{-1}\left(T^p\right)\ U\left(T^p\right), \quad (45)$$

где:

$$W(T) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial a} & \dfrac{\partial U_1}{\partial b_2} \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial a_1} & \dfrac{\partial U_2}{\partial b} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

В качестве начальных приближений следует принять значения параметров распределений, полученных по методу моментов и заданных условиями (15) … (17). Для удобства дальнейших вычислений выпишем элементы матрицы:

$$\frac{\partial U_1}{\partial a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2an\sum_{i=1}^{n} x_i + a^2\left(n-1\right) - -4ab - 4b^2}{\left(a+2b\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(x_i + a\right)^2}; \quad (47)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial b} = \frac{2n}{\left(a+2b\right)^2}; \quad (48)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial a} = \frac{2n}{\left(a+2b\right)^2}; \quad (49)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial b} = -\frac{2}{b^3}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{4n}{\left(a+2b\right)^2} + \frac{2n}{b^2}. \quad (50)$$

Выражения (47–50) позволяют упростить процесс получения численных значений оценок, полученных методом правдоподобия, параметров распределения вида (10). Для расчета величины управляющих воздействий на функцию вида (35) получим, используя условия (7), (10), (35) выражения для соответствующих эластичностей:

$$E_a\left(\lambda\right) = \frac{ab\left(x+2b\right)}{\left(x+a\right)\left[x^2 + x(a+2b) + b\left(a+2b\right)\right]}; \quad (51)$$

$$E_b\left(\lambda\right) = -\frac{\left(x+a\right)\left[6b^2 + 2b\left(2x+a\right) + x\left(x+a\right)\right]}{b\left(2b+x\right)}. \quad (52)$$

Функция эластичности $E_b\left(\lambda\right)$ отрицательна, следовательно, её увеличение уменьшает значение функции риска. Основания для подобной трактовки полученного результата приведены в работе [14]. Из условий (15) и (17) следует, что для того, чтобы рассматриваемая задача имела для распределения вида (10) физический смысл, необходимо чтобы было выполнено условие:

$$\sqrt{3\left(m^2 - 2D\right)} > 0. \quad (53)$$

Таким образом, из условий (15)…(17) следует, что изменение в желательном направлении среднего значения изучаемого свойства способствует повышению надёжности изделия при выполнении ограничений на его неоднородность.

Выводы

1. Предложен способ управления интенсивностью отказов положительно определённых случайных величин с использованием функции эластичности по параметрам распределения, определённым как функции, выраженные с использованием его числовых характеристик.

2. Для распределений экспоненциального типа, использованным в работе, получены оценки параметров методом моментов и методом максимума правдоподобия.

3. Для решения уравнений метода максимума правдоподобия использован метод Ньютона.

4. Для использованных распределений приведены выражения функции эластичности, позволяющие управлять процессом получения материалов с заданными свойствами.

Список литературы

1. Дубницкий В.Ю. Управление функцией распределения случайной величины [Текст] / В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2011. – Вип. 5(95). – С. 147-151.
2. Гринченко О.С. Концептуальні питання забезпечення механічної надійності сільськогосподарської техніки [Текст] / О.С. Гринченко // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – 2015. – Вип. 45, ч.1. – С. 298-301.
3. Чалаби И.Г. Функция распределения отказов для оценки показателей надёжности современных механических систем [Текст] / И.Г. Чалаби // Вісник СевНТУ. Зб. наук. пр. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – 2013. – Вип. 137. – С. 289-293.
4. Гринченко О. Побудова моделей формування поступових механічних відмов сільськогосподарської техніки [Текст] / О. Гринченко, О. Алфьоров, Ю. Козлов // Зб. наук. пр. «Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технології для сільського господарства». – 2014. – Вип. 18 (32), кн.1. – С. 80-86.
5. Капур К. Надёжность и проектирование систем [Текст] / К. Капур, Л. Ламберсон. – Изд. «Мир», 1980. – 351с.
6. Справочник по теории автоматического управления [Текст] / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
7. Солодовников А.С. Математика в экономике: В 2-х частях [Текст] / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандура. Ч.2. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 376 с.
8. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям [Текст] / Р.Н. Вадзинский. – Москва: НАУКА, 2001. – 295 с.
9. Рабинович Л.М. Математика на службе менеджмента [Текст] / Л.М. Рабинович, Е.П. Фадеева // Актуальные проблемы экономики и права. – 2010. – № 1. – С. 65-71.
10. Рибальченко С.А. Огляд функцій розподілу ймовірностей для моделювання страхової діяльності [Електронний ресурс] // Ефективна економіка. – 2013. – №3. – Режим доступу: http://www.economy.nayka.com.ua/?n=9&y=2014.
11. Дубницкий В.Ю. Определение относительной оценки тяжести хвоста распределения [Текст] / В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2015. – Вип. 7(132). – С. 83-92.
12. Исаков В.Б. Элементы численных методов [Текст] / В.Б. Исаков. – Москва: Академия, 2003. – 192 с.
13. Ушаков И.А. Курс теории надёжности [Текст] / И.А. Ушаков. – Москва: Дрофа, 2008. – 239 с.
14. Рывкин А.А. Эластичность. [Текст] / А.А. Рывкин // Экономико-математический энциклопедический словарь. Гл. редактор В.И. Данилов-Данильяни. – Москва: Изд. Большая Российская энциклопедия, 2003. – С. 649.

Поступила в редколлегию 25.02.2017

Рецензент: д-р техн. наук проф. Г.А. Кучук, НТУ «ХПИ», Харьков.

УПРАВЛІННЯ ІНТЕНСИВНІСТЮ ВІДМОВ ДОДАТНО ОЗНАЧЕНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

В.Ю. Дубницький, О.Є. Петренко

Запропоновано спосіб управління інтенсивністю відмов додатно означених випадкових величин з використанням функції еластичності по параметрах розподілу, визначених як функції, що виражені з використанням його числових характеристик. Для розподілів експоненціального типу, використаних в роботі, отримані оцінки параметрів методом моментів і методом максимуму правдоподібності. Для вирішення рівнянь методу максимуму правдоподібності використано метод Ньютона. Для використаних розподілів приведені вирази функції еластичності, що дозволяють управляти процесом отримання матеріалів із заданими властивостями.

Ключові слова: *надійність, функції розподілу, еластичність, метод Ньютона, метод моментів, метод максимуму правдоподібності.*

MANAGEMENT FAILURE RATE OF POSITIVE DEFINITE RANDOM VARIABLES

V. Dubnitskiy, O. Petrenko

There is a method of control by denial intensity suggested that is positive determined random values with using of elasticity function by the distribution parameters. There are evaluation of parameters were redirected in the article for the exponential type parceling with using maximum likelihood method. For solving maximum likelihood method equation used the Newton method. There are the excretions of elasticity function shown. Those expressions let to control by proses of getting materials with adjusted properties.

Keywords: *security, parceling function elasticity, Newton method, maximum likelihood method.*