УДК 621.391 DOI: 10.30748/soi.2017.149.13

І.О. Романенко, Р.М. Животовський, С.М. Петрук, А.В. Шишацький, О.О. Волошин

Центральний науково-дослідний інститут озброєння та військової техніки ЗС України, Київ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗПОДІЛУ НАВАНТАЖЕННЯ В ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖАХ СПЕЦІАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

У статті запропоновано математичну модель розподілу навантаження в телекомунікаційних мережах спеціального призначення на основі розподілу Парето. Проведено імітаційне моделювання систем обслуговування з розподілом Парето, з приведенням розрахункових результатів, оцінкою обчислювальної складності та рекомендації щодо застосування розробленої математичної моделі.

Ключові слова: *телекомунікаційні мережі, розподіл Парето, чисельні методи.*

Вступ

Технологія розрахунку систем масового обслуговування (СМО) ефективна лише для небагатьох видів ймовірнісних розподілів: експоненціального, ерлангового, гіперекспонеціонального, гамма-розподілу, закону Вейбулла. Практично всі ймовірнісні розрахунки засновані на вирівнюванні вихідних статистичних розподілів, тобто підборі теоретичних залежностей, що описують фактично дані, які спостерігалися, а також заміні вихідних розподілів іншими – більш зручними для розрахунків. Згадані апроксимації зазвичай проводяться за умови збереження значень інтегральних числових характеристик розподілів, що акумулюють його основні властивості.

В якості таких характеристик найчастіше виступають початкові моменти

$$f_k \overset{def}{=} \int_0^{\infty} t^k f(t)\,dt, \qquad k = 1, 2, ... \tag{1}$$

Практично апроксимація такого роду виявляється дуже хорошою, навіть якщо збігаються тільки перші три або чотири моменти. З огляду на надзвичайно швидке зростання дисперсій статистичних оцінок вищих моментів по їх порядку

$$D\left[\tilde{f}_k\right] = \left(f_{2k} - f_k^2\right) / N, \tag{2}$$

де N – число спостережень, з цією рекомендацією слід погодитися.

При всіх своїх недоліках (швидше потенційних, ніж реальних) [2; 3] метод моментів залишається найбільш зручним в роботі і частіше за інших методом, що застосовується для вирівнювання розподілів. Кількість збережених моментів розглядається як порядок апроксимації. Вона дорівнює числу вільних параметрів теоретичної кривої. З приводу методу моментів існує велика кількість літератури [4]. Тим не менш гостро стоїть питання про оцінку можливостей і якості вирівнювання, яке в залежності від застосувань має вирішуватися по-різному.

Критерії згоди (χ^2 Р. Фішера, $n\omega^2$ Н.В. Смирнова, А.Н. Колмогорова) статистичних та теоретичних розподілів з кількома загальними моментами мало чутливі до виду розподілів. Реальний розподіл доводиться, в залежності від його виду і розв'язуваної задачі, апроксимувати за допомогою одного з перерахованих вище розподілів і вибирати в класі функцій з заданими моментами, що дають ті чи інші обчислювальні переваги – наприклад, що допускають ефективне обчислення додаткової функції розподілу, перетворення Лапласа-Стілтьєса або полегшують розрахунок обговорюваних нижче функціоналів виду (9).

З іншого боку, багато практичних завдань, пов'язаних з чергами, вирішуються методами імітаційного моделювання. Ці методи пов'язані зі специфічними проблемами, що породжуються видом розподілів, що використовуються. Саме такі розподіли, техніка їх застосування, використання в зазначених цілях і числові приклади обговорюються нижче.

Тому ***метою статті*** є розробка математичної моделі управління навантаженням в телекомунікаційних мережах спеціального призначення на основі розподілу Парето.

Виклад основного матеріалу

Переважна більшість застосування теорії масового обслуговування до цих пір відноситься до систем, в яких розподіл інтервалів між суміжними заявками і тривалості обслуговування підпорядковані показниковому закону. У більш складних випадках вихідні процеси штучно зводяться до марківських одним із наступних способів:

– введенням додаткової безперервної змінної (лінійні процеси);

– заміною немарковського розподілу паралельно-послідовними комбінаціями фаз з показово розподіленою затримкою в кожній (метод фіктивних фаз);

– розглядом станів системи з одною немарківською складовою в моменти часу, на які вона набуває марківську властивість (вкладені ланцюги Маркова).

Збільшення кількості каналів обслуговування послаблює “ступінь немарковості”. У граничному випадку розподіл числа заявок в системі *M/G/∞* описується розподілом Пуассона

$$p_k = \frac{(\lambda b)^k}{k!} e^{-\lambda b}, \quad k = 0,1,...,$$

де λ – інтенсивність вхідного потоку; b – середній час обслуговування, незалежно від виду розподілу останнього.

Тому найбільш сильно вид розподілу впливатиме на результати розрахунку одноканальних систем. Наведемо для них відповідні розрахункові схеми, одержувані методом вкладених ланцюгів Маркова.

Система *GI/M/*1. Нехай інтервал між суміжними заявками підпорядкований розподілу з функцією $A(t)$, а показниковий розподіл часу обслуговування має параметр μ. Тоді основні характеристики цієї системи виражаються через корінь ω рівняння

$$\omega = \int_0^\infty e^{-\mu(1-\omega)t} dA(t), \tag{3}$$

що вирішується для конкретних $A(t)$ методом ітерацій. Середня довжина черги

$$q = \rho\omega / (1-\omega). \tag{4}$$

Тут ρ – коефіцієнт завантаження. Розподіл моментів віртуального очікування в системі *GI/M/*1 піддається показниковому закону з параметром $\mu(1-\omega)$. Відповідно його моменти

$$w_k = \rho \frac{k!}{\left[\mu(1-\omega)\right]^k}, \quad k = 1,2,... \tag{5}$$

Для гама-розподілу $A(t)$ с параметрами $\{\lambda, \beta\}$ рівняння (3) зводиться до виразу

$$\omega = \left[\frac{\lambda}{\mu(1-\omega)+\lambda}\right]^\beta. \tag{6}$$

Зокрема, для $\beta = 1$ (показниковий розподіл) воно переходить в рівняння

$$\omega = \frac{\lambda}{\mu(1-\omega)+\lambda}.$$

Скорочуючи знаменник, отримуємо квадратне рівняння $\mu\omega^2 - (\lambda+\mu)\omega + \lambda = 0$, що належить до інтервалу (0,1) вирішуємо $\omega = \lambda/\mu = \rho$.

Граничне при $j \to \infty$ відношення суміжних ймовірностей p_{j+1}/p_j для моделі *A/B/n* часто апроксимується відношенням

$$x = \rho^{2/\left(\nu_A^2 + \nu_B^2\right)}, \tag{7}$$

де ν_A, ν_B – коефіцієнти варіації розподілів інтервалів між заявками і тривалості обслуговування відповідно. У нашому випадку $\nu_B = 1$. При виконанні необхідних згідно (3) ітерацій слід вибирати як початкове наближення $\omega_0 = \rho^{2/\left(\nu_A^2+1\right)}$.

Система *M/G/*1. Перш за все зазначимо, що розподіл кількості заявок в системі *M/G/*1 можна отримати за допомогою формул;

$$\begin{cases} p \;\; = 1 - \lambda b, \\ p_k = (p_{k-1} - p_0\phi_{k-1} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} p_j\phi_{k-j}) / \phi_0, \quad k = 1,2,... \end{cases} \tag{8}$$

“Експоненціальні моменти” $\{\phi_j\}$, що входять в дану систему, мають сенс ймовірностей прибуття рівно j заявок за випадковий час обслуговування з розподілом $B(t)$:

$$\phi_j = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dB(t), \quad j = 0,1,... \tag{9}$$

Після розрахунку ймовірностей згідно (8) неважко підрахувати очікуєму довжину черги. Інший варіант розрахунку тієї ж величини – застосування формули Полячека-Хінчина

$$q = \frac{\lambda^2 b_2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \cdot \frac{1+\nu_B^2}{2}. \tag{10}$$

Формула (10) служить найбільш наглядною ілюстрацією впливу вищих моментів на характеристики СМО: по відношенню до марківського випадку (коефіцієнт варіації $\nu_B = 1$) при регулярному обслуговуванні середня довжина черги зменшується вдвічі, а при $\nu_B = 2$ збільшується в 2,5 рази.

Моменти розподілу часу очікування в даному випадку легко виражаються через факторіальні моменти $\{q_{[k]}\}$ розподілу довжини черги

$$w_k = q_{[k]} / \lambda^k, \quad k = 1,2,... \tag{11}$$

Проведемо імітаційне моделювання, що представляє собою марківський процес завдяки введенню додаткових змінних, що додатково визначають його поточний стан – найближчих моментів прибуття заявки і завершення обслуговування. Після закінчення моделювання накопичені N результатів обробляються методами математичної статистики. Таким чином можна, зокрема, отримати оцінки $\{\tilde{f}_k\}$

моментів розподілу часу очікування. Їх статистична дисперсія обчислюється згідно (2).

Ключовим елементом імітаційного моделювання є формування псевдовипадкових тривалостей випадкових величин на основі програмних датчиків псевдовипадкових чисел $\{U_i\}$, рівномірно розподілених на інтервалі $[0,1)$. Ці датчики працюють добре, але не ідеально. На підтвердження покажемо (табл. 1) динаміку похибок трьох моментів розподілу $\{U_i\}$, точні значення яких дорівнюють відповідно $\{1/2, 1/3, 1/4\}$.

Таблиця 1

Тестування датчика рівномірних чисел

Кількість випробувань, тис.	Похибка моментів			Похибка оцінки π
	f_1	f_2	f_3	
2	-6.33e-3	-9.54e-3	-1.09e-2	4.84e-2
5	-3.03e-3	-4.06e-3	-4.71e-3	1.36e-2
10	-5.19e-3	-4.94e-3	-4.70e-3	-3.59e-3
20	-2.76e-3	-2.77e-3	-2.76e-3	-4.39e-3
50	-1.29e-4	3.81e-4	4.79e-4	1.93e-3
100	-1.11e-5	2.07e-4	2.16e-4	1.67e-4
200	2.58e-5	-7.15e-5	-1.95e-4	-2.93e-4
500	2.83e-5	-3.35e-5	-1.15e-4	2.47e-3
1000	2.26e-4	1.89e-4	1.14e-4	-7.45e-3
2000	-1.26e-4	-1.23e-4	-1.13e-4	-3.27e-4
5000	9.14e-6	2.91e-5	3.42e-5	5.44e-4
10000	9.17e-6	5.55e-6	-1.24e-6	-6.75e-5
20000	6.70e-5	7.31e-5	6.49e-5	-3.99e-4
50000	7.76e-5	8.00e-5	7.07e-5	-2.87e-4

В останній колонці наведені похибки оцінки π, яка визначається через частку точок, які потрапили в коло, вписане в одиничний квадрат. Отже, надії на необмежене збільшення точності збільшенням кількості випробувань, більш декількох мільйонів, явно не виправдані. Для моделі відзначимо наступні обставини:

1. Оцінки моментів сходяться до відомих нам точних значень. Тому дані таблиці можуть розглядатися як верифікація інструментів даного дослідження – як чисельних, так і імітаційних.

2. Ця збіжність має "хаотичний" характер з явною тенденцією до зменшення амплітуди відхилення.

3. Зі збільшенням коефіцієнтів варіації розподілів збіжність сповільнюється, особливо для вищих моментів.

При роботі з гіперекспоненціальним розподілом фактична довжина черги може виявитися значно більше середньої, особливо при великих коефіцієнтах варіації вихідних розподілів (далі наводяться оцінки середньої довжини черги, чисельно рівної середньому часу очікування).

Розглянемо самоподібні процеси і розподіл Парето. Випадковий процес $X(t)$ називається статистично самоподібним, якщо для будь-якого $\alpha > 0$ розподілу процесів $X(t)$ і $\alpha^{-H} X(\alpha t)$ збігаються. Коефіцієнт H називається показником Херста. Дослідження таких процесів, як буде показано нижче, пов'язане з серйозними математичними труднощами, породжуються "товстими хвостами" (повільним спадання щільності і додаткової функції розподілу) відповідних розподілів – настільки "товстими", що вищі моменти цих розподілів обертаються в нескінченність. Однак такі процеси дуже типові для трафіку в інформаційно-обчислювальних системах, завдань управління дорожнім рухом та багатьох інших додатків [8, С. 132].

Сучасні дослідження [9] вказують причини самоподібності телекомунікаційного трафіку:

– різномаштабність часу протікають процесів (діапазон від часу реакції людини до швидкодії елементів надвеликих інтегральних схем);

– безліч окремих *ON/OFF* (що епізодично включаються і відключаються) джерел, причому тривалості *ON/OFF* періодів описуються розподілами з "товстими хвостами" і нескінченними дисперсіями;

– підпорядкування розмірів інформаційних об'єктів, що передаються на рівні додатків, таким же розподілом;

– випадкове мультиплексування в мережах з комутацією пакетів;

– складність виникаючих ситуацій і алгоритмів управління, а також обмеженість ресурсів (обсягу буферів, продуктивності управляючого процесора);

– нелінійні ефекти, що виникають із-за багаточисельних зворотних зв'язків в управлінні трафіком.

З властивості самоподібності слідує, що “згладжування” трафіку на тривалих проміжках часу не мають під собою ніяких підстав. Замість цього відбуваються не тільки розрідження і ущільнення потоків даних, але і кластеризація самих цих ущільнень. Збурення трафіку виникають не поодинці, а серіями. Об'єднання потоків даних також не призводить до згладжування трафіку.

Як зазначає Б. Мандельброт [10], подібні проблеми виникали в фінансових задачах, в теорії турбулентності. Вважається, що загальних аналітичних результатів дослідження черг або впливу фрактальності трафіку на якість його обслуговування в даний час не існує [8, С. 132]. Однак, по крайній мірі, частина завдань, що цікавлять практиків, може бути вирішена з використанням розподілу Парето. Крім того, робота з ним дуже корисна для встановлення ефективності і меж застосування методу моментів.

Розподіл Парето [6–8] гіперболічний, або степеневий, має функцію розподілу

$$F(t) = 1 - (K/t)^{\alpha}, \quad t \ge K \tag{12}$$

і щільність

$$f(t) = \alpha K^{\alpha} / t^{\alpha+1}. \tag{13}$$

З виразу для функції розподілу знаходимо $p-$квантіль

$$t_p = K / (1-p)^{1/\alpha}. \tag{14}$$

Зокрема, медіана $t_{0,5} = K \cdot 2^{1/\alpha}$.

Момент розподілу Парето порядку m :

$$f_m = \int_K^{\infty} t^m \frac{\alpha K^{\alpha}}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha K^{\alpha} \int_K^{\infty} t^{m-\alpha-1} dt = \alpha K^{\alpha} \left. \frac{t^{m-\alpha}}{m-\alpha} \right|_K^{\infty} \tag{15}$$

має кінцеве значення лише при $\alpha > m$. В такому випадку

$$f_m = \alpha K^{\alpha} \frac{K^{m-\alpha}}{\alpha - m} = \frac{\alpha K^m}{\alpha - m}. \tag{16}$$

Якщо існує другий момент, то дисперсія розподілу Парето $D = \dfrac{\alpha K^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$.

Відповідно квадрат коефіцієнта варіації

$$\nu^2 = D / f_1^2 = 1 / \left[\alpha(\alpha-2)\right].$$

Таким чином, для вирівнювання інших моментів має виконуватися рівність $\alpha(\alpha-2) = \beta$. Звідси випливає, що згадане гамма-розподіл має вирівнюватися розподілом Парето з параметром

$$\alpha = 1 + \sqrt{1+\beta}. \tag{16}$$

При заданому α масштабний параметр K розподілу Парето виражається через перший момент f_1 відповідно формулі

$$K = \frac{\alpha - 1}{\alpha} f_1. \tag{17}$$

Розраховувати завдання з розподілом Парето для параметрів $\alpha = 1.5, 2.5, 3.5,$ при яких існують відповідно один, два і три початкових моменти. З загальних формул для проріджування та підсумовування потоків (див. [5]) слідує збереження результуючими потоками властивості фрактальності.

Для вироблення псевдовипадкових чисел, підпорядкованих розподілу Парето, скористаємося методом зворотної функції. З умови $U = (K/T)^{\alpha}$ отримуємо

$$T = K / U^{1/\alpha}. \tag{18}$$

Тут U – псевдовипадкове число, рівномірно розподілене між нулем і одиницею. Генераторами розподілу Парето забезпечена популярна система імітаційного моделювання GPSS/World.

Спробуємо відновити моменти розподілу Парето, обробляючи згенеровані відповідно до (18) послідовності псевдовипадкових чисел (табл. 2).

Таблиця 2

Відновлення моментів Парето-розподілених чисел

Кількість випробувань, тис.	$\alpha = 1.5$			$\alpha = 2.5$			$\alpha = 3.5$		
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
10	0.994	12.09	1.48e3	0.997	1.672	11.53	1.000	1.198	2.441
20	1.139	160.90	1.75e5	0.991	1.526	7.70	1.000	1.189	2.244
50	1.092	105.30	9.68e4	0.998	1.621	10.59	1.001	1.193	2.276
100	1.040	63.24	5.16e4	0.999	1.692	15.96	1.001	1.194	2.289
200	1.017	53.28	5.11 e4	1.000	1.740	20.72	1.001	1.198	2.337
500	0.999	38.71	3.41e4	0.999	1.716	18.82	1.000	1.191	2.311
1000	0.993	29.81	2.13e4	0.999	1.689	16.33	1.000	1.186	2.198
2000	0.995	33.07	2.94e4	0.999	1.704	17.88	1.000	1.191	2.928
5000	1.006	976.40	6.46e7	1.000	1.722	23.28	1.000	1.190	2.579
10000	0.999	516.90	3.24e7	1.000	1.721	22.92	1.000	1.190	2.513
Точні	1.000	-	-	1.000	1.800	-	1.000	1.190	2.551

Для більшої наочності розглянемо той же процес стосовно рівномірної шкали часу – з кроком в 100 тис. випробувань (табл. 3). Відзначимо (див. табл. 3) для $\alpha = 1.5$ тривале (до 1200 тис.) монотонне зменшення f_1 – з подальшим підйомом і незначною коливальністю. Аналогічний, але менш виражений ефект спостерігається і при $\alpha = 2.5$. При збільшенні α спостерігається прискорення стабілізації сходяться оцінок моментів. Ці результати добре узгоджуються зі спостереженнями Б. Мандельброта [10, С. 467].

Розподіл Парето можна підбирати також методом квантилів. З (14) слідує, що параметр α можна виразити через відношення додаткової функції розподілу

$$\alpha = \ln\left(\overline{F_1} / \overline{F_2}\right) / \ln\left(t_2 / t_1\right). \qquad (19)$$

Маючи α, другий параметр можна підібрати по заданому першому моменту або через один з квантилів. Призначаємі квантилі повинні бути не дуже близькими один до одного і допускати значну ймовірність їх перевищення. В табл. 4 наведені отримані в ході статистичного експерименту оцінки параметру α розподілу Парето. Квантилі $\{t_i\}$ призначалися по апріорно відомим даними як $t = K / p^{1/\alpha}$ для ймовірностей 1/3 і 2/3, оцінка $\tilde{\alpha}$ формувалася за формулою (19).

Таблиця 3

Відновлення Парето-моментів в рівномірній шкалі

Кількість випробувань, тис.	$\alpha = 1.5$			$\alpha = 2.5$			$\alpha = 3.5$		
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
100	1.0401	63.24	5.16e4	0.9981	1.693	16.19	0.9991	1.190	2.214
200	1.0172	53.28	5.11e4	0.9982	1.656	12.71	0.9998	1.199	2.526
300	1.0089	49.64	4.92e4	0.9985	1.659	12.47	1.0000	1.196	2.407
400	0.9997	42.54	4.00e4	0.9983	1.644	12.08	1.0000	1.192	2.305
500	0.9989	38.71	3.41e4	0.9985	1.642	11.83	1.0000	1.193	2.332
600	0.9967	34.89	2.91e4	0.9994	1.649	11.80	1.0000	1.190	2.276
700	0.9961	33.15	2.64e4	1.0000	1.653	11.98	1.0000	1.189	2.237
800	0.9963	32.40	2.46e4	0.9999	1.645	11.52	1.0000	1.188	2.225
900	0.9971	32.16	2.36e4	0.9997	1.646	11.77	1.0000	1.189	2.237
1000	0.9933	29.84	2.13e4	1.0000	2.493	803.4	1.0000	1.190	2.240
1100	0.9929	29.14	2.02e4	0.9999	2.414	731.2	1.0000	1.189	2.220
1200	0.9927	29.36	2.15e4	0.9999	2.355	672.0	1.0000	1.190	2.256
1300	0.9943	30.44	2.25e4	0.9997	2.305	621.4	1.0001	1.191	2.261
1400	0.9950	32.79	2.76e4	0.9995	2.260	578.2	1.0001	1.192	2.266
1500	0.9946	32.34	2.69e4	0.9994	2.222	540.5	1.0000	1.191	2.253
1600	0.9933	31.81	2.62e4	0.9994	2.191	507.9	1.0001	1.191	2.249
1700	0.9921	30.47	2.47e4	0.9995	2.174	481.0	1.0000	1.190	2.241
1800	0.9927	29.93	2.36e4	0.9995	2.150	455.3	1.0000	1.190	2.241
1900	0.9945	31.39	2.59e4	0.9997	2.132	433.1	1.0000	1.189	2.239
2000	0.9948	33.07	2.94e4	0.9999	2.111	412.1	1.0000	1.189	2.227

Оцінка параметра $\tilde{K}$ може бути отримана через $\tilde{\alpha}$ та статистичне середнє. Аналіз даних (табл. 6) дозволяє зробити висновок, що метод квантилів вельми ефективний для визначення параметра α навіть в загальновизнано небезпечній зоні $\alpha < 2$, де іншого моменту не існує. Це спростовує тезу В.Н. Задорожного [8, С. 135] про те, що для визначення за вибірками, що нас цікавлять, характеристик випадкових величин при $\alpha < 2$ ми не можемо використовувати класичні рекомендації математичної статистики.

В табл. 5–6 наведені моменти розподілу часу очікування для систем *Pa/M/*1 і *M/Pa/*1 за результатами імітаційних експериментів (з тільдою вказаний вид марківського розподілу, яке вирівнюється розподілом Парето при збереженні двох моментів).

Аналіз даних (табл. 5–6) дозволяє зробити висновок, що модель *Pa/M/*1 поводиться набагато краще, ніж *M/Pa/*1. Справа в тому, що основні характеристики системи *GI/M/*1 виражаються через корінь рівняння (3), що вирішується методом ітерацій для конкретних розподілів $A(t)$ інтервалів між суміжними заявками незалежно від кількості існуючих моментів $A(t)$. Розподіл моментів віртуального очікування в системі *GI/M/*1 згідно (5) підпорядковане показниковому закону з параметром $\mu(1-\omega)$. При $1 < \alpha < 2$ значення ω близькі до 1, що і призводить до надзвичайно швидкого зростання моментів розподілу очікування по їх порядку.

Таблиця 4

Оцінки параметру α методом квантилів

Кількість випробувань, тис.	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 3.5$
2	1.56133	2.50043	3.49966
5	1.51164	2.50043	3.49966
10	1.49327	2.50043	3.49966
20	1.50161	2.50043	3.49966
50	1.50560	2.50043	3.49965
100	1.49750	2.50042	3.49966
200	1.50504	2.50043	3.49965
500	1.50338	2.50039	3.49963
1000	1.50415	2.50037	3.49964
2000	1.50082	2.50034	3.49968
5000	1.50007	2.50028	3.49970
10000	1.50066	2.50016	3.49978
20000	1.50019	2.50002	3.49982
50000	1.50048	2.49989	3.49974
100000	1.50026	2.49975	3.49976

Таблиця 5

Імітаційне моделювання системи Pa/M/1

Кількість випробу-вань, тис.	$\tilde{E}_4$			$\tilde{M}$			$\tilde{H}_2$			$\alpha = 1.5$		
	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3
10	1.51	6.60	40.9	1.95	10.8	87.8	2.28	12.6	93.4	7.42	131.3	3324
20	1.58	7.21	46.1	2.01	11.2	90.8	2.50	15.8	141.7	8.70	179.9	5338
50	1.60	7.38	48.9	2.06	11.5	94.0	2.58	16.9	154.6	8.47	153.0	3882
100	1.61	7.54	51.2	2.05	11.4	92.8	2.56	16.9	158.0	8.61	148.6	3501
200	1.67	8.33	62.5	2.12	12.9	122.4	2.61	17.8	177.7	8.78	154.5	3720
500	1.68	8.37	62.2	2.14	12.8	117.4	2.63	18.2	188.3	8.91	163.6	4189
1000	1.67	8.27	61.3	2.12	12.4	109.0	2.62	17.9	183.3	9.00	171.1	4693
2000	1.68	8.36	62.9	2.15	12.7	111.1	2.63	18.2	190.5	9.16	180.3	5202
5000	1.68	8.35	62.1	2.15	12.7	112.4	2.62	18.0	187.6	9.01	174.5	4960
10000	1.69	8.37	62.2	2.15	12.7	112.4	2.61	17.8	182.1	9.06	176.8	5083
20000	1.69	8.40	63.0	2.15	12.8	113.9	2.62	17.9	183.7	9.10	179.9	5324

Таблиця 6

Імітаційне моделювання системи M/Pa /1

Кількість випробу-вань, тис.	$\tilde{E}_4$			$\tilde{H}_2$			$\alpha = 1.5$		
	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3
10	2.12	11.9	104.8	4.81	89.1	2702	65.5	1.32e4	3.34e6
20	2.07	11.1	90.5	4.53	78.1	2215	58.1	1.11e4	2.76e6
50	1.97	9.8	77.0	4.38	101.6	5161	48.6	9.80e3	2.54e6
100	1.90	9.0	66.4	3.93	77.5	3398	32.9	6.03e3	1.50e6
200	2.01	10.3	81.3	4.22	112.1	8111	42.4	2.08e4	1.82e7
500	2.02	10.5	84.8	4.19	102.8	6194	37.2	1.38e4	9.53e6
1000	2.00	10.4	86.4	4.30	118.5	8933	45.5	2.74e4	3.05e7
2000	2.00	10.4	88.6	9.70	8644	1.59e7	106.3	3.02e6	1.63e11
5000	2.00	10.5	93.8	6.70	3626	6.41e6	70.8	1.22e6	6.53e10
10000	2.00	10.8	112.0	6.16	2178	3.38e6	81.2	7.32e5	3.36e10
20000	1.99	10.7	105.1	5.46	1272	1.76e6	68.7	4.11e5	1.71e10

З іншого боку, для системи *M/G/*1 з формули Полячека-Хінчина слідує, що для існування $k-$го моменту очікування необхідна кінцівка моменту розподілу обслуговування порядку $k+1$. Для розглянутих нами E_4, M и H_2, маємо $\alpha = 3.2360$, 2.2142 та 2.1180 відповідно, так що в першому випадку повинні сходитися значення двох моментів, а в другому і третьому – тільки w_1, причому збіжність сильно погіршується із зменшенням α. Для $\alpha = 1.5$ розходиться навіть оцінка першого моменту.

Результати моделювання систем з "класичними" і з Парето-розподілами помітно різні. В результаті можна зробити наступні висновки:

1. Розподіл Парето вирівнює лише два моменти вихідного розподілу. Тому доброї згоди з методиками, які враховують більшу кількість моментів, очікувати не доводиться. Зауважимо, що у нас для розподілу Парето третій момент більше, ніж третій момент розподілів, що вирівнюються. Тому при Парето-розподілі для моделі *M/G/*1 очікування збільшується, а для *GI/M/*1 – зменшується.

2. Розбіжності просто зобов'язані бути істотними в разі, коли вирівнюючий розподіл Парето має нескінченні моменти невисокого порядку.

3. Розбіжності помітно зростають при збільшенні варіації вихідного розподілу.

Проведемо розрахунки для системи *Pa/M/*1.

Для $A(t)$ з класу розподілу Парето (3) отримується виразом

$$\omega = \int_K^\infty e^{-\mu(1-\omega)t} \frac{\alpha K^\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha K^\alpha \int_K^\infty t^{-\alpha-1} e^{-\mu(1-\omega)t} dt = \\ = \alpha\left[K\mu(1-\omega)\right]^\alpha \int_{K\mu(1-\omega)}^\infty u^{-\alpha-1} e^{-u} du. \qquad (20)$$

Останній інтеграл є неповною гамма-функцією (Г-функцією)

$$\Gamma(x,z) = \Gamma(x) - \gamma(x,z). \qquad (21)$$

Для знаходження Г-функції від'ємного аргументу при можливості її розрахунку для додатнього аргументу можна скористатися правилом доповнення [11, С. 60–61]:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin \pi z}. \qquad (22)$$

Контрольний розрахунок дав значення Г (-0.5) = -3.54490770181101, яке відрізняється від відомого значення $-2\sqrt{\pi}$ лише в останньому знаку. Необхідна для реалізації (21) функція $\gamma(x,z)$ розраховується за допомогою степеневого ряду

$$\gamma(x,z) = z^x \sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n}{n!(x+n)}. \qquad (23)$$

Для її розрахунку корисне рекурентне співвідношення

$$\Gamma(x+1,z) = x\Gamma(x,z) + z^x e^{-z}. \qquad (21)$$

Приведемо результати чисельного моделювання даної системи (табл. 7). В ній під значеннями H_2, M, E_4 розуміються відповідні цим розподілам значення α, розраховані відповідно (16).

Зпівставимо результати всіх розглянутих методів розрахунків моделі *GI/M/*1 (табл. 8).

Знаком: позначена точна реалізація зазначеного розподілу, *Pa* – її апроксимація розподілом Парето по двох моментах *1mPa* і – імітація з Парето-потоком. Згода в результатах розрахунку і моделювання Парето-системи можна вважати задовільним. Відзначимо, що розрахункові моменти розподілу очікування в системі *Pa/M/*1 завжди менше, ніж в *GI/M/*1, але більше отриманих при імітації.

Таблиця 7

Розрахунки системи Pa/M/1

α	$\rho = 0.7$			$\rho = 0.8$			$\rho = 0.9$		
	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3
1.1	7.999e3	1.738e8	5.810e12	1.892e5	8.949e10	6.349e16	1.003e6	2.236e12	7.479e18
1.2	4.102e1	4.808e3	8.453e5	3.574e2	3.193e5	4.279e8	1.209e4	3.249e8	1.310e13
1.3	8.503e0	2.066e2	7.528e3	3.860e1	3.725e3	5.391e5	4.431e2	4.362e5	6.443e8
1.5	2.796e0	2.234e1	2.677e2	7.924e0	1.570e2	4.665e3	3.883e1	3.330e3	4.337e5
1.7	1.841e0	9.689e0	7.646e1	4.395e0	4.829e1	7.958e2	1.578e1	5.533e2	2.911e4
1.9	1.491e0	6.439e0	4.056e1	3.273e0	2.678e1	3.287e2	1.015e1	2.288e2	7.741e3
H_2	1.305e0	4.862e0	2.718e1	2.723e0	1.854e1	1.893e2	7.750e0	1.335e2	3.449e3
M	1.173e0	3.931e0	1.976e1	2.357e0	1.388e1	1.227e2	6.304e0	8.830e1	1.855e3
E_4	1.039e0	3.041e0	1.345e1	1.988e0	9.876e0	7.361e1	4.997e0	5.548e1	9.240e2

Таблиця 8

Зведені результати розрахунків GI/M/1

Розподіл *GI*	Версія	Моменти очікування		
		w_1	w_2	w_3
E_4	:	2.091	10.93	85.73
	Pa	1.988	9.88	73.61
	lmPa	1.685	8.37	62.59
M	:	3.200	25.60	307.2
	Pa	2.357	13.88	122.7
	1mPa	2.150	12.71	112.9
H_2	:	7.609	144.5	4121
	Pa	2.723	18.54	189.3
	1mPa	2.609	17.79	181.6

Проведемо розрахунок системи *M/PA*/1.

Конкретизуємо залежності (19) стосовно до розподілу Парето (13):

$$\omega = \int_K^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \frac{\alpha K^\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{\alpha K^\alpha \lambda^j}{j!} \int_K^\infty t^{j-\alpha-1} e^{-\lambda t} dt = \tag{25}$$

$$= \frac{\alpha (\lambda K)^\alpha}{j!} \Gamma(j\text{-}\alpha, \lambda K) \quad j = \overline{0, j_{max}}.$$

Тепер загальний алгоритм розрахунку системи *M/Pa*/1 має вигляд:

1. Розрахувати $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du.$

2. Через формулу доповнення (22) отримати $\Gamma(-\alpha)$.

3. За допомогою степеневого ряду (23) розрахувати $\gamma(-\alpha, \lambda K)$.

4. Розрахувати $\Gamma(-\alpha,\lambda K) = \Gamma(-\alpha) - \gamma(-\alpha,\lambda K) = \Gamma_0$.

5. Розрахувати $z = \lambda K$.

6. Для $j = \overline{1, j_{max}}$ рекурентно розрахувати $\Gamma_j = (j - \alpha - 1)\Gamma_{j\text{-}1} + z^{j-\alpha-1} e^{-z}$.

7. Помножити все $\{\Gamma_j\}$ на $\alpha(\lambda K)^\alpha$.

8. Діленням кожної з $\{\Gamma_j\}$ на j! отримати $\{\phi_j\}$.

9. Підставляючи $\{\phi_j\}$ в систему (16), розрахувати стаціонарні розподіли кількості заявок в ній і моменти розподілу довжини черги.

В табл. 9 приведені результаті розрахунків $\{\phi_j\}$ для трьох коефіцієнтів варіації.

Тут $\Gamma_{0.25}$ означає *Г*-розподіл з вказаним в індексі значенням параметру форми – йому відповідає коефіцієнт варіації 2.

Таблиця 9

Експоненціальні момент $\{\phi_j\}$ для M/G/1

j	$\nu = 0.500$		$\nu = 1.000$		$\nu = 2.000$	
	E_4	*Pa*	M	*Pa*	$\Gamma_{0.25}$	*Pa*
0	4.822e-01	4.701e-1	5.556e-l	4.907e-1	6.985e-1	5.061e-1
1	3.215e-01	3.406e-l	2.469e-l	3.262e-1	1.330e-l	3.166e-1
2	1.340e-01	1.338e-l	1.097e-1	1.234e-1	6.336e-2	1.162e-1
3	4.465e-02	3.971e-2	4.877e-2	3.827e-2	3.621e-2	3.670e-2
4	1.302e-02	1.076e-2	2.168e-2	1.208e-2	2.241e-2	1.245e-2
5	3.473e-03	3.093e-3	9.634e-3	4.440e-3	1.451e-2	5.053e-3
6	8.682e-04	1.043e-3	4.282e-3	1.96Ie-3	9.677e-3	2.453e-3
7	2.067e-04	4.223e-4	1.903e-3	1.008e-3	6.583e-3	1.362e-3
8	4.738e-05	1.994e-4	8.458e-4	5.778e-4	4.545e-3	8.312e-4
9	1.053e-05	1.056e-4	3.759e-4	3.586e-4	3.174e-3	5.432e-4
10	2.280e-06	6.086e-5	1.671e-4	2.362e-4	2.237e-3	3.739e-4
11	4.839e-07	3.743e-5	7.425e-5	1.629e-4	1.588e-3	2.673e-4
12	1.008e-07	2.421e-5	3.300e-5	1.165e-4	1.134e-3	1.988e-4
13	2.068e-08	1.632e-5	1.467e-5	8.592e-5	8.145e-4	1.507e-4
14	4.185e-09	1.138e-5	6.519e-6	6.497e-5	5.874e-4	1.172e-4
15	8.369e-10	8.170e-6	2.897e-6	5.018e-5	4.25Ie-4	9.280e-5

Спостерігається помітна різниця в значеннях $\left\{\phi_j\right\}$ для вихідних і апроксимуючих розподілів, що і визначає істотну різницю в розраховуємих ймовірностях станів (табл. 10).

Таблиця 10

Розподіл $\left\{p_j\right\}$ кількості заявок в системі M/G/1

j	$\nu = 0.500$		$\nu = 1.000$		$\nu = 2.000$	
	E_4	*Pa*	M	*Pa*	$\Gamma_{0.25}$	*Pa*
0	2.000e-1	2.000e-1	2.000e-1	2.000e-1	2.000e-1	2.000e-l
1	2.147e-1	2.255e-1	1.600e-1	2.076e-1	8.63le-2	1.952e-l
2	1.688e-1	1.713e-1	1.280e-1	1.520e-1	6.903e-2	1.385e-l
3	1.222e-1	1.192e-1	1.024e-1	1.063e-1	5.970e-2	9.629e-2
4	8.670e-2	8.255e-2	8.192e-2	7.590e-2	5.299e-2	6.957e-2
5	6.120e-2	5.766e-2	6.554e-2	5.561e-2	4.759e-2	5.208e-2
б	4.31бe-2	4.059e-2	5.243e-2	4.155e-2	4.300e-2	4.003e-2
7	3.044e-2	2.875e-2	4.194e-2	3.153e-2	3.899e-2	3.139e-2
8	2.146e-2	2.047e-2	3.355e-2	2.424e-2	3.542e-2	2.501e-2
9	1.513e-2	1.465e-2	2.684e-2	1.883e-2	3.223e-2	2.020e-2
10	1.067e-2	1.052e-2	2.148e-2	1.478e-2	2.935e-2	1.65le-2
11	7.523e-3	7.590e-3	1.718e-2	1.171e-2	2.675e-2	1.3б3e-2
12	5.304e-3	5.499e-3	1.374e-2	9.356e-3	2.438e-2	1.136e-2
13	3.740e-3	3.998e-3	1.100e-2	7.535e-3	2.224e-2	9.553e-3
14	2.637e-3	2.921e-3	8.797e-3	6.115e-3	2.028e-2	8.094e-3
15	1.860e-3	2.143e-3	7.034e-3	5.000e-3	1.850e-2	6.907e-3

У табл. 11 наведені результати розрахунку моментів розподілу часу очікування щодо його перетворення Лапласа-Стілтьєса з допомогою формули Полячека-Хінчина (ФПХ) за допомогою процедури *DIFNEWT*, яка виконує чисельне диференціювання в нулі інтерполяційного багаточлена Ньютона.

Таблиця 11

Розрахунок системи M/Pa/1 диференціюванням ФПХ

α	$\rho = 0.7$			$\rho = 0.8$			$\rho = 0.9$		
	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3
1.1	21.44	646.2	1.566e4	26.48	803.2	1.951e4	32.22	984.7	2.398e4
1.2	16.70	485.9	1.164e4	22.18	655.5	1.578e4	29.30	882.5	2.138e4
1.3	12.78	354.0	8343	18.18	517.2	1.229e4	26.17	770.6	1.851 e4
1.5	7.385	177.4	3992	11.78	299.0	6821	19.99	548.7	1.282e4
1.7	4.434	87.13	1835	7.686	165.2	3544	14.92	368.6	8250
1.9	2.899	43.92	845.6	5.292	91.99	1815	11.33	244.7	5161
H_2	2.031	22.21	375.2	3.838	51.32	897.4	8.802	161.7	3149
M	1.472	10.25	135.8	2.844	26.74	380.1	6.858	102.2	1764
E_4	1.019	3.230	18.70	1.994	10.39	84.11	4.998	52.65	707.5

У табл. 12 звертає на себе увагу різке збільшення різниці між зпівставленими варіантами з ростом коефіцієнта варіації вихідних розподілів. Відзначимо також досить близький збіг результатів для чисельних методик *Pa* і *ФПХ-Pa*. Друга з них менш трудомістка, виключає помилки, пов'язані з урізанням кількості розраховуємих ймовірностей станів і тому є кращою.

Проведемо розрахунки для багатоканальних систем с Парето-обслуговуванням. Парето-обслуговування в одноканальних системах призводить до дуже рідких випадках заняття системи на надзвичайно тривалий термін, що і породжує описані в попередньому розділі ефекти. Доцільно припускати, що випадки одночасного заняття “супердовгими” заявками всіх каналів виявляться практично неймовірними. Таким чином, при фіксованому коефіцієнті завантаження дроблення продуктивності обчислювальної системи (розпаралелювання обслуговування) повинне виявитися хорошим захистом від наддовгого очікування.

Таблиця 12

Зведені результати розрахунків M/G/1

Розподіл *GI*	Версія	Моменти очікування		
		w_1	w_2	w_3
E_4	:	2.000	9.60	68.88
	Pa	1.983	10.74	82.83
	ФПХ-*Pa*	1.994	10.39	84.11
	lmPa	1.998	10.79	111.6
M	:	3.200	25.60	307.2
	Pa	2.639	21.91	314.3
	ФПХ-*Pa*	2.844	26.74	380.1
	lmPa	3.022	60.73	6851
H_2	:	8.000	166.00	5194
	Pa	3.222	36.62	719.3
	ФПХ-*Pa*	3.838	51.32	897.4
	lmPa	5.330	872.4	8.99e5

Таблиця 13

Імітаційне моделювання системи M/Pa/2

Кількість випробу-вань, тис.	$: E_4$			$: H_2$			$\alpha = 1.5$		
	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3	w_1	w_2	w_3
50	1.89	10.7	101.3	4.11	112.0	6841	61.0	2.19e4	1.10e7
100	1.82	9.87	88.3	3.40	72.0	3844	36.2	1.14e4	5.56e6
500	1.78	9.07	71.8	3.46	62.5	2468	28.9	9.34e3	5.45e6
1000	1.81	9.46	79.8	3.47	66.7	3197	32.4	1.58e4	1.51e7
5000	1.78	9.11	75.6	3.57	91.6	7812	39.0	2.44e4	3.04e7
10000	1.78	9.25	82.1	3.93	171.6	30784	49.3	4.56e4	8.08e7
20000	1.77	9.17	80.4	3.89	185.1	44305	52.0	4.86e4	8.59e7

Канал, зайнятий обслуговуванням “наддовгої” заявки, можна вважати тимчасово вийшов з ладу. Відповідно наведену вище рекомендацію можна уточнити таким чином: коефіцієнт завантаження системи для числа каналів повинен бути строго менше одиниці.

В табл. 13 наведені результати імітаційного моделювання системи *M/Pa/*2, отримані подвоєнням середнього часу обслуговування (див. для порівняння табл. 6).

Зіставлення табл. 13 і 5 показує помітну тенденцію до зменшення як самих моментів розподілу часу очікування, так і їх мінливості по кількості випробувань.

Висновок

У даній роботі представлена математична модель з розподілом Парето і описана можливість його використання. Проблемність ситуації полягає в тому, що навіть в стаціонарному процесі може бути надзвичайно великий теоретично невідомий другий момент. Якщо допустити, що він кінцевий, то вибіркові моменти відповідно до закону великих чисел сходяться надзвичайно повільно, і знання меж цієї збіжності не має практичної цінності.

Розроблено розрахунковий апарат для аналізу систем *Pa/M/1* та *M/Pa/1* та проведено зіставлення різних варіантів розрахунку з імітаційним моделюванням за матеріалами значної кількості таблиць. Показані принципова обмеженість можливостей імітаційного моделювання і різке погіршення якості обслуговування при малих значеннях α . Відзначено можливість виключення великих затримок при Парето-обслуговуванні шляхом дроблення продуктивності системи.

Результати відкривають новий аспект застосування чисельних методів теорії черг - роботу з розподілами, що мають кінцеве число моментів. Вони можуть бути використані при аналізі різноманітних ситуацій з підвищеною варіабельністю - перш за все комунікаційних мереж.

Напрямком подальших досліджень є розробка методики управління навантаженням в мережах спеціального призначення.

Список літератури

1. Кендалл М.Дж. Теория распределений / М.Дж. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1966. – 587 с.
2. Neuts M.F. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: an Algorithmic Approach. – Baltimore: T. Hopkins Univ. press. 1981.
3. Neuts M.F. Matrix-Analytic Methods in Queuing Theory / M.F. Neuts // Eur. J. of Opns. Res. – 1984. – Vol. 15. – P. 2-12.
4. Ахиезер Н.П. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н.П. Ахиезер. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
5. Рыжиков Ю.П. Алгоритмический подход к задачам массового обслуживания: монография / Ю.П. Рыжиков. – СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2013. – 496 с.
6. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.
7. Задорожный В.Н. Аналитико-имитационные исследования систем и сетей массового обслуживания: монография / В.Н. Задорожный. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2010. – 280 с.
8. Задорожный В.Н. Аналнтико-имитационные исследования Больших Сетевых структур: монография / В.Н. Задорожный. – Омск: Изд-во ОмГТУ. 2011. – 208 с.
9. Шелухин О.И. Причины самоподобия телетрафика и методы оценки показателя Херста / О.И. Шелухин // Электротехнические и информационные комплексы и системы. – 2007. – № 1. т. 3. – С. 5-14.
10. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных следований, 2002. – 656 с.
11. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1968. – 344 с.

Надійшла до редколегії 29.01.2017

Рецензент: д-р техн. наук проф. О.В. Кувшинов, Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації, Київ.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЗКИ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

И.А. Романенко, Р.Н. Животовский, С.Н. Петрук, А.В. Шишацкий, О.А. Волошин

В статье предложена математическая модель распределения нагрузкой в телекоммуникационных системах специального назначения на основе распределения Парето. Проведено имитационное моделирование систем массового обслуживания с распределением Парето, с приведением расчётных результатов, оценкой вычислительной сложности и приведением рекомендаций с применением разработанной математической модели.

Ключевые слова: *телекоммуникационные сети, распределение Парето, численные методы.*

MATHEMATICAL MODEL OF LOAD DISTRIBUTION IN TELECOMMUNICATION NETWORKS OF SPECIAL PURPOSE

I. Romanenko, R. Zhyvotovskyi, S. Petruk, A. Shishatskiy, O. Voloshin

In article offered mathematical model of load distribution in telecommunication networks of special purpose based on the distribution Pareto. Conducted simulation modeling of service systems with distribution Pareto, with reduction of the calculation results, evaluation of computational complexity and recommendations on the application of the developed mathematical model.

Keywords: *telecommunication networks, distribution Pareto, numerical methods.*