УДК 614.8

Г.В. Иванец

Национальный университет гражданской защиты Украины, Харьков

ОДИН ИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЛЮБОЙ ФОРМЫ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЕ РЕАЛИЗАЦИИ ИЗМЕРЯЕМОГО ПАРАМЕТРА

В статье рассматривается метод оценки периода периодической составляющей любой формы случайного процесса при произвольной длине реализации измеряемого параметра.

Ключевые слова: *метод наибольшего правдоподобия, функция правдоподобия, логарифм отношения правдоподобия, периодическая составляющая, случайная составляющая,* χ^2 *распределение.*

Вступление

Общая постановка проблемы и анализ литературы. Большинство реальных процессов в более или менее явной форме имеют периодические составляющие. Пусть, исходя из некоторых соображений относительно рассматриваемого процесса, допускается, что функция $Y(t)$ содержит периодические функции времени $X_i(t)$ (например, в виде суммы) и случайную составляющую $\xi(t)$:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t) + \xi(t)\ .$$

Периодическая функция $X(t)$ полностью определяется частотой ω (или периодом p) и значениями коэффициентов ряда Фурье [1–3]:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t \right).$$

Скрытая периодичность $X(t)$ будет обнаружена, если определены параметры ω, A_k и B_k [1–4].

Для выделения периодических составляющих можно использовать и различные преобразования исходных функций $Y(t)$, которые усиливают роль периодической компоненты в преобразованном процессе [2–3]. Все подобные селекционные или сфокусированные преобразования можно разделить на два класса: линейные преобразования и нелинейные преобразования. Применение таких преобразований дает возможность выделить периодическую составляющую любой частоты из заданного диапазона.

Следует отметить, что исходная функция может иметь несколько периодических составляющих. Каждую из выявленных периодических составляющих можно экстраполировать на произвольное время упреждения Δt. В упрежденное время $t + \Delta t$, беря сумму экстраполированных периодических составляющих, получаем предвиденное значение периодической части процесса. Однако во всех этих методах необходимо четко знать частоту (период) периодической составляющей, и они ориентированы в основном на гармонические периодические составляющие. Поэтому задача оценки периода периодической составляющей любой формы и ее отсчетов представляется актуальной и практически важной.

Цель статьи. В статье предлагается метод оценки периода периодической составляющей любой формы случайного процесса при произвольной длине измеряемого параметра.

Изложение материалов исследований

Пусть в случайной реализации измеряемого параметра Y произвольной длины в общем случае не кратной периоду периодической составляющей содержится периодическая и случайная составляющие. Модель изменения измеряемого параметра представим в виде:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \otimes X \\ X' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $Y = \left(y_0, y_1, ..., y_{qp-1}\right)^T$ – блочная матрица отсчетов наблюдаемой реализации размерностью $qp \times 1$;

$Y' = \left(y_{qp}, y_{qp+1}, ..., y_{n-1}\right)^T$ – блочная матрица отсчетов наблюдаемой реализации размерностью $n' \times 1$;

$1 = \left(1,1,1,...,1\right)^T$ – матрица размерностью $q \times 1$;

$X=\left(x_0,x_1,...,x_{p-1}\right)^T$ – блочная матрица отсчетов периодической составляющей размерностью $p\times 1$;

$X^{'}=\left(x_{qp},x_{qp+1},...,x_{n-1}\right)^T$ – блочная матрица оставшихся отсчетов периодической составляющей, не попавших в реализацию длины qp, размерностью $n^{'}\times 1$;

$\xi=\left(\xi_0,\xi_1,\xi_2,...,\xi_{qp-1}\right)^T$ – блочная матрица отсчетов случайной составляющей размерностью $qp\times 1$;

$\xi^{'}=\left(\xi_{qp},\xi_{qp+1},...,\xi_{n-1}\right)^T$ – блочная матрица отсчетов случайной составляющей размерностью $n^{'}\times 1$;

$\otimes$ – символ произведения Кроннекера;

$n=qp+n^{'}$ – длина реализации измеряемого параметра;

p – период периодической составляющей;

q – количество периодов периодической составляющей в реализации;

$n^{'}<p$ – количество отсчетов наблюдаемой реализации, не попавших в реализацию длины qp.

Предполагается, что ξ – гауссов случайный дискретный процесс с нулевым средним и некоррелированными отсчетами.

Представим логарифм отношения правдоподобия [1; 4–5]:

$$\ln l(Y)=\ln\frac{P_y(Y/X\neq 0)}{P_y(Y/X=0)},$$

где
$$P_y\left(Y/X\neq 0\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\begin{bmatrix}\left(Y-1\otimes X\right)^T\times\\ \times\left(Y-1\otimes X\right)+\\ +\left(Y^{'}-X^{'}\right)^T\left(Y^{'}-X^{'}\right)\end{bmatrix}\right\}$$
– условная плотность распределения дискретных значений Y при наличии в реализации периодической составляющей (функция правдоподобия);

$$P_y\left(Y/X=0\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y^TY+Y^{'T}Y^{'}\right)\right\}$$
– условная плотность распределения дискретных значений наблюдаемой реализации дискретных значений Y при отсутствии в реализации периодической составляющей, в виде:

$$\ln l(Y)=\frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix}Y^T\left(1\otimes X\right)-\frac{q}{2}(X^TX)+\\ +Y^{'T}X^{'}-\frac{1}{2}X^{'T}X^{'}\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

В дальнейшем логарифм отношения правдоподобия будем обозначать $\ln l$.

С выражения (2) следует, что

$$\sigma^2\ln l=Y^T\left(1\otimes X\right)-\frac{q}{2}\left(X^TX\right)+$$
$$+Y^{'T}X^{'}-\frac{1}{2}X^{'T}X^{'}. \qquad (3)$$

Матрицу X можно представить в виде:

$$X=\begin{pmatrix}X^{'}\\ X^{''}\end{pmatrix},$$

где $X^{'}$ – блочная матрица размерностью $n^{'}\times 1$;

$X^{''}$ – блочная матрица размерностью $\left(p-n^{'}\right)\times 1$.

Для оценки значений периодической составляющей X и дисперсии σ^2 продифференцируем выражение (3) по всем варьируемым x. Тогда оценки отсчетов периодической составляющей $\hat{x}_i$ и дисперсии $\hat{\sigma}^2$ будут определяться выражениями:

$$\hat{x}_i=\begin{cases}\hat{x}^{'}_i=\dfrac{1}{(q+1)}\sum\limits_{s=0}^{q}y_{i+sp}; & i=0,1,2,...,n^{'}-1;\\ \hat{x}^{''}_i=\dfrac{1}{q}\sum\limits_{s=0}^{q-1}y_{i+sp}; & i=n^{'},n^{'}+1,...,p;\end{cases} \qquad (4)$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\left(\begin{pmatrix}Y\\ Y^{'}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\otimes X\\ X^{'}\end{pmatrix}\right)^T\times$$
$$\times\left(\begin{pmatrix}Y\\ Y^{'}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\otimes X\\ X^{'}\end{pmatrix}\right). \qquad (5)$$

Выполнив соответствующие подстановки в выражение (3.) получим:

$$\sigma^2\ln l_{/X=\hat{X}}=\frac{q+1}{2}\hat{X}^{'T}\hat{X}^{'}+\frac{q}{2}\hat{X}^{''T}\hat{X}^{''},$$

где $\hat{X}=\begin{pmatrix}\hat{X}^{'}\\ \hat{X}^{'}\end{pmatrix}$ – матрица оценок периодической составляющей размерностью $p\times 1$.

Введем в рассмотрение случайную величину:

$$D=\sigma^2\ln l_{/X=0}.$$

(условие $X=0$ означает, что в реализации отсутствует периодическая составляющая).

Найдем распределение случайной величины D:

$$D=\sigma^2\ln l_{/X=0}=\sum_{i=0}^{n^{'}-1}\left(\sqrt{\frac{q+1}{2}}\hat{x}^{'}_i\right)^2+\sum_{i=n^{'}}^{p}\left(\sqrt{\frac{q}{2}}\hat{x}^{''}_i\right)^2,$$

где $\hat{x}^{'}_i=\dfrac{1}{q+1}\sum\limits_{s=0}^{q}\xi_{i+sp}$; $\hat{x}^{''}_i=\dfrac{1}{q}\sum\limits_{s=0}^{q-1}\xi_{i+sp}$.

Введем в рассмотрение случайную величину Z_i:

$$Z_i = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{q+1}{2}}\,\hat{x}_i^{'}; & i = 0,1,2,\ldots,n^{'}-1; \\ \sqrt{\dfrac{q}{2}}\,\hat{x}_i^{''}; & i = n^{'}, n^{'}+1,\ldots,p-1. \end{cases}.$$

При таком определении Z_i имеем, что $D = \sum_{i=0}^{p-1} Z_i^2$ – это сумма p квадратов случайных величин Z_i, нормальных с нулевым средним. Можно убедиться, что эти величины независимы для различных значений i.

Таким образом, при различных значениях $i = 0,1,2,\ldots,n^{'}-1$ будем иметь слагаемые:

$$Z_i^2 = \frac{q+1}{2}\hat{x}_i^{'2}; \quad \left(Z_i = \sqrt{\frac{q+1}{2}}\hat{x}_i^{'} \right).$$

Дисперсия случайной величины Z_i в этом случае определяется следующим образом:

$$\left\langle Z_i^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\sigma^2 .$$

При значениях $i = n^{'}, n^{'}+1, p-1$ имеем слагаемые:

$$Z_i^2 = \frac{q}{2}\hat{x}_i^{''2}; \quad \left(Z_i = \sqrt{\frac{q}{2}}\hat{x}_i^{''} \right).$$

Дисперсия случайной величины Z_i:

$$\left\langle Z_i^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\sigma^2 .$$

От рассмотрения случайной величины D перейдем к рассмотрению случайной величины d:

$$d = \frac{2}{\sigma^2}D = \sum_{i=0}^{p-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}Z_i \right)^2 . \quad (6)$$

Дисперсия случайной величины $\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}Z_i$ равна единице. При таком представлении случайная величина d представляет собой сумму квадратов p случайных, независимых, нормальных величин $\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}Z_i$ с нулевыми средними и единичными дисперсиями, а значит, подчиняется распределению χ^2 с p степенями свободы [4–6]. Выяснив закон распределения случайной величины d, можно построить обнаружитель периодической составляющей, выставляя пороги обнаружения, используя таблицы χ^2 распределения.

На основании вышеизложенного предлагается алгоритм определения периода и оценок отсчетов периодической составляющей:

1. Находим матрицы оценок отсчетов периодической составляющей перебором всех возможных значений p $(p = 1,2,\ldots,n)$:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{x}_{p-1} \end{pmatrix},$$

где $$\hat{x}_i = \begin{cases} \hat{x}_i^{'} = \dfrac{1}{(q+1)}\sum_{s=0}^{q} y_{i+sp} \\ x_i^{'} = \dfrac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} y_{i+sh} \end{cases};$$

$i = 0,1,2,\ldots,n^{'}-1$;

$i = n^{'}, n^{'}+1,\ldots,p$.

2. Для каждой матрицы оценок отсчетов периодической составляющей для различных значений p формируем случайные величины D:

$$D = \sum_{i=0}^{p-1} Z_i^2; \quad Z_i = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{q+1}{2}}\hat{x}_i^{'}; \\ \sqrt{\dfrac{q}{2}}\hat{x}_i^{''}; \end{cases}$$

$i = 0,1,2,\ldots,n^{'}-1$;

$i = n^{'}, n^{'}+1,\ldots,p-1$.

3. Находим оценки дисперсии $\hat{\sigma}^2$ для различных значений p:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\begin{pmatrix} Y \\ Y^{'} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\otimes X \\ X^{'} \end{pmatrix} \right)^T \times$$
$$\times \left(\begin{pmatrix} Y \\ Y^{'} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\otimes X \\ X^{'} \end{pmatrix} \right).$$

4. Подставляя найденные оценки дисперсии $\hat{\sigma}^2$ для различных значений p в выражение для логарифма отношения правдоподобия, находим значение максимума $\ln l$:

$$\ln l(Y) = \frac{1}{\sigma^2}\left[Y^T(1\otimes X) - \frac{q}{2}(X^T X) + Y^{'T}X^{'} - \frac{1}{2}X^{'T}X^{'} \right].$$

5. Для выставления порога обнаружения введена случайная величина d, а сам порог обнаружения определяется для данного p по таблицам обнаружения распределения χ^2, задаваясь вероятностями ошибок 1 и 2 рода.

6. Сравниваем с порогом обнаружения максимальное значение логарифма отношения правдоподобия и при превышении его получаем оценку периода периодической составляющей $\hat{p}$.

Выводы

Предложен метод и алгоритм оценки периода периодической составляющей любой формы случайного процесса при произвольной длине измеряемого параметра. Если исходная функция содержит несколько периодических составляющих, тогда каждую из них выявляют последовательно в соответствии с предложенным методом.

Список литературы

1. *Назаров А.А. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособ. / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.*
2. *Ивахненко А.Г. Предсказание случайных процессов / А.Г. Ивахненко, В.Г. Лапа. – К.: Наукова думка, 1971. – 404 с.*
3. *Серебреников М.Г. Выявление скрытых периодичностей / М.Г. Серебреников, А.А. Первозванский. – М.: Наука, 1965. – 280 с.*
4. *Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебн. для вузов / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 543 с.*
5. *Б.Л. Ван Дер Варден. Математическая статистика / Б.Л. Ван Дер Варден. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 434 с.*
6. *Теорія ймовірностей та математична статистика: [навч. посіб.] / О.І. Кушлик-Дивульська, Н.В. Поліщук, Б.П. Орел, П.І. Штабалюк. – Вид. 2-ге, випр. і доп. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 220 с.*

Поступила в редколлегию 11.01.2017

Рецензент: д-р техн. наук ст. научн. сотрудник В.В Тютюник, Национальный университет гражданской защиты Украины, Харьков.

ОДИН З МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ БУДЬ-ЯКОЇ ФОРМИ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ПРИ ДОВІЛЬНІЙ РЕАЛІЗАЦІЇ ВИМІРЮВАНОГО ПАРАМЕТРУ

Г.В. Іванець

В статті розглядається метод оцінки періоду періодичної складової любої форми випадкового процесу при довільній довжині реалізації вимірюваного параметру.

Ключові слова: *метод найбільшої правдоподібності, функція правдоподібності, логарифм відношення правдоподібності, періодична складова,випадкова складова,* χ^2 *розподіл.*

ONE METHOD PERIODIC EVALUATION COMPONENT ANY FORM OF RANDOM PROCESSES IN ARBITRARY LENGTH IMPLEMENTATION MEASURED PARAMETERS

G. Ivanets

The article discusses the method for estimating the period of the periodic component of any form of a random process with an arbitrary length of the implementation of the measured parameter.

Keywords: *method of maximum likelihood, likelihood function, log-likelihood ratio, a periodic component, the random component,* χ^2 *distribution.*