

УДК 539.3

В.Ю. Мірошніков

Харківський національний університет будівництва та архітектури, Харків

ДРУГА ОСНОВНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ПРОСТОРІ З ДЕКІЛЬКОМА ПАРАЛЕЛЬНИМИ КРУГОВИМИ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОРОЖНИНАМИ

В статті приведено рішення тривимірної задачі теорії пружності, коли на межах паралельних циліндричних порожнинах в пружному просторі задані переміщення. Рішення отримано узагальненим методом Фур'є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов'язаних з циліндрами. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, к котрим зведена проблема, вирішуються методом усічення. В результаті були знайдені переміщення, а потім напруження в пружному тілі. Числові результати приведені для случаю двох циліндрів.

Ключові слова: циліндричні порожнини в просторі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є.

Вступ

При проектуванні різного роду комунікацій і тунелів, прокладених під землею, потрібно знати напружено-деформований стан пружного тіла (простору або півпростору) з декількома порожнинями, а також взаємний вплив їх один на одного. Таку інформацію можна отримати, розв'язавши відповідну задачу теорії пружності. Натомість готових розрахунків таких задач в просторовому варіанті нема. Отже проблема розрахунку таких задач є актуальною.

Аналіз публікацій. Просторові (тривимірні) задачі теорії пружності для тіл, які обмежені канонічними поверхнями (поверхні другого порядку: циліндр, конус, шар, еліпсоїд, параболоїд та інші) вивчались в працях [1–4]. Точні рішення отримані виключно методом розділення змінних та методом Фур'є. Задачі для пружних тіл з декількома граничними поверхнями не можуть бути вирішені в рамках класичного підходу Фур'є. Для таких задач знадобилося створювати узагальнений метод Фур'є [5–8], витоки якого можна знайти в задачах дифракції хвиль на декількох тілах [9]. За допомогою цього методу в цій статті дано рішення задачі, вказаної у заголовку. В статті [10] дано рішення близької задачі для циліндру з двома циліндричними порожнинями.

Мета статті. Провести аналіз напружено – деформованого стану простору з циліндровими паралельними порожнинями, а також їх взаємного впливу. Для досягнення цієї мети використовуємо узагальнений метод Фур'є.

Основний матеріал

Постановка задачі. Метод вирішення. Пружний однорідний простір має N кругових непересічних між собою циліндричних паралельних порожнин, на межах яких задані переміщення, які будемо вважати швидко убутними до нуля на далеких від-

станях від початку координат. Потрібно знайти рішення рівняння Ламе в просторі поза порожнин.

$$\Delta \bar{U} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \bar{U}, \quad (1)$$

де \bar{U} – вектор переміщення;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{e}_z \frac{\partial}{\partial z} -$$

відповідно, оператор Лапласа і градієнта;

$\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ – орти декартової системи координат;

σ – коефіцієнт Пуассона.

Вважаємо, що на поверхні циліндру з номером p задані переміщення $\bar{U}_p^0(\phi_p, z)$, $p = 1, 2, \dots, N$; (ρ_p, ϕ_p, z) – система локальних циліндричних координат.

Базисні рішення рівняння (1) обираємо у вигляді [8]

$$\begin{aligned} \bar{R}_{1,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \bar{a}_m(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}, \\ \bar{R}_{2,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \bar{b}_m(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}, \\ \bar{R}_{3,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \bar{c}_m(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де позначено

$$\begin{aligned} \bar{a}_m(\rho, \lambda) &= \bar{e}_\rho \cdot I'_m(\lambda \rho) + i \cdot I_m(\lambda \rho) \cdot \left(\bar{e}_\phi \frac{m}{\lambda \rho} + \bar{e}_z \right); \\ \bar{c}_m(\rho, \lambda) &= - \left[\bar{e}_\rho \cdot I_m(\lambda \rho) \frac{m}{\lambda \rho} + \bar{e}_\phi \cdot i \cdot I'_m(\lambda \rho) \right] \bar{c}_m(\rho, \lambda) = \\ &= - \left[\bar{e}_\rho \cdot I_m(\lambda \rho) \frac{m}{\lambda \rho} + \bar{e}_\phi \cdot i \cdot I'_m(\lambda \rho) \right]. \end{aligned}$$

Ці рішення, регулярні всередині циліндру.

Зовні циліндру рішення будуть такі:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{1,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \bar{a}_m(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}; \\ \bar{S}_{2,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \bar{b}_m(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}; \\ \bar{S}_{3,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \bar{c}_m(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_m(\rho, \lambda) &= \left[\bar{e}_\rho \cdot K'_m(t) \cdot \text{sign}(\lambda) + i \cdot K_m(t) \left(\bar{e}_\phi \frac{m}{\lambda \rho} + \bar{e}_z \right) \right] \cdot (\text{sign}(\lambda))^m; \\ \bar{b}_m(\rho, \lambda) &= (\text{sign}(\lambda))^m \left\{ \bar{e}_\rho \cdot [(4\sigma - 3) \cdot K'_m(t) \cdot \text{sign}(\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \rho K''_m(t)] + \bar{e}_\phi i \cdot m \left(\frac{4(\sigma - 1)}{\lambda \rho} K_m(t) + K'_m(t) \text{sign}(\lambda) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{e}_z i \cdot |\lambda| \cdot \rho \cdot K'_m(t) \right\}; \\ \bar{c}_m(\rho, \lambda) &= -(\text{sign}(\lambda))^m \left[\bar{e}_\rho K_m(t) \frac{m}{\lambda \rho} + \bar{e}_\phi i \cdot \text{sign}(\lambda) \cdot K'_m(t) \right], \end{aligned}$$

де $t = |\lambda| \cdot \rho$

У вираженні (2–3), $I_m(x)$, $K_m(x)$ – функції Бесселя уявного аргументу, похідні від яких лінійно виражаються через самі функції.

В роботі [11] показано, що всяке рішення внутрішньої чи зовнішньої задачі теорії пружності для нескінченного циліндру може бути представлено у вигляді суперпозиції рішень (2) чи (3).

Рішення задачі для N циліндрів представимо у вигляді:

$$\bar{U} = \sum_{p=1}^N \bar{U}_p(\rho_p, \phi_p, z), \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{U}_p &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[x_m^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{1,m}^{(p)}(\rho, \phi, z; \lambda) + \right. \\ &\quad \left. y_m^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{2,m}^{(p)}(\rho, \phi, z; \lambda) + z_m^{(p)}(\lambda) \times \right. \\ &\quad \left. \times \bar{S}_{3,m}^{(p)}(\rho, \phi, z; \lambda) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

є рішення рівняння Ламе зовні циліндра з номером p ;

$\bar{S}_k^{(p)}(\rho, \phi, z; \lambda)$ – базисні рішення (3), віднесені до системи циліндричних координат (ρ_p, ϕ_p, z) ;

$x_m^{(p)}(\lambda)$, $y_m^{(p)}(\lambda)$, $z_m^{(p)}(\lambda)$ – невідомі функції, що підлягають визначенню з граничних умов.

Виділимо з (4) доданок з номером g

$$\bar{U} = \bar{U}_g(\rho_g, \phi_g, z) + \sum_{p=1, p \neq g}^N \bar{U}_p(\rho_p, \phi_p, z). \quad (6)$$

Ідея узагальненого методу Фур'є полягає в тому, що всі рішення з суми (6) перетворюються до системі координат (ρ_g, ϕ_g, z) по спеціальним формулам. Формули переходу від циліндра з номером p до циліндра з номером g , ($g \neq p$) мають вид:

$$\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_{k,p,g}^{mn}(\rho_g) \cdot e^{i(n\phi_g + \lambda z)}, \quad (7)$$

$k = 1, 2, 3$

вектор функції $\bar{C}_{k,p,g}^{mn}(\rho_g)$ даються виразами:

$$\bar{C}_{1,p,g}^{mn}(\rho_g) = (-1)^n \bar{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pg}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pg}} \cdot \bar{a}_n(\rho_g, \lambda);$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{3,p,g}^{mn}(\rho_g) &= (-1)^n \bar{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pg}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pg}} \cdot \bar{c}_n(\rho_g, \lambda); \\ \bar{C}_{2,p,g}^{mn}(\rho_g) &= (-1)^n \left\{ \bar{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pg}) \cdot \bar{b}(\rho_g, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pg} \times \right. \\ &\quad \left. \times [\bar{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pg}) + \bar{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pg})] \cdot \bar{a}(\rho_g, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pg}}. \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (8) α_{pg} – кут між осями координат та відрізком $O_p O_g$ (рис. 1),

$$\bar{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|).$$

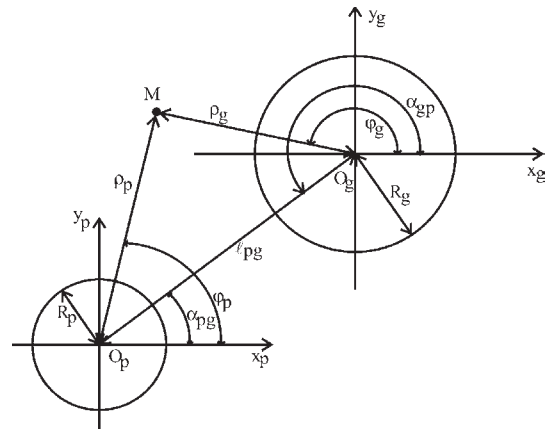


Рис. 1.

Ряди сходяться абсолютно та рівномірно при умові $\rho_g = \ell_{pg}$.

Для реалізації крайових умов на поверхні g -го циліндру відомі вектори $\bar{U}_g^0(\phi, z)$ представимо в вигляді розкладання

$$\bar{U}_g^0(\phi_g, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{h}_m^{(g)}(\lambda) \cdot e^{i(\lambda\phi_g + \lambda z)}, \quad (9)$$

де

$$\bar{h}_m^{(g)}(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi_g \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_g^0(\phi_g, z) \cdot e^{-i(\lambda z + m\phi_g)},$$

$g = 1, 2, \dots, N.$

Перетворимо в (6) всі складові \bar{U}_p при $p \neq g$ за формулами (7) до циліндру з номером g і в отриманій рівності положимо $\rho_g = R_g$, де R_g – радіус циліндру з

номером g . В результаті прирівнювання векторних коефіцієнтів при $e^{i(\lambda z + m\phi_g)}$ знайдемо рівність

$$x_m^{(g)}(\lambda) \cdot \vec{a}_m(R_g, \lambda) + y_m^{(g)}(\lambda) \cdot \vec{b}_m(R_g, \lambda) + z_m^{(p)}(\lambda) \times \\ \times \vec{c}_m(R_g, \lambda) + \sum_{p=1, p \neq g}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} [x_s^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{c}_{1,pg}^{sm}(R_g) + y_s^{(p)}(\lambda) \times \\ \times \vec{c}_{2,pg}^{sm}(R_g) + z_s^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{c}_{3,pg}^{sm}(R_g)] = \vec{h}_m^g(\lambda),$$

де $g=1, 2, \dots, N$.

Якщо спроектувати ці векторні рівності на осі координат (іншими словами прирівняти проєкції при базисних векторах $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$), то отримаємо сукупність $3 \cdot N$ нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $x_m^{(p)}(\lambda), y_m^{(p)}(\lambda), z_m^{(p)}(\lambda)$, які завжди однозначно можна розв'язати. Більш того, ці системи можна вирішувати методом усічення і має місце збіжність наближених рішень до точного [8].

Числові результати для двох циліндрів. Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у просторі, які розташовані на відстані $\ell_{pg} = 45$ см, під кутом $\alpha_{pg} = \pi/4$. Радіуси порожнин $R_p=10$ см, $R_g=15$ см. Простір – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона $\sigma = 0.35$, модуль пружності $E = 2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$. На межах циліндрів задано вектор переміщення у вигляді $U_\rho = \frac{10^4}{(z^2 + 10^2)^2}, U_z = 0, U_\phi = 0$ (зображено на рис. 2).

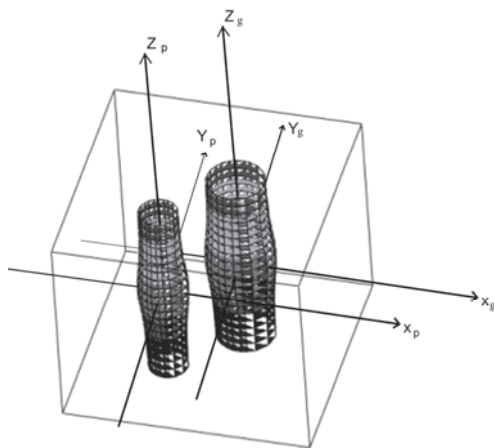


Рис. 2. Граничні умови на циліндричних порожнинах

Нескінченна система рівнянь, яка отримана з (10) була зведена до кінцевої: $m=-4 \dots 4$, межі інтеграції були узяті від $-3 \dots 3$, формула квадратури для обчислення інтегралів була обрана по щонайвищому тригонометричному ступеню точності. Число вузлових точок – 400. Це є достатнім при заданих геометричних умовах, точність виконання граничних умов в цьому випадку досягає 10^{-4} .

В результаті рішення цієї системи рівнянь були знайдені невідомі функції, перевірено виконання граничних умов на межах циліндричних порожнин, побудовані графіки переміщення U_ρ на межі першої (p) порожнини, на відстані $\rho_p=20$ см та $\rho_p=30$ см (рис. 3) та графіки нормальних напружень на таких саме відстанях (рис. 4) при $z=0$.

Найбільш напружений стан знаходиться на перехресті між циліндричними порожнинами по лінії ℓ_{pg} (рис 5–6).

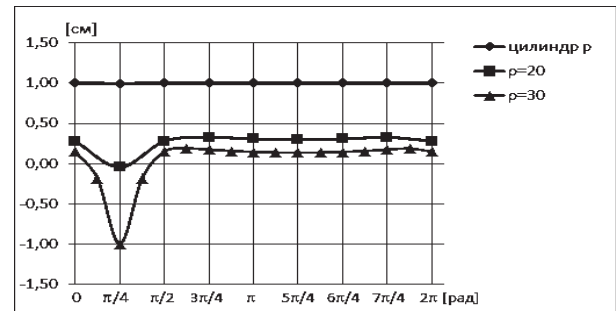


Рис. 3. Переміщення U_ρ

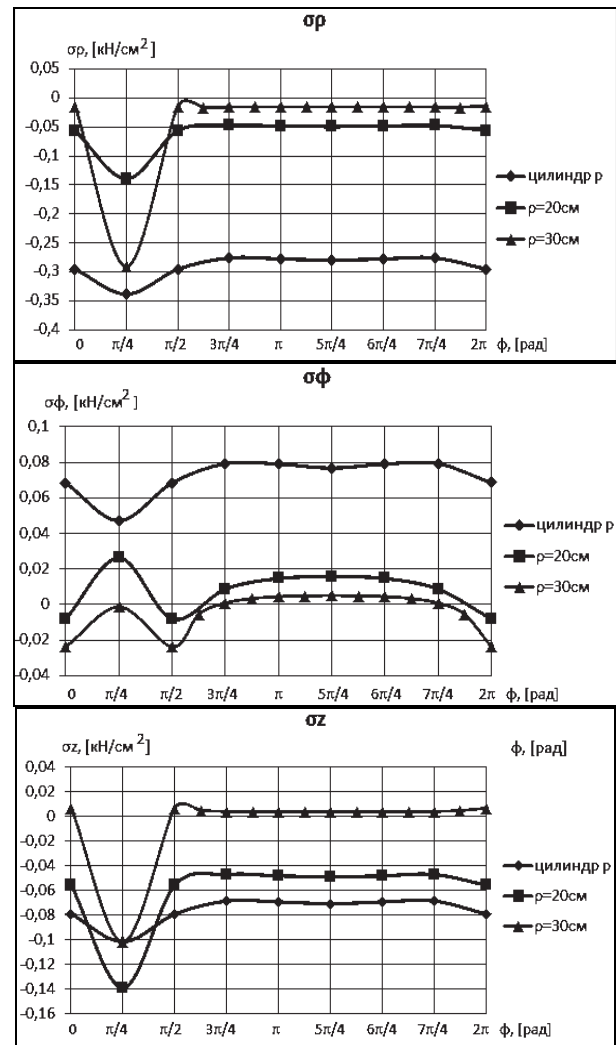


Рис. 4. Нормальні напруження

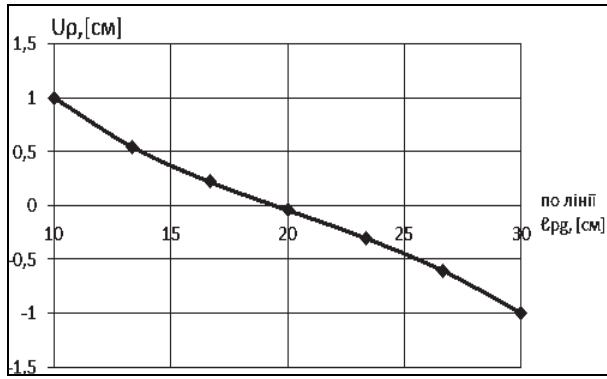


Рис. 5. Переміщення U_ρ по лінії $l_{pg}=45$

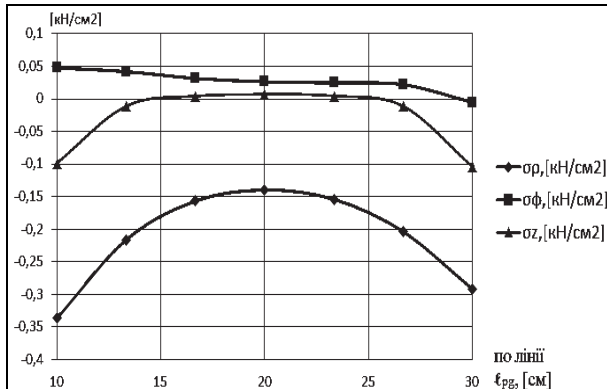


Рис. 6. Напруження, $\sigma_\rho, \sigma_\phi, \sigma_z$ по лінії $l_{pg}=45$

Наблизимо порожнину g до порожнини p , залишив всі інші параметри незмінними, тобто прийmemo $l_{pg} = 30$ см, (відношення $\frac{R_p + R_g}{l_{pg}} = 0,833$).

Для забезпечення точності розрахунку кількість членів ряду Фур'є необхідно збільшувати до $m = -10 \dots 10$, так як при менших значеннях граничні умови виконуються зі значною похибкою (табл. 1)

Таблиця 1

Похибка виконання граничних умов в залежності від m (повинно бути 1)

ϕ , рад	U_ρ , $m=-4..4$	U_ρ , $m=-6..6$	U_ρ , $m=-8..8$	U_ρ , $m=-10..10$
0,000	1,01398	0,99405	0,99946	1,00027
0,785	0,96145	0,99189	0,99826	0,99962
1,571	1,01398	0,99405	0,99946	1,00027
2,356	1,00815	0,99828	1,00037	0,99992
3,142	0,98390	1,00209	1,00067	0,99991
3,927	1,01805	1,00362	1,00074	1,00015
4,712	0,98390	1,00209	1,00067	0,99991
5,498	1,00815	0,99828	1,00037	0,99992
6,283	1,01398	0,99405	0,99946	1,00027

Переміщення U_ρ для заданих умов показані на (рис. 7), графіки нормальних напружень на (рис. 8). Значення $U_\rho, \sigma_\rho, \sigma_\phi, \sigma_z$ на лінії l_{pg} зображені на (рис. 8–9).

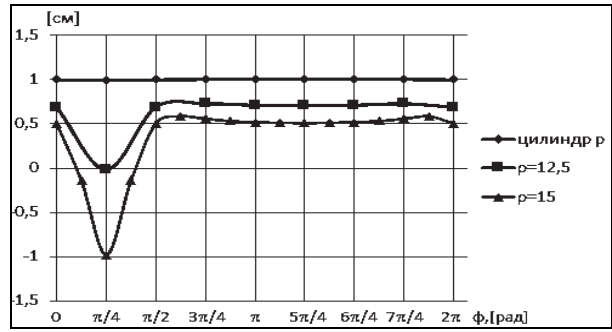


Рис. 7. Переміщення U_ρ

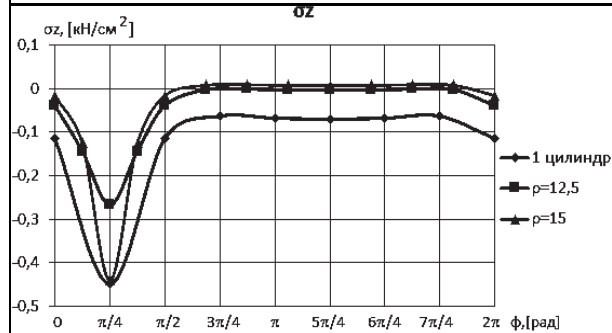
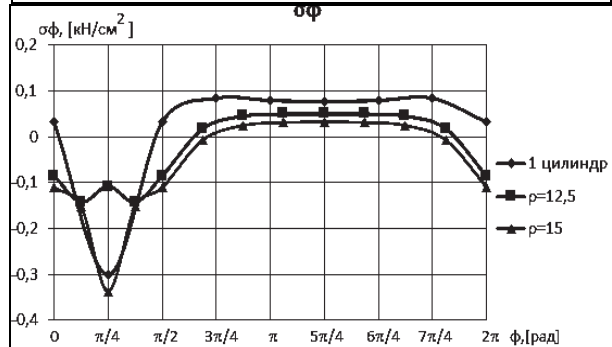
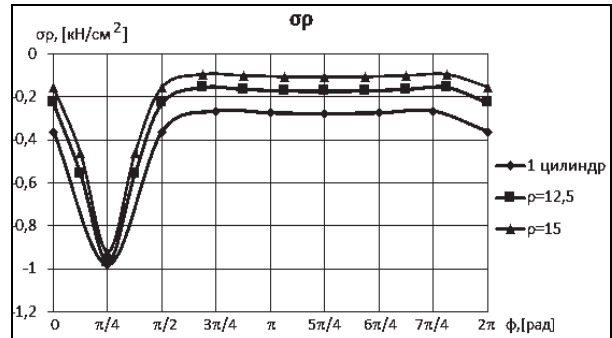


Рис. 8. Нормальні напруження

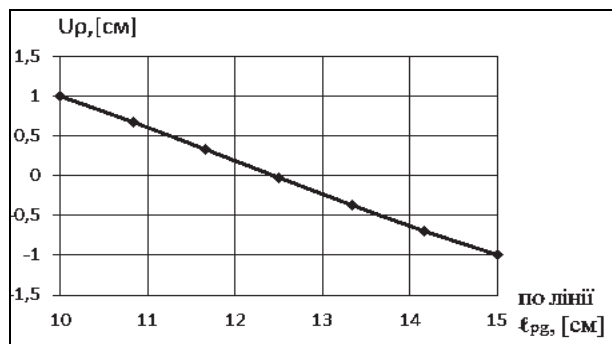


Рис. 9. Значення U_ρ на лінії $l_{pg}=30$

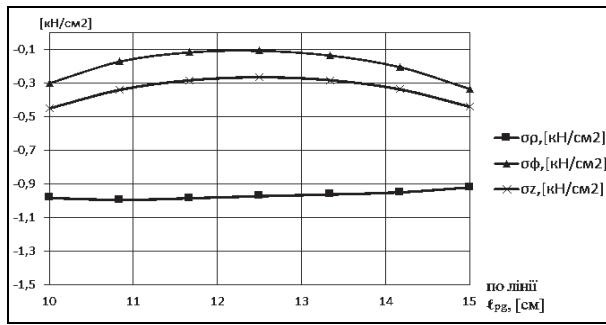


Рис. 10. Напруження σ_r , σ_ϕ , σ_z на лінії $l_{pg}=30$

При розташуванні циліндричних порожнин на відстані $l_{pg} \geq 120$ см. ($\frac{R_p + R_g}{l_{pg}} < 0,21$) при одиничному переміщенню на обох порожнинах вплив їх друг на друга практично дорівнює нулю, тобто при розрахунку однієї з циліндричних порожнин іншою можна знехтувати (рис. 11).

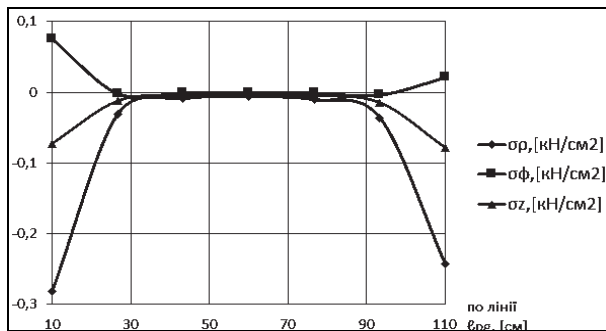


Рис. 11. Напруження σ_r , σ_ϕ , σ_z на лінії $l_{pg}=120$

Висновки

Запропоновано метод розв’язання задачі теорії пружності, коли на межах декількох паралельних циліндричних кругових порожнин задані переміщення.

Числові дослідження алгебраїчної системи для двох циліндрів дають можливість стверджувати, що

її рішення може бути з будь-якою ступенню точності знайдено методом редукції.

Наведені графіки дають уявлення про розподіл переміщення і напружень в тілі у найбільш цікавій зоні і взаємний вплив циліндричних порожнин одна на одну.

Список літератури

1. Подільчук Ю.Н. *Пространственные задачи теории упругости* / Ю.Н. Подільчук. – К.: Наук. думка, 1979. – 240 с.
2. Гринченко В.Т. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы* / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко. – К.: Наук. думка, 1985. – 280 с.
3. Улитко А.Ф. *Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости* / А.Ф. Улитко. – К.: Наук. думка, 1979. – 265 с.
4. Уфлянд Я.С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости* / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
5. Гузь А.Н. *Сферические днища, ослабленные отверстиями* / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко. – К.: Наук. думка, 1970. – 323 с.
6. Гузь А.Н. *Дифракция упругих волн в многосвязных телах* / А.Н. Гузь, В.Т. Головач. – К.: Наук. думка, 1972. – 254 с.
7. Николаев О.Г. *Узагальнений метод Фурье в просторових задачах теорії пружності для канонічних багатозв'язкових тіл* / О.Г. Николаев. – Дніпропетровськ: автореф. дисертації д.ф.-м.наук, 1997. – 36 с.
8. Николаев А.Г. *Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости* / А.Г. Николаев, В.С. Проценко. – Х.: Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.
9. Иванов Е.А. *Дифракция электромагнитных волн на двух телах* / Е.А. Иванов. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.
10. Николаев А.Г. *Распределение напряжений в цилиндрическом образце материала с двумя параллельными цилиндрическими полостями* / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик. – Х.: Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов, 2013. – Вып. 4. – С. 40-49.
11. Николаев А.Г. *Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей* / А.Г. Николаев. – К.: Доп. НАН України, 1998. – № 2. – С. 78-83.

Надійшла до редколегії 20.01.2017

Рецензент: д-р техн. наук проф. М.Ю. Ізбаш, Харківський національний університет будівництва та архітектури, Харків.

ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КРУГОВЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ

В.Ю. Мирошников

В статье приведены решения трехмерной задачи теории упругости, когда на границах параллельных цилиндрических полостей в упругом пространстве заданы перемещения. Решение получено обобщенным методом Фурье применительно к системе уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с цилиндрами. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, к которым сведена проблема, решаются методом усечения. В результате были найдены перемещения, а затем напряжения в упругом теле. Числовые результаты приведены для случая двух цилиндров.

Ключевые слова: цилиндрические полости в пространстве, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье.

SECOND BASIC PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN A SPACE WITH MULTIPLE PARALLEL CIRCULAR CYLINDRICAL POLES

V. Miroshnikov

The paper presents solutions of the three-dimensional problem of the theory of elasticity, when displacements are prescribed on the boundaries of parallel cylindrical cavities in an elastic space. The solution is obtained by the generalized Fourier method with respect to the system of Lamé equations in cylindrical coordinates associated with cylinders. Infinite systems of linear algebraic equations, to which the problem is reduced, are solved by the truncation method. As a result, displacements were found, followed by stresses in the elastic body. Numerical results are given for the case of two cylinders.

Keywords: cylindrical cavities in space, Lamé equations, generalized Fourier method.