УДК 621.396.965: 621.391.26

І.Г. Кіріллов, О.П. Довгаль, О.О. Циганкін, Я.В. Снісаренко

Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

СПОСІБ ОЦІНЮВАННЯ ВЗАЄМНОЇ КОРЕЛЯЦІЇ ПРИ МАЛІЙ НАВЧАЛЬНІЙ ВИБІРЦІ

Запропоновано спосіб оцінювання взаємної кореляції і алгоритм відшукання нормованої кореляційної послідовності (НКП) при малій навчальній вибірці, що враховує апріорну інформацію про специфіку структури (тепліцевость) кореляційної матриці (КМ). Проведено порівняльний аналіз різних способів оцінювання кореляційних властивостей багатомірного випадкового процесу по ряду статистичних параметрів. Показано, що запропонований спосіб за рахунок урахування апріорної інформації про тепліцевість КМ і використання особливої факторизації матриці, зворотної КМ, не тільки істотно точніше відомого в умовах вибірки обмеженого обсягу, а й дозволяє оцінити НКП по єдиній багатомірній вибірці.

Ключові слова: *взаємна кореляція, навчальна вибірка, нестаціонарний процес, тепліцева кореляційна матриця, узагальнена факторизація Левінсона, ітераційний алгоритм.*

Вступ

Робота більшості сучасних систем радіолокації, зв'язку, наведення, розпізнавання і ряду інших базується на основі цифрової кореляційної обробки сигналів [1–2 та ін.].

Якість завдань, що вирішується такими системами, істотно залежить від точності формованих оцінок взаємної кореляції аналізованих випадкових процесів або, в загальному випадку, оцінок кореляційних матриць багатомірних процесів.

У більшості практичних випадків такі оцінки доводиться отримувати в умовах суттєвої нестаціонарності процесів на вході систем обробки, тобто обмеженості обсягу «навчальної» вибірки, що особливо характерно для систем реального часу.

Відомо, що максимально правдоподібна оцінка кореляційної матриці (КМ) Ф багатомірного випадкового процесу

$$\mathbf{\Phi} = \left\{ \phi_{ij} \right\}_{ij=1}^{M} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^{*}}, \quad \mathbf{y} = \left\{ y_{\ell} \right\}_{\ell=1}^{M}, \qquad (1)$$

де $\mathbf{y} = \left\{ y_{\ell} \right\}_{\ell=1}^{M}$ – вектор-стовбець поточних ℓ-х значень y_{ℓ} вхідного процесу (тут і далі риса зверху і (*) – символи статистичного усереднення і ермітового спряження відповідно), може бути отримана зі відношення [3]

$$\widehat{\mathbf{\Phi}} = \frac{1}{K} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^{*}; \qquad (2, а)$$

$$\mathbf{Y} = \left\{ \mathbf{y}_{i} \right\}_{i=1}^{K} = \left\{ \mathbf{y}^{(\ell)*} \right\}_{\ell=1}^{M}; \quad \mathbf{y}_{i} = \left\{ y_{\ell}^{(i)} \right\}_{\ell=1}^{M}, \qquad (2, б)$$

де $\mathbf{Y}$ – K-мірна вибірка M-мірних у загальному випадку комплексних нормальних взаємно незалежних i-х векторів-стовпців $\mathbf{y}_{i}$ з властивостями

$$\mathbf{y}_{i} = \left\{ y_{\ell}^{(i)} \right\}_{\ell=1}^{M} \sim CN(0, \mathbf{\Phi}), \qquad (3)$$

$$\overline{\mathbf{y}_{i}} = 0, \ \overline{\mathbf{y}_{i} \cdot \mathbf{y}_{j}^{*}} = \begin{cases} \mathbf{\Phi}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \ i, j \in 1, K, \qquad (4)$$

з нульовим вектором середніх значень і КМ Ф. При цьому елементи $\ell\ell$-х векторів-рядків $\mathbf{y}^{(\ell)*} = \left\{ y_{\ell}^{(i)} \right\}_{i=1}^{K}$ нормальні та незалежні (наприклад, $y_{\ell}^{(i)} \sim CN(0,1)$).

У загальному випадку оцінка КМ (2) являє собою ермітову (симетричну в разі дійсних елементів) матрицю загального вигляду.

Очевидно, що для отримання оцінки повного рангу необхідно мінімум $K = M$ векторів. В умовах суттєвої нестаціонарності ($K < M$ аж до $K = 1$), як показано в [4], відшукання коректних оцінок $\widehat{\mathbf{\Phi}}$ стає можливим тільки при наявності апріорної інформації про специфіку КМ, наприклад персіметрії, тепліцевості. Особливий практичний інтерес представляє останній випадок, який відповідає, наприклад, наявності регулярності просторових (часових) каналів прийому в радіотехнічних системах, наслідком якої і є специфічна симетрія (тепліцевість) ермітової кореляційної матриці гаусових зовнішніх впливів на виходах цих каналів [4–7].

Така матриця повністю визначається елементами першого (останнього) стовпця (рядка), що створює передумови для підвищення «швидкодії» (принаймні, зменшення числа вибірок $\mathbf{y}_{i}$ для отримання оцінок КМ з «необхідною якістю») в порівнянні з системами з довільною структурою каналів прийому (з КМ загального виду).

У ряді статей, зокрема в [4], показано, що урахування достовірної апріорної інформації про тепліцеву структуру КМ дозволяє отримати коректні оцінки навіть по одній вибірці $\mathbf{y}_{i}$.

В літературі останніх десятиліть запропонована велика кількість способів використання резервів спрощення обчислювальних процедур, підвищення якості обробки, пов'язаних з урахуванням апріорних знань про тепліцевість КМ. В цих умовах важливі коректні і багатосторонні порівняльні дослідження цих способів.

Так в статті [8] проведено порівняльний аналіз сукупності, так званих, «прямих» і «непрямих» методів отримання тепліцевих оцінок КМ по специфічному показнику ефективності, що має сенс втрат вихідного відношення «сигнал / (завада + шум)».

У даній статті наводяться результати порівняння деяких з розглянутих в [8] методів по більш загальним, з точки зору авторів, показниками якості оцінювання взаємної кореляції випадкових процесів, а саме математичного сподівання абсолютних R_A та (або) відносних R_O відхилень оцінок $\widehat{\rho}$ від «точного» (апріорі відомого або заданого в моделі) коефіцієнта кореляції ρ і дисперсії D_ρ виду [9]

$$R_A = \left| M_\rho - \rho \right|; \quad R_O = \left| \frac{M_\rho - \rho}{\rho} \right|;$$

$$M_\rho = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} \widehat{\rho}^{(n)}; \qquad (5, а)$$

$$D_\rho = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=1}^{N} (\widehat{\rho}^{(n)} - M_\rho)^2, \qquad (5, б)$$

що отримані як результат статистичного випробування (N експериментів) в залежності від абсолютного значення ρ, об'єму K навчальної вибірки багатомірного стаціонарного випадкового процесу $\mathbf{Y}^{(n)}$ (2) ($n \in 1, N$) і розміру M векторів ($i \in 1, Ki \in 1, K$), що входять до її складу.

Мета статті – порівняльний аналіз «прямих» і «непрямих» способів оцінювання кореляційних властивостей багатомірного випадкового процесу в умовах обмеженого обсягу «навчаючої» вибірки та наявності апріорної інформації про специфіку структури (тепліцевості) кореляційної матриці.

Виклад основного матеріалу

А. Позитивно визначена ермітова КМ є тепліцевою, якщо всі елементи, що розташовані на одній діагоналі, рівні між собою [5]. Тепліцева $M \times M$ КМ (ТКМ) ($\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^* \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^*$)

$$\mathbf{\Phi} = \left\{ \phi_{ij} \right\}_{i,j=1}^{M} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1^* & \dots & r_{M-1}^* \\ r_1 & r_0 & \dots & r_{M-2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{M-1} & & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi} = \left\{ \phi_{ij} \right\}_{i,j=1}^{M} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1^* & \dots & r_{M-1}^* \\ r_1 & r_0 & \dots & r_{M-2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{M-1} & & r_1 & r_0 \end{bmatrix}; \qquad (6)$$

$$\phi_{i+1,j+1} = \phi_{ij}\phi_{i+1,j+1} = \phi_{ij}, \ i,j \in 1, Mi, j \in 1, M, \qquad (7)$$

і повністю визначається елементами ($\ell \in 0, M-1\ell \in 0, M-1$) першого (останнього) стовпця (рядка), тобто кореляційною функцією (послідовністю) $\mathbf{r} = \left\{ r_\ell \right\}_{\ell=0}^{M-1}$ рівновіддалених відліків відповідного стаціонарного процесу.

В якості найбільш поширених моделей стаціонарного вхідного процесу з нульовим середнім виступають моделі з гаусовою

$$i \in 1, M; \ s \in 1, \ ii \in 1, M; \ s \in 1, \ i \qquad (8, а)$$

та експоненціальною

$$r_\ell = r_{i-s} = \overline{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_s^*} = \sigma_п^2 \cdot \mu^{i-s} \cdot e^{j(i-s)\beta} \qquad (8, б)$$

кореляційними функціями (КФ), де $\sigma_п^2$ – дисперсія (потужність) вхідного процесу; $\mu < 1$ и β – відповідно модуль і фаза коефіцієнта взаємної кореляції $\rho = \overline{\mathbf{y}_{i+1} \cdot \mathbf{y}_i^*} / \sigma_п^2$ довільної пари його суміжних відліків.

При цьому очевидно, що нормована кореляційна послідовність дорівнює

$$\mathbf{g} = \left\{ \rho_\ell \right\}_{\ell=0}^{M-1} = \mathbf{r} / \sigma_п^2. \qquad (9)$$

У разі нерівнопотужних ($\sigma_i \neq \sigma_s$) процесів для оцінювання елементів нормованої кореляційної послідовності (НКП) можна використовувати співвідношення для розрахунку, так званого, коефіцієнту кореляції Пірсона, виду [9] (скалярне представлення для загального випадку ненульового математичного сподівання)

$$\widehat{\rho}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \left(y_i^{(k)} - M_K(\mathbf{y}_i) \right) \cdot \left(y_j^{(k)} - M_K(\mathbf{y}_j) \right)^*}{\sqrt{\sum_{k=1}^{K} \left(y_i^{(k)} - M_K(\mathbf{y}_i) \right)^2 \cdot \left(y_j^{(k)} - M_K(\mathbf{y}_j) \right)^2}}; \qquad (10, а)$$

$$M_K(\mathbf{y}_\ell) = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} y_\ell^{(k)}. \qquad (10, б)$$

Тоді тепліцева КМ (6) «нормованого» процесу має вигляд

$$\mathbf{\Phi} = \left\{ \phi_{ij} \right\}_{i,j=1}^{M} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1^* & \dots & \rho_{M-1}^* \\ \rho_1 & \rho_0 & \dots & \rho_{M-2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{M-1} & & \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Зауважимо, що в якості елементів модельної ТКМ виду (11), однозначно визначеної єдиним першим вектором-стовпцем (9) (або рядком $\mathbf{g}^*$), використовуються елементи нормованої гаусової

$$i \in 1, M;\ s \in 1, ii \in 1, M;\ s \in 1, i \quad , \qquad (12, а)$$

або експоненціальної

$$\rho_\ell = \rho_{i-s} = \overline{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_s^*} / \sigma_п^2 = \mu_1^{i-s} \cdot e^{j(i-s)\beta} \qquad (12, б)$$

кореляційної функції (послідовності). Інші «точні» моделі ТКМ можуть бути «непряме» задані параметрами авторегресійного (АР) процесу довільного p-го порядку [10], причому випадку $p = 1$ відповідає експоненціальна, а $p \to \infty$ – гаусова НКП.

В умовах (11) рівності елементів головної і побічних діагоналей КМ Ф для поліпшення оцінок ($\ell = i - s\ell = i - s$) виду (10) можна використовувати усереднення значень елементів ℓ-й діагоналі виду

$$\widehat{\rho}_\ell = \frac{1}{M-\ell}\sum_{k=1}^{M-\ell}\widehat{\phi}_{\ell+k,k}\ . \qquad (13)$$

В роботі [8] оцінка ТКМ (13) відноситься до, так званих, «прямих» методів і стверджується, що вона асимптотично незміщена і обгрунтована, проте гарантовано позитивно визначена тільки при $M = 2$. Цей факт істотно обмежує можливості її практичного використання з огляду на те, що коли оцінка КМ не є позитивно визначеною і «строго несингулярною», то вона не може бути КМ фізично реального випадкового процесу.

В ряді робіт [3–4; 8], присвячених теоретичному обгрунтуванню і опису результатів практичного використання математичного апарату на основі узагальненої факторизації Левінсона, структурно-алгоритмічною основою якого є, так звані, адаптивні решітчасті фільтри (АРФ), наводяться особливості усереднення, аналогічного (13), але позбавленого приведеного вище недоліку. Мова йде про усереднення параметрів АРФ, а саме коефіцієнтів нормування ($i \in 1, Mi \in 1, M$; $\ell \in 1, M+1-i\ell \in 1, M+1-i$) і часткових кореляцій ($i \in 2, Mi \in 2, M$), апріорна рівність яких також визначається специфікою КМ. Зауважимо, що для ТКМ врахування такої специфіки призводить до рівностей $c_i = c_i(\ell)$ и $\alpha_i = \alpha_i(\ell)$. Методи отримання оцінок ($\ell \in 0, M-1\ell \in 0, M-1$) або функцій від них, засновані на формуванні «проміжних» параметрів, зокрема c_i і α_i відносяться до числа «непрямих».

Використовуючи співвідношення для розрахунку параметрів АРФ на основі оцінок Берга [7, 11] по, так званому, «кореню» з ТКМ, наприклад, $\mathbf{Y}$ (2), що приведені в [8], і рівність $\alpha_2 = -\widehat{\rho}_1$, що обгрунтована в [3], можна отримати алгоритм «непрямої» оцінки «основного» коефіцієнта кореляції $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}_1$. При відомій K-мірній класифікованій вибірці $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^{K} = \{\mathbf{y}^{(\ell)*}\}_{\ell=1}^{M}$ (2) M-мірних комплексних нормальних взаємно незалежних векторів з властивостями (3), (4) з тепліцевою КМ виду (6), (11) співвідношення для розрахунку коефіцієнта кореляції $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}_1$ мають наступний вигляд

$$c_1 = 1\Big/\sqrt{\widehat{\phi}_{11}}\ , \quad \widehat{\phi}_{11} = \widehat{\rho}_0 = \frac{g(1) + 2\cdot\sum_{\ell=2}^{M-1} g(\ell) + g(M)}{2\cdot(M-1)}\ ; \quad (14, а)$$

$$g(\ell) = \mathbf{y}^{(\ell)*}\cdot\mathbf{y}^{(\ell)}\ ; \quad \ell \in 1, M\ ; \qquad (14, б)$$

$$\widehat{\rho}_1 = -\alpha_2 = \frac{\sum_{\ell=1}^{M-1}\mathbf{p}_1^*(\ell+1)\cdot\mathbf{q}_1(\ell)}{M-1}\ , \quad \widehat{\rho} = \widehat{\rho}_1\ ; \quad (14, в)$$

$$\mathbf{p}_1^*(\ell) = \mathbf{q}_1^*(\ell) = c_1\cdot\mathbf{y}^{(\ell)*},\quad \ell \in 1, M\ , \qquad (14, г)$$

де $\mathbf{y}^{(\ell)*}$ – як і раніше K-мірний ℓ-й рядок «кореню» $\mathbf{Y}$ (2) ТКМ (6), (11).

Важливою особливістю (14) (фрагмент алгоритму налаштування АРФ по «кореню» ТКМ [4]) є можливість оцінити $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}_1$ по єдиній M-мірній корельованій вибірці ($i = K = 1i = K = 1$), що принципово неможливо, наприклад, по (10). Необхідність отримання таких оцінок виникає зокрема в умовах суттєвої нестаціонарності процесу $\mathbf{Y}$, при якій використання усереднення по $K > 1$ призводить до суттєвих помилок оцінювання коефіцієнта взаємної кореляції. Алгоритм (14) в цьому випадку (, $y_\ell^{(i)} = y_\ell\, y_\ell^{(i)} = y_\ell$) набуває вигляду

$$c_1 = 1\Bigg/\sqrt{\frac{y_1^2 + 2\cdot\sum_{\ell=2}^{M-1} y_\ell^2 + y_M^2}{2\cdot(M-1)}}\ ; \qquad (15, а)$$

$$q_\ell = c_1\cdot y_\ell\ ; \quad \ell \in 1, M\ ; \qquad (15, б)$$

$$\widehat{\rho} = \widehat{\rho}_1 = \frac{\sum_{\ell=1}^{M-1} q_{\ell+1}\cdot q_\ell^*}{M-1}\ . \qquad (15, в)$$

Враховуючи особливості факторизованого представлення в АРФ матриці $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi}^{-1}$, що зворотня кореляційної та має розкладання $\mathbf{\Psi} = \mathbf{H}^*\cdot\mathbf{H} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{N}^*$, де $\mathbf{N}$ і $\mathbf{H}$ – нижні трикутні матриці [3, 4], неважко показати, що нормовану кореляційну послідовність $\widehat{\mathbf{g}} = \{\widehat{\rho}_\ell\}_{\ell=0}^{M-1}$ (9) можна «відновити» (оцінити) за параметрами АРФ ($i \in 1, Mi \in 1, M$) і ($i \in 2, Mi \in 2, M$), попередньо сформованим, наприклад, по $\mathbf{Y}$ (2). Ітераційний алгоритм такого оцінювання полягає в реалізації співвідношень

$$\rho_{i-1} = b_i\cdot p_i^{(i)}\ ;\ b_i = -\left(\prod_{k=1}^{i} c_k\right)^{-1},\ (\rho_0 = 1\rho_0 = 1)\ , \quad (16)$$

де $p_i^{(i)}$ – останній елемент вектору $\mathbf{p}^{(i)}$ виду:

$$\mathbf{p}^{(i)} = \left\{ p_\ell^{(i)} \right\}_{\ell=1}^{i} = \mathbf{H} \cdot \breve{\mathbf{g}}^{(i)}, \quad \breve{\mathbf{g}}^{(i)} = \left[(\mathbf{g}^{(i-1)})^T \ \ 0 \right]^T, \qquad (17)$$

а вектор-стовбець $\breve{\mathbf{g}}^{(i)}$ представляє собою НКП $\mathbf{g}^{(i-1)} = \left\{ \rho_\ell \right\}_{\ell=0}^{i-2}$ (9), доповнену нулем, та ілюструється на рис. 1.

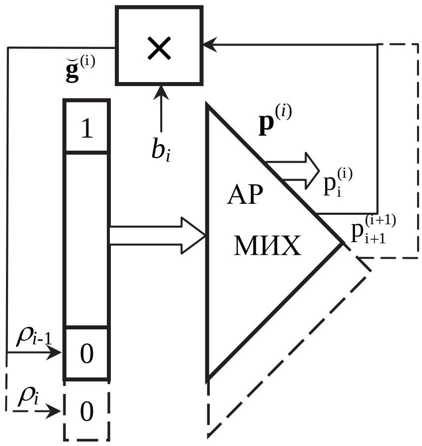

Рис. 1. Алгоритм оцінювання НКП (9)

На рисунку «трикутником» показаний «відбілюючий» АРФ з матричної імпульсною характеристикою (МІХ) $\mathbf{H}$, варіанти факторизованого представлення якої приведені в [3], а способи оцінювання параметрів АРФ в [4]. Видно, що для отримання чергового шуканого коефіцієнта кореляції ρ_{i-1} необхідно «прогнати» вектор-стовбець $\breve{\mathbf{g}}^{(i)}$ через налаштований АРФ. Максимальне число ітерацій дорівнює при цьому $(M-1)$.

Б. Ефективність запропонованих алгоритмів «непрямого» оцінювання коефіцієнта взаємної кореляції (14), (15) та відновлення НКП (16) оцінимо за результатами статистичного випробування з $N \geq 1000$ експериментів в залежності від абсолютного значення ρ, об'єму ($K \in 2, 20K \in 2, 20$) навчальної вибірки багатомірного (M - мірного) стаціонарного випадкового процесу $\mathbf{Y}^{(n)}$ (2) ($n \in 1, N$) і розміру ($M \in 7, 50M \in 7, 50$) векторів ($i \in 1, Ki \in 1, K$), що входять до її складу, шляхом порівняння з відомим «прямим» способом на основі (10) з усередненням (13). В якості модельного процесу $\mathbf{Y}^{(n)}$ (2) використовувалися вибірки корельованих відліків не тільки з «традиційними» експоненціальною та гаусовою НКП (8), а й АР-процесів довільного p -го порядку [10].

Нижче наводиться узагальнений аналіз отриманих результатів порівняння оцінок, $R_O R_O$ і D_ρ (5), отриманих запропонованим (I) та «класичним» (II) способами пошуку взаємної кореляції.

На рис.2а, б наведені сімейства залежностей абсолютних значень R_A і D_ρ от обсягу навчальної вибірки K малих ($K < 20$) та «гранично малих» ($K = 2...6$) значень (для $K > 20$ ефективність алгоритмів, що аналізуються, практично однакова), а рис. 2, в–г в аналогічних умовах ілюструє «виграші» δR и δD запропонованого способу (I)

$$\delta R = \frac{R_A^{(II)}}{R_A^{(I)}}; \qquad \delta D = \frac{D_\rho^{(II)}}{D_\rho^{(I)}}. \qquad (18)$$

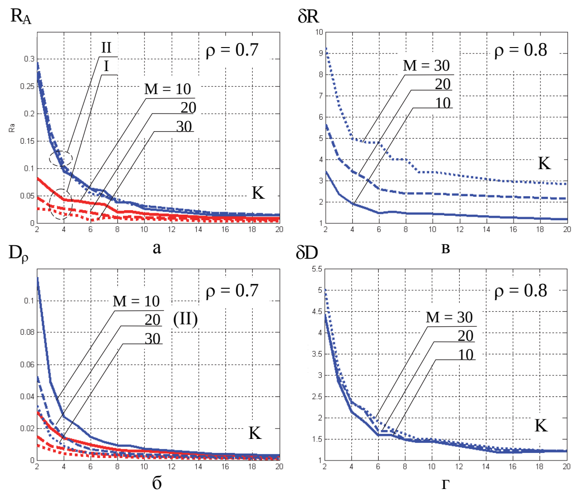

Рис. 2. Абсолютні помилки оцінювання взаємної кореляції ρ і дисперсії оцінок

Видно (рис. 2, а, темні криві), що при «гранично малих» K спосіб (10) практично непридатний через «великі» помилки оцінювання значення ρ навіть при досить великих модулях коефіцієнта кореляції (наприклад, при $|\rho| = 0,7$ відхилення оцінок від «справжніх» значень можуть досягати 0,3). Причому ці «помилки» для методу (10) не вдається зменшити за рахунок збільшення M, усереднюючи по (13). Таке усереднення зі зростанням M дозволяє лише зменшити дисперсію оцінок $R_A^{(II)}$.

Істотно менші помилки оцінювання ρ (рис. 2, а, світлі криві) та дисперсію оцінок (рис. 2, б, світлі криві) забезпечує запропонований алгоритм (14). Виграш δR (18), наприклад, для $|\rho| = 0,8$ (рис. 2, в) при «гранично малих» K досягає від 2 до 9,5 раз, причому зі зростанням M і зменшенням модулю ρ він зростає і може досягати 15…17 разів. Виграш δD (18) (рис. 2, г) також зростає зі зменшенням K, досягає 4.5…5 разів, але при цьому практично не залежить від значення M.

В умовах «істотно нестаціонарних» процесів оцінювати взаємну кореляцію ρ доцільно тільки по одній MM -мірній вибірці $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}$ (3). Алгоритм (14) при цьому спрощується та набуває вигляду (15). Його можливості проілюстровані на рис. 3 залежностями R_O і D_ρ (5) від обраних для дослідження значень $M = 7, 10, 20, 30, 40, 50$ («биття» відносної помилки R_O оцінки $\hat{\rho}$ при $|\rho| = 0.2$ обумовлені низькою «методичною» точністю обчислень $\hat{\rho}$ при малих значеннях модуля, про що свідчать і досить великі значення оціночної дисперсії D_ρ).

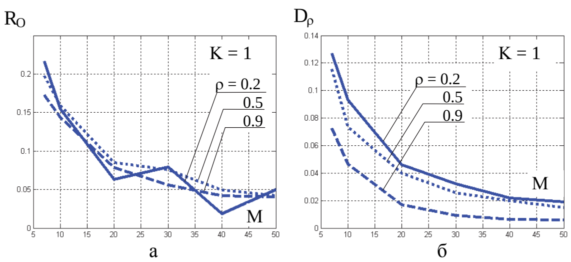

Рис. 3. Відносні помилки оцінювання взаємної кореляції ρ і дисперсії оцінок

Видно, що для широкого діапазону значень модулю $(0,2 \le |\rho| 0,2 \le |\rho|)$ підвищення точності оцінок $\hat{\rho}$ запропонованим способом можливо за рахунок збільшення M. Так, зокрема, помилка $R_O \le 0,05$, тобто менше 5%, забезпечується лише при $M \ge 35$.

Зауважимо, що співвідношення (10) в умовах $K = 1$ не можна застосувати.

Вище було показано, що «непрямим» методом на основі АРФ (по заздалегідь оціненим параметрам c_i і α_i адаптивного решітчастого фільтра) можливо «відновлення» не тільки коефіцієнта $\rho = \rho_1$, але і сукупності елементів $(i \in 2, 3, ...i \in 2, 3, ...)$ нормованої кореляційної послідовності (функції). На основі отриманих результатів (рис. 2–3) і результатів, наведених в [12], можна припустити, що точність їх «відновлення» істотно залежить від абсолютного значення $|\rho_i|$.

«Якість» оцінювання елементів НКП g (9) по алгоритму (16) для випадку $M = 11$-мірного АР-процесу порядку $p = 10$ с «базовим» коефіцієнтом кореляції $\rho = \rho_1 = 0.9$ ілюструється на рис. 4.

З рисунка, видно, що при відносно малих обсягах $(K \le 50K \le 50)$ навчальної M-мірної вибірки стаціонарного модельного АР-процесу («точні» значення ілюструються потовщеною темною суцільною кривою) виявляється недоцільним оцінювання елементів ρ_i НКП g (9) для $i > 4...5$ (відповідають ступеням 5…6 АРФ) зважаючи на значні помилки, що породжені перш за все малим абсолютним значенням модуля взаємної кореляції. Цей результат є ще одним свідченням необхідності відмови в умовах малої вибірки $(K \le 10)$ від оцінювання взаємної кореляції малих абсолютних значень $(|\rho_i| \le 0.3...0.4)$ як «прямими», так і «непрямими» методами, що обґрунтовано, наприклад, в [12].

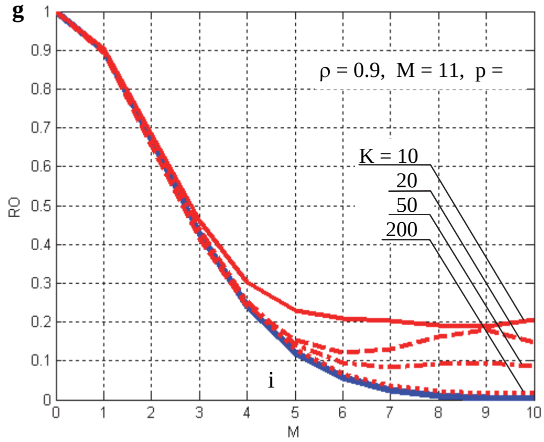

Рис. 4. «Точна »і оцінні НКП g (9)

Зокрема в [4] описаний простий спосіб такої відмови, що складається в припиненні оцінювання параметрів АРФ у відповідних ступенях $(i \ge 5)$, «призначення» в них $\alpha_i(\ell) = 0$ и $c_i(\ell) = 1$, тобто «визнанні» факту відсутності кореляції у вхідних відліках.

Такий підхід в ряді практичних випадків, що, наприклад, наведені в [3–4; 8; 10; 12], дозволяє не тільки знизити обчислювальні витрати, але і підвищити якість обробки.

У той же час оцінки $\hat{\rho}_i$ для $i = 1...3$ практично збігаються з «точними» $\rho_i > 0,4$ і погіршуються лише при $K \le 10$ для абсолютних значень $|\rho_i| < 0,3$, що було проілюстровано вище.

Висновки

У статті запропоновано спосіб оцінювання взаємної кореляції і алгоритм відшукання нормованої кореляційної послідовності (НКП) при малій навчальній вибірці на основі факторизованого представлення Левінсона матриці, зворотньої тепліцевій кореляційній матриці (ТКМ), яке реалізується в адаптивних решітчастих фільтрах (АРФ).

Проведений порівняльний аналіз показує, що запропонований спосіб оцінювання взаємної кореляції за рахунок урахування апріорної інформації про тепліцевість КМ аналізованих багатомірних процесів не тільки суттєво точніше відомого в умовах вибірки обмеженого обсягу, а й дозволяє оцінити НКП по єдиній M-мірній вибірці.

Показано, що число ітерацій запропонованого алгоритму, тобто число оцінюваних елементів НКП, доцільно обмежувати за результатом аналізу їх абсолютних значень зважаючи на значні помилки при малих кореляціях.

Список літератури

1. Пиза Д.М. Метод формирования классифицированной обучающей выборки для автокомпенсатора помех при время-пространственной фильтрации сигналов / Д.М. Пиза, В.Н. Лаврентьев, Д.С. Семенов // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2016. – № 3. – С. 18-22.

2. Озеров С.В. Применение MIMO-технологии на хаотических несущих для разделения абонентов в многоканальных системах военной связи / С.В. Озеров // Системи озброєння і військова техніка. – 2013. – № 1(33). – С. 42-44. решетчатые фильтры. Часть I. Теория решетчатых структур / Д.И. Леховицкий, Д.С. Рачков, А.В. Семеняка, В.П. Рябуха, Д.В. Атманский // Прикладная радиоэлектроника. – Х.: ХНУРЭ, 2011. – Том 10, № 4. – С. 380-404.

3. Адаптивные решетчатые фильтры. Часть II. Алгоритмы настройки АРФ / Д.И. Леховицкий, Д.С. Рачков, А.В. Семеняка, В.П. Рябуха, Д.В. Атманский // Прикладная радиоэлектроника. – Х.: ХНУРЭ, 2011. – Том 10, № 4. – С. 405-418.

4. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

5. Берг Дж.П. Оценивание ковариационных матриц с заданной структурой / Дж.П. Берг, Д.Г. Люнберг, Д.Л. Венгер // ТИИЭР. – 1982. – Том 70, № 9. – С. 63-77.

6. Фридландер Б. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных / Б. Фридландер // ТИИЭР. – 1982. – Том 70, № 8. – С. 54-97.

7. Семеняка А.В. О методах оценивания теплицевых корреляционных матриц в задачах адаптивной пространственно-временной обработки сигналов / А.В. Семеняка, Д.С. Рачков, Д.И. Леховицкий // Прикладная радиоэлектроника. – Х.: ХНУРЭ, 2011. – Том 10, №4. – С. 441-447.

8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов – 10-е издание / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2004. – 479 с.

9. Леховицкий Д.И. Моделирование пассивных помех импульсным РЛС на основе процессов авторегрессии произвольного порядка / Д.И. Леховицкий, И.Г. Кириллов // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2008. – Вип.3 (70). – С. 90-101.

10. Burg I.P. A New Analysis Technique for Time Series Data / I.P. Burg. – NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics. – August, 1968.

11. Кириллов И.Г. Статистический анализ максимально правдоподобных оценок частных коэффициентов корреляции адаптивных решетчатых фильтров / И.Г. Кириллов, М.Н. Руденко, Г.В. Чаплий, Н.Д. Бережная, Л.А. Егорова // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2013. – Вип.6 (113). – С. 77-85.

Надійшла до редколегії 4.01.22017

Рецензент: д-р техн. наук проф. В.М. Більчук, Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І.Кожедуба, Харків

СПОСОБ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ МАЛОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКЕ

И.Г. Кириллов, А.П. Довгаль, А.А. Циганкин, Я.В. Снисаренко

Предложен способ оценки взаимной корреляции и алгоритм отыскания нормированной корреляционной последовательности (НКП) при малой обучающей выборке, учитывающий априорную информацию о специфике структуры (теплицевость) корреляционной матрицы (КМ). Проведен сравнительный анализ различных способов оценки корреляционных свойств многомерного случайного процесса по ряду статистических параметров. Показано, что предложенный способ за счет учета априорной информации о теплицевость КМ и использования особой факторизации матрицы, обратной КМ, не только существенно точнее известного в условиях выборки ограниченного объема, но и позволяет оценить НКУ по единой многомерной выборке.

Ключевые слова: *взаимная корреляция, обучающая выборка, нестационарный процесс, теплицева корреляционная матрица, обобщенная факторизация Левинсона, итерационный алгоритм.*

THE METHOD OF MUTUAL CORRELATION EVALUATING WITH A SMALL TRAINING SAMPLE

I. Kirillov, A. Dovgal, A. Cygankin, Ya. Snisarenko

The method of mutual correlation estimation and the algorithm of finding the normalized correlation sequence (NCS) with a small training sample, that takes into account a priori information about the specific of correlation matrix (CM) structure (toeplitz structure), are proposed. A comparative analysis of different methods of estimation the correlation properties of multidimensional random process in a number of statistical parameters is done. It is shown that the proposed method by taking into account a priori information about toeplitz structure of CM and using a special matrix factorization, inverse CM, is not only significantly more accurate than the known one in conditions of limited volume samples, but also allows to estimate the NCS by single multidimensional sample.

Keywords: *cross correlation, training sample, nonstationary process, Toeplitz correlation matrix, generalized Levinson factorization, iterative algorithm.*