Системи обробки інформації, 2017, випуск 4 (150) **ISSN 1681-7710**

УДК 625.032 DOI: 10.30748/soi.2017.150.09

І.С. Табакова

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків

СКЛАДАННЯ ЛАТИНСЬКИХ КВАДРАТІВ ДЛЯ ЗАСТОСУВАННЯ У ПЛАНУВАННІ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

В роботі наведено спосіб побудови латинського квадрата для стратегії вибору сполучення факторів у процесі складання раціональних планів експериментів.

Ключові слова: *проведення експериментів, латинський квадрат, сполучення факторів, план експериментів.*

Вступ

Актуальність теми. У реальних задачах, пов'язаних із проведенням експериментів, необхідно спланувати сполучення різних факторів так, щоб при мінімальному числі дослідів найбільше рівномірно охопити всю площу таблиці можливих сполучень факторів, які впливають на досліджуваний процес. Проведення випадковим чином обраних експериментів позбавляє дослідника можливості одержати достовірну закономірність, яка адекватно враховує вплив всіх досліджуваних факторів одночасно [1]. Тому актуальною буде тема спланування сполучення різних факторів, орієнтована на алгоритмічну реалізацію в комп'ютерних програмах.

Огляд відомих досліджень. Існує багато стратегій вибору сполучення факторів для складання раціональних планів експериментів. Для комп'ютерних реалізацій інтерес викликають методи, засновані на використанні латинських квадратів [2–3]. Нагадаємо, що латинський квадрат – це таблиця чисел, сума яких однакова для кожного рядка й кожного стовпця, а також для двох головних діагоналей цієї таблиці. У роботі [2] розглянутий так званий індійський метод побудови латинського квадрату непарного порядку. Суть методу пояснимо на прикладі [4]. Задамо на координатних клітках площини основний квадрат розміром 9×9. Виберемо 9 діагональних рядів клітин так, щоб середня з 9 клітин кожного ряду належала спадній діагоналі основного квадрата (рис. 1). Далі пронумеруємо клітини знизу нагору, починаючи з верхнього діагонального ряду. У результаті нумерації частина клітин основного квадрата виявиться заповненою, а ті, що залишилися, необхідно заповнити числами, розташованими на трикутних виступах, переміщаючи ці виступи «паралельно» самим собі усередину квадрата. На рис. 2 наведено готовий латинський квадрат.

.								9								
							8		18							
						7		17		27						
					6		16		26		36					
				5		15		25		35		45				
			4		14		24		34		44		54			
		3		13		23		33		43		53		63		
	2		12		22		32		42		52		62		72	
1		11		21		31		41		51		61		71		81
	10		20		30		40		50		60		70		80	
		19		29		39		49		59		69		79		
			28		38		48		58		68		78			
				37		47		57		67		77				
					46		56		66		76					
						55		65		75						
							64		74							
								73								

Рис. 1. До побудови латинського квадрата

5	46	15	56	25	66	35	76	45
54	14	55	24	65	34	75	44	4
13	63	23	64	33	74	43	3	53
62	22	72	32	73	42	2	52	12
21	71	31	81	41	1	51	11	61
70	30	80	40	9	50	10	60	20
29	79	39	8	49	18	59	19	69
78	38	7	48	17	58	27	68	28
37	6	47	16	57	26	67	36	77

Рис. 2. Латинський квадрат

Недолік розглянутого методу полягає у тому, що в отриманому латинському квадраті сусідні за значенням числа не будуть розподілені по полю квадрата «рівномірно», а будуть згруповані на його діагональних елементах.

При цьому неминуче будуть рекомендовані близькі за змістом досліди. Крім того, індійським методом не можна утворювати латинські квадрати парного порядку.

Постановка завдання. Навести спосіб побудови латинського квадрата для стратегії вибору сполучення факторів в процесі складання раціональних планів експериментів, позбавлений зазначеного вище недоліку.

Основна частина

Розглянемо процес складання латинського квадрата парного порядку $n = 2m$ [2; 3]. Пронумеруємо (ліворуч, праворуч і зверху донизу) клітини основного квадрата числами від 1 до n^2. У цьому випадку сума чисел, розташованих на кожній з головних діагоналей квадрата, дорівнює:

$$\Sigma = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2} = m\left(4m^2+1\right).$$

До значення Σ спробуємо привести й суми чисел, що належать відповідним рядам і стовпцям квадрата. Розглянемо p-й горизонтальний ряд квадрата, утворений числами $(p-1)n+1$, $(p-1)n+2$, …, pn. Сума цих чисел дорівнює:

$$S_p = \frac{n(n+1)}{2} + (p-1)n^2 = m(2m+1) + 4m^2(p-1).$$

Якщо p замінити на n–p+1, то одержимо номер горизонтального ряду, що розташований симетрично щодо середньої лінії квадрата. Маємо:

$$S_{n-p+1} = m(2m+1) + 4m^2(2m-p).$$

Справедливе співвідношення:

$$S_p + S_{n-p+1} = 2\Sigma,$$

з якого слідує, що сума чисел одного із двох симетричних рядів настільки менше величини Σ, наскільки сума чисел іншого ряду більше цієї величини [2–3]. Розглянемо різницю $t_p = (n-2p+1)n$ двох чисел $(p-1)n+i$ та $(n-p)n+i$, розташованих у відповідних один одному клітинах двох симетричних горизонтальних рядів. Ця різниця не залежить від i, тому вона та сама для всіх клітин. Маємо

$$S_{n-p+1} - S_p = nt_p,$$

звідки одержуємо $S_{n-p+1} - mt_p = S_p + mt_p$.

З останнього слідує, якщо в кожній парі симетричних горизонтальних рядів вибрати по m пар взаємно симетричних клітин і переставити числа кожної пари, то можна одержати квадрат, для якого значення Σ буде сумою чисел для кожного з горизонтальних рядів. Аналогічні міркування мають місце й для вертикальних рядів. При цьому, так само як і в попередньому випадку, може порушитися значення суми для чисел, розташованих на головних діагоналях квадрата [3].

Отже, відповідними перестановками симетричних клітин завжди можна досягти того, що значенню Σ будуть дорівнювати суми чисел, розташовані або на горизонтальних, або на вертикальних рядах. Скомбінуємо ці перестановки так, щоб величина Σ досягалася одночасно як для горизонтальних, так і для вертикальних рядів.

Для цього розглянемо один із чотирьох квадратів порядку m, на які осі симетрії розбивають основний квадрат порядку n. Для визначеності беремо лівий верхній кутовий квадрат. Нехай $m = 2k$. Виділимо (наприклад, рамками) у цьому квадраті систему клітин так, щоб у його кожному горизонтальному або вертикальному ряді перебували точно k штук клітин. Для визначеності, нехай $n = 8$ і, отже, $m = 4$, $k = 2$. На рис. 3 наведений кутовий квадрат, у якого можлива система клітин позначена рамками.

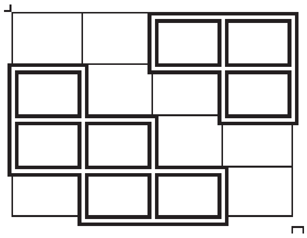

Рис. 3. Кутовий квадрат

«Накладемо» систему клітин на числа, розташовані у верхній лівій чверті основного квадрата. Для кожної з відзначених клітин необхідно знайти клітини, симетричні їй щодо центра й обох середніх ліній, і відзначити ці клітини теж прямокутником. Далі необхідно переставити чисела, розташовані у відзначених центрально-симетричних клітках. Інші числа варто залишити на місці.

Як приклад побудуємо латинський квадрат 8-го порядку (рис. 4).

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Рис. 4. До побудови латинського квадрата 8-го порядку

З огляду на систему клітин, відзначених на квадраті четвертого порядку, виділимо клітини основного квадрата так (рис. 5).

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Рис. 5. Виділені клітиниосновного квадрата

Для одержання латинського квадрата (рис. 6) слід виконати взаємну заміну центрально-симетричних клітин, відзначених прямокутниками.

1	2	62	61	60	59	7	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	47	19	20	21	22	42	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	23	43	44	45	46	18	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	58	6	5	4	3	63	64

Рис. 6. Побудований латинський квадрат

Побудову латинського магічного квадрата можна здійснювати за допомогою спеціально складеної програми у середовищі Maple.

```
LS := proc(L,n::posint)
local i,j,M,rng;
   rng := 0..n-1;
   M := (n^3+n)/2;
   [seq(s=M, s in [NULL
  , seq(add(L[i,j], j=rng), i=rng)
  , seq(add(L[i,j], i=rng), j=rng)
  , seq(add(L[i,modp(i+j,n)],i=rng), j=rng)
  , seq(add(L[i,modp(j-i-1,n)],i=rng), j=rng) ])];
end proc:
to 1 do
   n := 4:
   eqs := LS(L,n);
   sol := solve(eqs);
   vals := map(rhs,sol);
   vars := convert(indets(vals),'list');
end do:
 all := {seq(1..n^2)}:
P := combinat:-permute(convert(all,'list'),nops(vars)):
found := false:
for p in P do
   eqs := Equate(vars,p);
   if subs(eqs, vals) = all then
      found := true;
      break;
   end if;
end do:
if found=true then
M := subs(sol,eqs, Matrix(n,n,(i,j)  -> L[i-1,j-1]));
end if;
```

На рис. 7 наведено результат виконання програми.

$$M := \begin{bmatrix} 3 & 16 & 9 & 6 \\ 10 & 5 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 14 & 1 \\ 13 & 2 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Рис. 7. Результат виконання складеної програми

Висновки

Розглянутим способом можна утворювати латинські квадрати парного і непарного порядку і застосовувати в алгоритмах раціонального планування експериментів.

Список літератури

1. Ляшков В.И. Инженерный эксперимент: Учеб. пособие / В.И. Ляшков. - Тамбов : ТГТУ, 2014. - 81 с.

2. Протодьяконов М.М. Методика рационального планирования экспериментов / М.М. Протодьяконов, Р.И. Тедер. - М. : Наука, 1970. – 76 с.

3. Постников М.М. Магические квадраты / М.М. Постников. - М. : Наука, 1964. - 84 с.

Надійшла до редколегії 15.05.2017

Рецензент: д-р техн. наук проф. М.І. Сидоренко, Інститут радіофізики та електроніки НАН України, Харків.

СОСТАВЛЕНИЕ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В ПЛАНИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

И.С. Табакова

В работе приведен способ построения латинского квадрата для стратегии выбора сочетания факторов в процессе составления рациональных планов экспериментов.

Ключевые слова: *проведение экспериментов, латинский квадрат, сочетание факторов, план экспериментов.*

COMPOSITION OF LATIN SQUARE FOR APPLICATION IN PLANNING EXPERIMENTS

I. Tabakova

The method of constructing a Latin square for the strategy of choosing a combination of factors in the process of drawing up rational plans for experiments is presented.

Keywords: *the conduct of experiments, the Latin square, a combination of factors, the plan of experiments.*