УДК 517.8; 658.012

В.М. Клименко, Б.О. Дем'янчук

Військовий інститут Одеського національного політехнічного університету, Одеса

СТАТИСТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦІНКИ ІМОВІРНОСТІ ДОСЯГНЕННЯ МЕТИ БОЙОВОЇ ПРОТИДІЇ

Запропонована модель для оцінки методом максимальної правдоподібності прогнозних значень параметрів тренда зміни у часі імовірності досягнення мети бойової протидії, який адекватно описує результати процесу взаємного результуючого вогневого впливу протидіючих сторін.

Ключові слова: *статистична модель, імовірність досягнення мети бойової протидії, різниця інтенсивностей впливу сторін, метод прогнозування.*

Вступ

Широко відомі моделі бойової протидії (статистичні, імовірнісні, математичні, ігрові), наприклад, Сааті, Вентцель, Ланчестера, Неймана і Моргенштерна [1 – 4].

Вони мають загальну суттєву особливість – не дозволяють отримати узагальнені оцінки ходу та результату бойової протидії сторін, які характеризуються величиною імовірності досягнення мети протидії і прогнозувати динаміку зміни цього показника у часі в залежності від різниці інтенсивностей вогневого впливу кожної з сторін.

Метою статті є обговорення методу побудови імовірнісної моделі тренду процесу бойової протидії сторін, більш адекватної ніж відомі, і методу максимальної правдоподібності для прогнозування параметрів цього тренду по обмеженій сукупності даних на початковому етапі, тобто на ретроспективній ділянці часу спостереження процесу протидії.

Основна частина

Адекватність та практична застосовність моделей, у порівнянні з відомими, повинні засновуватись на об'єктивному обліку узагальнених факторів, сприяючих та факторів, що перешкоджають досягненню мети, діючих одночасно.

У якості імовірності досягнення мети бойової протидії доцільно обрати, наприклад: відносне значення глибини смуги, що обороняється; відносне значення заданого рівня глибини просування військ у наступі; відносне значення величини збереженого бойового потенціалу військ у контрнаступі і т.п.

Значення таких величин, які спостерігаються у дискретні моменти часу на початку бою, є вихідною інформацією для оцінки параметрів тренда, що описує очікувану динаміку зміни імовірності досягнення мети протидії у часі.

Для побудови імовірнісної моделі введемо позначення: $\gamma = (\gamma_1 - \gamma_2)$ – постійна у часі (позитивна або негативна) різність інтенсивностей впливу 1-ї і 2-ї сторін, наприклад, яка дорівнює кількості вогневих впливів в одиницю часу; $B(t)$– імовірність досягнення мети бойової протидії 1-ю стороною, яка змінюється у часі; $t = t_0$ – час досягнення деякого заданого рівня імовірності досягнення мети, наприклад, рівня, що дорівнює $B(t = t_0) = 0{,}5$; $[1 - B(t)]$ імовірність недосягнення мети бойової протидії 1-ю стороною, яка чисельно дорівнює імовірності досягнення мети протидії 2-ї сторони. Зрозуміло, що імовірності $B(t)$ і $[1 - B(t)]$ описують собою повну групу подій, тому їх сума завжди дорівнює одиниці.

Зміна у часі імовірності $B(t)$ залежить від факторів, які сприяють і факторів, які перешкоджають її зростанню, діючих одночасно. Цей процес сумісного впливу протилежно спрямованих факторів на швидкість зростання імовірності досягнення мети протидії 1-ї сторони відобразимо з урахуванням коефіцієнта пропорційності γ, що дорівнює різниці інтенсивностей впливу сторін, у вигляді диференційного рівняння

$$\frac{dB}{dt} = \gamma B(1 - B) . \qquad (1)$$

Рішення рівняння (1) при початкових умовах $B(t = t_0) = 0{,}5$ дає тренд, що описує у загальному вигляді динаміку зміни у часі імовірності досягнення мети бойової протидії у вигляді (рис. 1, 2)

$$B(t) = \{1 + \exp[-\gamma(t - t_0)]\}^{-1} . \qquad (2)$$

Помітимо, що отримана імовірність залежить лише від двох параметрів: різниці інтенсивностей $\gamma = (\gamma_1 - \gamma_2)$ фактичного, деякого узагальненого взаємного впливу кожної з сторін і часу t_0 досягнення половинного рівня імовірності B.

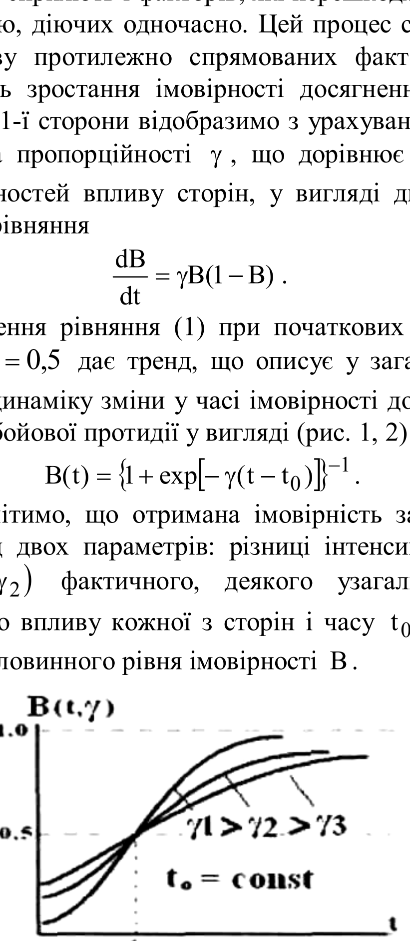

Рис. 1. Зміна імовірності досягнення мети бойової протидії сторін при різних інтенсивностях γ взаємного впливу сторін.

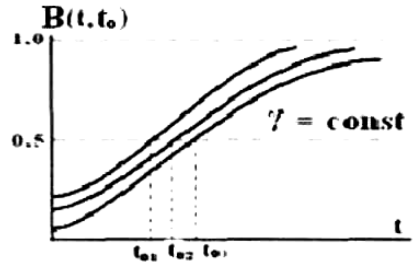

Рис. 2. Зміна імовірності досягнення мети бойової протидії при різних значеннях часу t_0 досягнення рівня імовірності, що дорівнює B = 0,5

У випадку, якщо для деякого довільно узятого моменту t_0 відомо значення імовірності, відмінне від рівня 0,5 і рівне B_0, то залежність (2) приймає більш складний вигляд

$$B(t)=\left\{1+(B_0^{-1}-1)\exp[-\gamma(t-t_0)]\right\}^{-1}. \qquad (3)$$

Визначивши вигляд імовірнісного типового тренду моделі бойової протидії, більш адекватно ніж за допомогою відомих моделей, який відображає процес безкомпромісної бойової протидії сторін, перейдемо до викладення методу прогнозування (оцінки параметрів) тренда (2) по обмеженій сукупності даних $B(t_i), i=1,...,m,$ які отримані експериментально у дискретні моменти часу.

Оптимальні оцінки $(t_{0,5})^*$ і γ^* без вживання спеціальних заходів для лінеаризації тренда (2) знайти не вдається. Тому будемо шукати їх у два етапи.

Перш за все, отримаємо опорні значення $(t_{0,5})_0$ і γ_0 по двох значеннях функції (2), наприклад, для відомих і найбільш віддалених (на експериментальному інтервалі) значень аргументу $t=t_1$ і $t=t_m$.

При цьому отримаємо систему рівнянь у вигляді

$$B_1=\left\{1+\exp\left[-\gamma_0(t_1-t_{0,5})\right]\right\}^{-1};$$
$$B_m=\left\{1+\exp\left[-\gamma_0(t_m-t_{0,5})\right]\right\}^{-1}.$$

Рішення системи дає опірні параметри:

$$\gamma_0=\frac{\ln(1/B_1\text{-}1)\text{-}\ln(1/B_m\text{-}1)}{(t_m\text{-}t_1)};$$
$$(t_{0,5})_0=\frac{t_m\ln(1/B_1-1)-t_1\ln(1/B_m-1)}{\ln(1/B_1-1)-\ln(1/B_m-1)}. \qquad (4)$$

Для знаходження оцінок $t_{0,5}$ і γ, наприклад, методом максимальної правдоподібності, з урахуванням їх опірних значень (4) і всіх відомих значень функції B(t) на інтервалі $[t=0, t=t_m]$, причому відомих з погрішностями $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m$, введемо позначення:

$$d_1=(t_{0,5})_0+\Delta(t_{0,5})=d_{01}+\Delta d_1;$$
$$d_2=\gamma_0+\Delta\gamma=d_{02}+\Delta d_2. \qquad (5)$$

Розкладемо B(t) згідно (2) у ряд Тейлора за параметрами d1 і d2 навколо вектору $d_0^T=(d_{01},d_{02})$, обмежуючись першими членами розкладання. При цьому для $t=t_k$, $k=1,...,m$ отримаємо значення k-ї дискрети у вигляді

$$B(t_k)=B_{0,0}(t_k)+\sum\nolimits_1^2\frac{dB(\nu_k)}{dd_i(d_{01})}(d_i-d_{0i})=$$
$$=B_{0,0}(t_k)+\sum\nolimits_1^2 B_i(t_k)(d_i-d_{0i}), \qquad (6)$$

де

$$B_{0,0}(t_k)=\left\{1+\exp[-d_{02}(t_k-d_{01})]\right\}^{-1};$$
$$B_i(t_k)=-\left\{1+\exp[-d_{02}(t_k-d_{01})]\right\}^{-2}\times \exp[-d_{02}(t_k-d_{01})]d_{02}; \qquad (7)$$
$$B_2(t_k)=\left\{1+\exp[-d_{02}(t_k-d_{01})]\right\}^{-2}\times \exp[-d_{02}(t_k-d_{01})](t_k-d_{01}).$$

Представимо для $t=t_k$, $k=1,...,m$ вираження (6) системою вигляду

$$A^T\cdot\Delta d=C,$$
$$A=\begin{pmatrix}B_1(t_1)...B_1(t_m)\\B_2(t_1)...B_2(t_m)\end{pmatrix};\quad \Delta d=\begin{pmatrix}\Delta d_1\\ \Delta d_2\end{pmatrix};$$
$$C=\begin{pmatrix}B(t_1)-B_{0,0}(t_1)\\ \dots\dots\dots\dots\\ B(t_m)-B_{0,0}(t_m)\end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Перш ніж перейти до відшукання вектору оцінок $\Delta\hat{d}$, знайдемо, використовуючи правило Саррюса, визначник інформаційної матриці Фішера, який згідно (8) дорівнює

$$\left|A^TA\right|=\sum_{k=1}^m B_1^2(t_k)\sum_{k=1}^m B_2^2(t_k)-\left[\sum_{k=1}^m B_1(t_k)B_2(t_k)\right]^2. \qquad (9)$$

Із (9), маючи на увазі (7), можна зробити висновок про те, що визначник матриці $\left|A^TA\right|$ не дорівнює нулю, з чого слідує, при розв'язанні рівняння (8) можна отримати оцінки, які мають кінцеву дисперсію.

Візьмемо до уваги неточний опис процесу B(t) на інтервалі експериментальних вимірів. Значення проекцій вектору C містять помилку. Випадковий вектор у вигляді C+δ має реалізацію

$$y=C+\delta'. \qquad (10)$$

Якщо помилки опису процесу, що розглядається, розподілені нормально (це припущення не суперечить кінцевій теоремі Ляпунова, оскільки процес розглядається під впливом множини незалежних факторів) з нульовим середнім значенням, то їх щільність імовірності має вигляд

$$\varphi(\delta')=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\left|\Pi\right|^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\delta'^T\cdot\Pi^{-1}\delta'\right\}, \qquad (11)$$

де П – матриця коваріацій помилок опису процесу.

Функція правдоподібності параметрів Δd, які підлягають оцінюванню, згідно (10), дорівнює

$$\psi(\Delta d/y) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\Pi|^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - A \cdot \Delta d)^T \cdot \Pi^{-1}(y - A \cdot \Delta d)\right\}, \qquad (12)$$

де $A = A(d0)$;

$y = y(\Delta d_{іст}, \delta')$.

Для незалежних помилок нерівноточного опису процесу B(t) матриця коваріацій і зворотна їй є діагональними

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}; \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W_m \end{pmatrix};$$

$$W_k = \sigma_k^{-2}, \qquad (13)$$

де σ_k^2 – дисперсія помилки k -го відрахунку B(t), яка дорівнює $\sigma_k^2 = M\left[\delta^2\right]$.

Рівняння правдоподібності виходить з (12) після диференціювання логарифму ψ.

Воно має вигляд

$$(A^T \Pi^{-1} A)\Delta d = A^T \Pi^{-1} y. \qquad (14)$$

Матриця $(A^T \Pi^{-1} A)^{-1}$ згідно (8) та (13) дорівнює

$$(A^T \Pi^{-1} A)^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k}\right)^2\right]^{-1} \times \qquad (15)$$

$$\times \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2 & -\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k} \\ -\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k} & \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2 \end{pmatrix}.$$

У відповідності з (4), (5), (7), (13), (15) в результаті отримуються оптимальні оцінки параметрів темпів зміни імовірності досягнення мети бойової протидії в залежності від її тривалості.

Оцінки параметрів, а саме, γ – різниці інтенсивностей взаємного впливу 1-ї та 2-ї сторін, яка дорівнює різниці кількості їх вогневих впливів за одиницю часу.

Та t0 – часу протидії, що відповідає деякому заданому рівню імовірності досягнення 1-ю стороною мети бойової протидії, рівному 0,5 наприклад, у вигляді утримання половини глибини смуги оборони 1-ї сторони, є елементами матриці

$$\left(\hat{t}_{0,5} / \hat{\gamma}\right) = \qquad (16)$$

$$\begin{pmatrix} (\nu_{0,5})_0 + \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{m}\left[W_l B_{1l} \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2 - W_l B_{2l} \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k}\right] y_l}{\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2 \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k}\right)^2} \\ \gamma_0 + \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{m}\left[W_l B_{2l} \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2 - W_l B_{1l} \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k}\right] y_l}{\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2 \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k}\right)^2} \end{pmatrix}$$

Дисперсії оцінок параметрів, t0 і γ , у відповідності з (15) мають вигляд

$$\sigma_{t_0}^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2}{\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2 \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k}\right)^2};$$

$$\sigma_{\hat{\gamma}}^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2}{\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2 \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k}\right)^2}. \qquad (17)$$

Точності оцінок зростають при збільшенні числа дискрет і точності відрахунків B(tk).

Підставляючи оцінки параметрів (16) у вираз (2) для тренду, отримаємо функцію, яка дозволяє визначити очікувану закономірність зміни у часі імовірність досягнення мети бойової протидії 1-ї сторони.

Зрозуміло, що у випадку негативної різниці інтенсивностей взаємного впливу сторін, імовірність досягнення мети 1-ю стороною, при збільшенні тривалості бою, змінюється від рівня, близького до одиниці і прагне до нульового рівня.

Висновки

1. Запропонований метод прогнозування ходу та результату бою, що враховує об'єктивне протистояння факторів впливу, сприяючих і перешкоджаючих реалізації ефекту досягнення мети, засновується на використанні реальних експериментальних даних.

2. Статистична модель, що використовується для отримання оцінок показника результату бою, є більш адекватною ніж відомі, і зручною для практичного рішення задач.

3. Метод дозволяє прогнозувати (по обмеженій сукупності експериментальних даних) реальний рівень очікуваного виконання бойового завдання, якого можна досягати при відомому рівні різниці інтенсивностей взаємного впливу сторін, а також визначати потрібну різницю інтенсивностей впливу для досягнення мети бою за даними перших результатів бойової протидії, що спостерігаються.

Список літератури

1. Саати Т.Л. Математическое моделирование и исследование операцій / Т.Л. Саати – М.: Сов. радио, 1977. – 304 с.

2. Вентцель Е.С. Исследование операцій / Е.С. Вентцель – М.: Советское радио, 1972. – 430 с.

3. Скрипкин В.А. Математические методы исследования операций в военном деле / В.А. Скрипкин, Е.А. Моисеенко, М.А. Томич – М.: Издательство Московского университета. 1972. – 588 с.

4. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений / П. Фишберн. – М., 1978. – 322 с.

5. Марси Д. Стохастическая модель для прогнозирования технологических изменений / Д. Марси // Реф.сб. "Экономика промышленности". – 1980. – № 1. – С. 22-27.

Надійшла до редколегії 30.05.2011

Рецензент: канд. військ. наук, с.н.с. О.Л.Харитонов. Науковий центр БЗ Сухопутних військ, Одеса.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ БОЙОВОГО ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

В.Н. Клименко, Б.А. Демьянчук

Предложена модель для оценки методом максимального правдоподобия прогнозируемых значений параметров тренда изменения во времени вероятности достижения цели боевого противодействия, который адекватно описывает результаты процесса взаимного результирующего огневого воздействия противодействующих сторон.

Ключевые слова: *статистическая модель, вероятность достижения цели боевого противодействия, разность интенсивностей воздействия сторон, метод прогнозирования.*

STATISTICAL MODEL FOR EVALUATION OF PROBABILITY OF ACHIEVING OF MILITARY COUNTERACTION AIM

V.N. Klimenko, B.A. Demyanchuk

Proposed is the model for evaluation by maximum likelihood method for prognostic values of parameters of alteration in time trend of probability of achieving of military counteraction aim, which adequately describes results of mutual resultant fire effect of counteracting parties.

Keywords: *statistical model, probability of achieving of military counteraction aim, difference in intensities of parties influence, forecast method.*