УДК 004.722

С.М. Неділько

Державна льотна академія України, Кіровоград

МАТЕМАТИЧНА ФОРМАЛІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ АВТОМАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ПОВІТРЯНИМ РУХОМ

В статті досліджені різні визначення стійкості функціонування динамічних об'єктів та складних технічних систем: стійкість по Ляпунову, Лагранжу, асимптотична, експоненціальна, гармонічна тощо. Встановлено відмінності функціональної стійкості, як нової властивості технічних систем, від традиційного поняття стійкості функціонування систем.

Ключові слова: *стійкість, складні технічні системи, функціональна стійкість.*

Вступ

Розробка нових і вдосконалення існуючих інформаційних керуючих систем вимагає ретельного дослідження питань забезпечення їх стійкого функціонування.

Особливої важливості питання забезпечення стійкості набувають при проектуванні автоматизованих систем керування повітряним рухом (АСУПР), де ціна відмов або збоїв зазвичай буває дуже високою. Тому розробка високоефективних методів і моделей забезпечення стійкості є актуальним завданням.

Аналіз досліджень і публікацій. Математична формалізація функціональної стійкості АСУПР є першим науково-обгрунтованим кроком створення методологічних основ забезпечення функціональної стійкості АСУПР. Для наукового обгрунтування та математичної формалізації функціональної стійкості необхідно дослідити формалізацію стійкості взагалі. Для динамічних систем, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь, існує багато різних визначень стійкості, що відображають ті або інші особливості поводження траєкторій руху та потребують різних бажаних властивостей рішень або цілих сукупностей рішень. Різні формулювання стійкості, їх взаємозв'язки один з одним та індивідуальними особливостями викладені в роботах [1 – 7]. Більш перспективним щодо цього є підхід до розгляду стійкості, що використовує внутрішні резерви системи на основі існуючої апаратної, програмної, часової та інформаційної надмірності. Саме на цьому підході й базується поняття функціональної стійкості інформаційних керуючих систем, викладене в роботі [8].

Постановка задачі в загальному виді. Дослідити різні визначення стійкості функціонування динамічних об'єктів і складних технічних систем, що описуються різними математичними моделями. Показати відмінності нової властивості складних технічних систем – функціональної стійкості та визначити її місце в системі властивостей стійкості. Математичну формалізацію функціональної стійкості розглянути стосовно до автоматизованої системи управління повітряним рухом.

Основна частина

Проаналізуємо визначення стійкості по Ляпунову О.М., а також деякі його модифікації. Для багатьох об'єктів математичною моделлю є система звичайних диференціальних рівнянь в евклідовому просторі Z:

$$\dot{z} = F(z, t), \quad (1)$$

для якої в деякій області $\Omega \subset Z$ виконані умови існування й однозначності рішення. Як правило, вважають, що Ω збігається з усім простором Z. Проаналізуємо рішення системи (1), що починаються в момент $t_0=0$. Позначимо метрику простору Z через ρ, а через $z(t, z_0)$, $t \geq 0$, – рішення системи (1) з початковою умовою $z(0) = z_0$.

1. Рішення (незбурене) $z(t,z_0)$ системи (1) стійке по Ляпунову, якщо для всякого $\theta>0$ існує таке $\varepsilon(\theta)>0$, що при будь-якому z'_0, що задовольняє умові $\rho(z_0,z'_0) <\varepsilon$, справедливо $\rho[z(t,z_0), z(t,z'_0)]<\theta$ при всіх $t \geq 0$ [6].

Ця властивість, що розглядається на кінцевих інтервалах часу, виконується для досить широкого класу функцій F [2].

Якщо додатково до стійкості по Ляпунову вимагати, щоб $\lim \rho[z(t,z_0), z(t,z'_0)] = 0$ при $t \to \infty$ для рішень, що згадуються у визначенні стійкості по Ляпунову, то одержимо визначення асимптотичної стійкості. Асимптотична стійкість, крім безперервності, вимагає, щоб «обурена» траєкторія при $t \to \infty$ прагнула до метрики ρ.

На практиці важливе значення мають не тільки чисто якісні висновки про існування стійкості, наприклад у смислі Ляпунова, але й характер залежності функції

$$\sup_t \Delta(t) \equiv \sup_t \rho\left[z(t, z_0), z(t, z'_0)\right], \quad (2)$$

від δ, а для асимптотичної стійкості – порядок убування функції $\Delta(t)$. Тому існують і інші формулювання стійкості.

2. Рішення $z(t, z_0)$ стійке, якщо існує таке число $\varepsilon_0>0$, що для будь-якого $\delta\leq\delta_0$ і всякого z'_0, за умови $r(z'_0, z_0)<\varepsilon$, при всіх $t\geq 0$ виконується нерівність

$$\rho\left[z\left(t,z_0\right),z\left(t,z'_0\right)\right]<\theta\left(\varepsilon\right), \quad (3)$$

де функція $\theta(\varepsilon)$ належить заданому сімейству функцій L. $\forall\varepsilon\Rightarrow\theta(\varepsilon)\geq\varepsilon$.

Якщо в якості L вибрати сімейство всіх таких функцій $\theta(\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$, при $\theta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, то одержимо визначення стійкості по Ляпунову. В якості L може бути обрано сімейство функцій, що мають вид $O(\varepsilon)$. Інший приклад являють собою функції $\theta(\varepsilon)$, що задовольняють умові $\theta(\varepsilon)\leq K\varepsilon^{\alpha}$, де $K\geq 0$ і $0<\alpha\leq 1$ – деякі константи.

Подібним чином для асимптотичної стійкості можна обумовити характер прагнення функції $\Delta(t)\to 0$. Тому існують такі терміни, як експонентна стійкість, гармонійна стійкість і ін.

3. Проаналізуємо модель

$$\dot{z}=F\left(z,t\right)+R\left(z,t\right). \quad (4)$$

Рішення $z(t, z_0)$ системи (1) стійке при постійно діючих збурюваннях, якщо $\forall$ $\theta>0$ $\exists$ $\varepsilon_1(\theta)>0$ і $\varepsilon_2(\theta)>0$ такі, що при будь-якому початковому стані z' і функції $R(z,t)$, що задовольняють умовам

1) $\rho(z0,z'0)<\varepsilon_1(\theta)$, (5)

2) $[R(z,t),0]<\varepsilon_2(\theta)$ при $t\geq 0$, $\rho[z, z(t,z_0)]<\theta$, (6)

має місце ρ $[z^*(t,z'_0), z(t, z_0)]<\theta$ при всіх $t\geq 0$, де $z^*(t, z'_0)$ – рішення системи (4) з початковим станом z'_0.

В даному визначенні, на відміну від визначення Ляпунова, де порівнювалися два рішення однієї й тієї ж системи рівнянь, порівнюються рішення різних систем. Розглянутий випадок являє характерний приклад дії збурювань на параметри системи, що не є числовими. Справді, у визначенні стійкості при постійно діючих збурюваннях передбачається, що збуреними параметрами є точки фазового простору. При цьому обмеження на збурювання задаються умовами (5) і (6), наведеними у визначенні.

Аналогічною за постановкою є задача про стійкість при параметричних збурюваннях. При цьому, права частина системи (1) залежить від деяких числових параметрів і параметрів, що мають функціональну природу, а вигляд припустимих збурювань, що діють на параметри системи, визначає сімейство «збурених» функцій F.

Про стійкість по Лагранжу кажуть у випадку, якщо всі рішення системи (1) обмежені при $t\geq 0$. Отже, стійкість по Лагранжу можна інтерпретувати, як збереження властивості траєкторій перебувати в обмеженій частині фазового простору при дії збурювань довільної величини на початкові стани. Рішення системи (1) гранично обмежені, якщо існує така обмежена множина Q у фазовому просторі системи, що для будь-якого початкового стану z_0 існує число $T(z_0)$, для якого справедливо $z(t,z_0)\in Q$ при всіх $t\geq T(z_0)$. Тому при граничній обмеженості всі траєкторії системи (1) потрапляють у множину Q.

4. Аналізуючи поведінку систем на кінцевому інтервалі часу, перейдемо до формулювання практичної стійкості. Розглянемо систему (4). У фазовому просторі системи оберемо множину Q. Оберемо число $T\leq\infty$ і множину Q_0 у просторі початкових станів системи. Зафіксуємо деяке сімейство P функцій $R(z,t)$, наприклад, $P=\{R(z,t): \rho[R(z,t), 0]<\varepsilon;\ t<T,\ z\in Z\}$, де $\varepsilon>0$ – фіксоване число.

Система має практичну стійкість або стійкість відносно (Q, Q_0, P, T), якщо для $\forall\ z_0\in Q_0$ і $\{R(z,t)\}\in P$ справедливо

$$z(y,z_0)\in Q \text{ при } t<T.$$

Із зазначеного витікає, що множина Q є множиною припустимих станів системи, множина Q_0 – множиною припустимих початкових станів, а сімейство P визначає припустимі постійно діючі збурювання. Визначення має сенс як при кінцевих, так і при нескінченних значеннях T. У загальному випадку доцільно не задавати множини Q_0 і P, а задати одну підмножину $\bar{Q}_0$ припустимих значень параметрів на множині збурених параметрів системи. Дослідження практичної стійкості опубліковані в [3 – 5].

5. Проаналізуємо математичну модель системи виду

$$\dot{z}=F\left(z,t\right)+\sigma\left(z,t\right)\cdot\zeta\left(t\right), \quad (7)$$

де $\sigma(z,t)$ – матриця з елементами $\sigma_{ij}(z,t)$; $\zeta(t)$ – векторний випадковий процес, що являє собою білий шум.

Позначимо

$$\|\sigma\|=\sup_{z,t}\left(\sum_{i,j\geq 1}\sigma_{ij}^2\left(z,t\right)\right)^{1/2}. \quad (8)$$

Рішення $z(t,z_0)$ системи (1) є слабо стійким щодо випадкових збурювань, якщо для будь-яких $\varepsilon>0$ і $\gamma>0$ існують ε^*, $c>0$ такі, що при всіх $t\in[0,\infty)$, $\rho(z_0, z'_0)<\varepsilon^*$, $\varepsilon^*<c$ має місце нерівність

$$P\left\{\rho\left[\left(t,z_0\right),z^*\left(t,z'_0\right)\right]<\gamma\right\}>1-\varepsilon, \quad (9)$$

де $z^*(t,z'_0)$ – рішення системи (7) з початковим станом z'_0.

Дане визначення є ймовірнісним аналогом стійкості при постійно діючих збурюваннях. Інші визначення стійкості для стохастичних систем дані в роботах [5, 6] і ін.

Таким чином, виконаний аналіз визначень стійкості для систем диференціальних рівнянь, дозволяє зробити висновок, що поняття стійкості по Ляпунову, асимптотичної стійкості та інші природно можуть бути узагальнені для систем більш загального виду [3, 4].

Сформулюємо відмінності між стійкістю складних технічних систем і динамічних систем. Аналіз наведених понять і визначень стійкості систем, що описуються диференціальними рівняннями, показав, що вони використовуються при дослідженні систем, у яких або випадковими факторами можна знехтувати, або вони носять характер «малої» перешкоди, як це має місце, наприклад, у багатьох системах автоматичного регулювання. Зовсім інше положення виникає при дослідженні складних систем. Під складною системою розуміють сукупність взаємозалежних, у тому числі керованих підсистем, що виконують різні функції й, можливо, рознесених у просторі й часі, об'єднаних загальною системою керування з метою координації спільного функціонування для оптимального рішення задач, що ставляться до системи. В терміні «складна технічна система» відображається напрямок розв'язуваних завдань стосовно до технічних систем [4].

Складна технічна система в цілому не піддається повному математичному опису, а якщо й вдається розробити математичну модель, то практично не вдається провести її аналітичне дослідження, як це можливо в теорії систем автоматичного керування [6]. Аналогічно тому, як розглядалися можливі постановки задач про стійкість для диференціальних рівнянь, розглянемо різні формулювання стійкості для складних систем.

Розглянемо стійкість систем масового обслуговування (СМО) [7]. Розглянемо деяку СМО з очікуванням, на вхід якої надходить однорідний потік заявок. Нехай $W_n(t)$ – функція розподілу часу очікування n-ї заявки на початок обслуговування. Згідно з [7], будемо вважати:

а) СМО функціонує стійко, якщо послідовність функцій розподілу $\{W_n(t)\}$ має в якості ліміту при $n\to\infty$ власну функцію розподілу W(t) у всіх точках безперервності W(t) (функція W(t) називається власною функцією розподілу, якщо $W(\infty)=1$);

б) СМО функціонує псевдостійко, якщо для послідовності $\{W_n(t)\}$ при всіх n і t виконується $W(t)\le W_n(t)$, де W(t) – власна функція розподілу;

в) СМО функціонує нестійко, якщо не виконується властивість псевдостійкості.

З визначення витікає, що псевдостійкість є більш широким поняттям, ніж стійкість. На практиці доцільніше розглядати не послідовність функцій розподілу $\{W_n(t)\}$, а послідовність деяких функціоналів від цих функцій $\{f(W_n)\}$. Зокрема, у якості f можуть виступати моменти функцій W_n, значення функцій при фіксованому аргументі тощо. При цьому під стійкістю можна розуміти, наприклад, обмеженість послідовності $\{f(W_n)\}$.

6. Далі слід надати формалізоване визначення функціональної стійкості АСУПР на основі теоретичного підходу, розробленого в роботі [8]. Отже, нехай внутрішній стан z розглянутої системи є елементом множини Z, (фазового простору). Процес функціонування визначається законом зміни внутрішнього стану в часі. Будемо вважати, що функціонування системи визначається деяким набором параметрів α. Поняттю «параметр» буде надаватися широкий зміст. Відповідно до цього α − елемент множини A, що буде називатися надалі множиною або простором параметрів. Таким чином, зміна внутрішнього стану в часі $z(t,\alpha)$ залежить від α. При цьому $t\in I$, де I – сукупність досліджуваних моментів часу, тобто інтервал функціонування системи.

У загальному випадку функція часу $z(t,\alpha)$ є реалізацією деякого випадкового процесу.

Якість роботи будь-якої системи оцінюється за допомогою функціоналів. Тому будемо вважати, що на реалізаціях $z(t,\alpha)$ при будь-якому $\alpha\in A$ задано однопараметричне сімейство дійсних функціоналів

$$F_\tau = F_\tau\{z(t,\alpha), t\le\tau, t,\tau\in I, \alpha\in A\}.$$

Значення функціонала F_τ при фіксованому τ оцінює роботу системи до цього моменту. При фіксованому α і фіксованій реалізації $z(t,\alpha)$ функціонал F_τ є дійсною функцією часу $\tau\in I$.

Розглянемо множину D усіх можливих дійсних функцій з областю визначення I. Нехай β – сукупність деяких підмножин цієї множини. Аналогічно, для кожної множини $\beta\in B$ визначимо сукупність $\beta_\gamma(B)$ деяких підмножин B, обумовлену параметром γ. Фізичний смисл введених понять такий. Якщо дійсна функція належить одній із множин сукупності β, то це характеризує основну властивість обраного визначення стійкості. Приналежність до однієї з підмножин сукупності $\beta_\gamma(B)$ говорить про деякі додаткові властивості, що обумовлюють особливість поняття стійкості.

Нехай B – деяка множина функцій. Будемо позначати через B^t множину значень всіх функцій з B, розглянутих у точці t. Для подальшої зручності будемо вважати, що до інтервалу I входить фіктивна точка ∞.

Тоді, якщо деяка реалізація $\{F_\tau, \tau\in I\}$ є елементом заздалегідь обраної множини B, тобто

$$\{F_\tau, \tau\in I\}\in B,$$

то приймемо

$$F_\infty\in B^\infty.$$

Якщо ж $\{F_\tau, \tau\in I\}\notin B$, то $F_\infty\notin B^\infty$.

Отже, можна сказати, що $\{F_\tau, \tau\in I\}\in B$ тоді й тільки тоді, коли $F_\infty\in B^\infty$.

Аналогічно тому, як це робилося для множини D, нехай Λ – сукупність деяких підмножин множини параметрів А. Для кожної множини $A \in \Lambda$ знайдемо сукупність $\Lambda_\gamma(A)$ деяких її підмножин, що також обумовлена параметром γ. Умовимося розрізняти два числа: а й а – 0.

Визначення. Автоматизована система управління повітряним рухом є функціонально стійкою відносно

$$(\beta,\ \{\beta_\gamma\},\ \Lambda,\ \{\Lambda_\gamma\},\ \varepsilon_0, F_\tau, T),$$

де − $0 \le \varepsilon \le 1$ – деяке число, F_τ – обране однопараметричне сімейство функціоналів, Т – деяка підмножина інтервалу функціонування І, якщо для будь-якого $\varepsilon > \varepsilon_0$ й будь-якої множини $B \in \beta$ можна знайти множину $A \in \Lambda$ таку, що для кожної $A_1 \in \Lambda_B(A)$ існує $B_1 \in \beta_{A_1}(B)$, що задовольняє при всіх $\tau \in T$ і $\alpha \in A_1$ нерівності

$$P\{F_\tau[z(t,\alpha),\ t \le \tau] \in B^\tau_{A_1}\} > 1 - \varepsilon . \qquad (10)$$

Тут в якості параметру для набору сукупностей $\{\Lambda_\gamma\}$ виступають множини В з β, а параметрами для $\{\beta_\gamma\}$ є множини з Λ_B. Це визначення вимагає, щоб деяка властивість системи зберігалася в тому або іншому імовірнісному смислі на заздалегідь обраному інтервалі часу. Множини із сукупності Λ вказують на характер припустимих збурювань. Якщо ж параметри змінюються в одній із множин сукупності $\Lambda_B(A)$, то, з погляду поставленого завдання, поводження системи повинно змінюватися незначно. Підмножина Т, що характеризує інтервал часу, на якому досліджується стійкість, і сімейство функціоналів F_τ є обов'язковими елементами будь-якого часткового визначення.

Висновки

На основі розглянутих математичних моделей, що описують функціонування динамічних об'єктів і складних технічних систем, досліджені різні визначення стійкості технічних систем. Установлено відмінність функціональної стійкості, як нової властивості технічних систем, від традиційного поняття стійкості функціонування систем і представлена її математична формалізація.

Напрямком подальших досліджень у цій галузі можуть бути методологічні питання реалізації запропонованого підходу, удосконалення математичних моделей і методів забезпечення функціональної стійкості інформаційних керуючих систем і, зокрема, автоматизованої системи управління повітряним рухом.

Список літератури

1. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин/– М.: Едиториал УРСС, 2010, – 432 с.

2. Демидович Б.Г. Лекции по математической теории устойчивости / Б.Г. Демидович. – М.: Лань, 2008. – 365 с.

3. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин/ – М.: Наука, 1990. – 448 с.

4. Большие технические системы: проектирование и управление / Л.М. Артюшин, Ю.К. Зиатдинов, И.А. Попов, А.В. Харченко; под ред. И.А. Попова. – Х.: Факт, 1997. – 400 с.

5. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости / Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 2008. – 224 с.

6. Теорія автоматичного керування / Л.М. Артюшин, О.А. Машков, М.С. Сівов, В.М. Дурняк. – Львів: Політехніка, 2003. – 456 с.

7. Хинчин А.Я. Работі по математической теории массового обслуживания / А.Я. – М.: Либроком, 2010. – 240 с.

8. Барабаш О.В. Методология построения функционально устойчивых распределенных информационных систем / О.В. Барабаш. – К. НАОУ, 2004. – 214 с.

Надійшла до редколегії 25.11.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.В. Барабаш, Національний авіаційний університет, Київ.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

С.Н. Неделько

В статье исследованы различные определения устойчивости функционирования динамических объектов и сложных технических систем: устойчивость по Ляпунову, Лагранжу, асимптотическая, экспоненциальная, гармоническая и другие. Установлено отличие функциональной устойчивости, как нового свойства технических систем, от традиционного понятия устойчивости функционирования систем.

Ключевые слова: *устойчивость, сложные технические системы, функциональная устойчивость.*

THE MATHEMATICAL FORMALIZATION OF FUNCTIONAL STABILITY FOR THE AIR TRAFFIC CONTROL SYSTEM

S.N. Nedilko

Different determinations of stability for dynamic objects and complex technical systems are investigated in the article: stability by Lyapunov and Lagrange, asymptotic, exponential, harmonic et al. The difference of functional stability from the traditional system stability concept is shown as a new property of the technical systems.

Keywords: *stability, complex technical systems, functional stability.*