УДК 681.5.013 DOI: 10.30748/soi.2017.151.11

Ю.И. Дорофеев, А.А. Никульченко

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАРАНТИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ В ЦЕПЯХ ПОСТАВОК В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ

В статье предложен подход к решению задачи синтеза гарантирующего управления запасами в дискретных цепях поставок с неопределенными транспортными запаздываниями и квадратичной функцией стоимости в условиях действия «неизвестного, но ограниченного» спроса и наличия ограничений на значения управляющих воздействий. Задача сводится к синтезу закона управления в виде динамической обратной связи по сигналу рассогласования между наличными и страховыми уровнями запасов, который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы и гарантирует, что значение функции стоимости не превышает некоторую верхнюю границу для всех допустимых неопределенностей. Достаточные условия существования таких регуляторов получены на основе метода инвариантных эллипсоидов с помощью техники линейных матричных неравенств (ЛМН). Параметризованное представление гарантирующих регуляторов (если они существуют) представлено в терминах допустимых решений для некоторой совокупности ЛМН. Сформулирована задача полуопределенного программирования для синтеза оптимального гарантирующего регулятора, который минимизирует верхнюю границу функции стоимости для замкнутой системы. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: *управление запасами, гарантирующее управление, метод инвариантных эллипсоидов, функционал Ляпунова-Красовского, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.*

Постановка проблемы

Задача синтеза регуляторов для линейных динамических систем в условиях неопределенных временных задержек в течение длительного времени привлекает значительное внимание в работах по теории автоматического управления. Поскольку наличие запаздывания часто является причиной ухудшения качества работы системы и даже потери устойчивости, множество публикаций посвящено проблемам анализа устойчивости и синтеза регуляторов для непрерывных систем с запаздыванием (см., например, [1] и ссылки в ней). Гораздо меньше внимания уделяется исследователями дискретным системам с запаздыванием. В основном это связано с тем, что дискретные системы с запаздыванием могут быть преобразованы путем расширения пространства состояний к виду систем без запаздывания. Однако, подобное преобразование приводит к значительному увеличению размерности системы, а в случае неопределенности величины запаздывания является неприменимым.

При синтезе систем управления запасами усилия разработчиков направлены на построение регуляторов, которые не только обеспечивают устойчивость замкнутой системы, но и гарантируют достаточный уровень производительности. Одним из подходов к решению этой задачи является синтез так называемого гарантирующего управления (англ.: guaranteed cost control), впервые предложенного в работе [2]. Преимущество указанного подхода в том, что он позволяет определить верхнее граничное значение заданного критерия качества, в результате чего разработчик имеет возможность оценить снижение производительности системы, вызванное наличием запаздывания.

Развитие теории линейных матричных неравенств (ЛМН) позволяет применить подобный подход для синтеза оптимального управления запасами в производственных системах с неопределенными значениями задержек пополнения запасов. В частности, с помощью указанного подхода были разработаны процедуры синтеза законов управления с обратной связью по состоянию для систем с неопределенными временными задержками на основе решения модифицированного уравнения Риккати [3] и с использованием техники ЛМН [4]. Однако, в указанных работах не рассматривались внешние возмущения и не учитывались эксплуатационные ограничения, присущие системам производства-хранения-распределения ресурсов. Тогда как использование техники ЛМН представляет инструмент, который не только позволяет эффективно находить оптимальные решения, но и учитывать различные дополнительные ограничения [5].

Подход, предложенный в данной работе, заключается в следующем. Вначале формулируется достаточное условие существования закона гарантирующего управления в виде динамической обратной связи по состоянию, а затем доказывается, что это условие эквивалентно разрешимости задачи минимизации линейной функции при ограничениях, представленных в виде совокупности ЛМН. Исходя из этого, формулируется задача полуопределенного программирования для нахождения гарантирующего регулятора, минимизирующего верхнюю границу функции стоимости.

Постановка задачи

Рассмотрим дискретную модель производственной системы с задержками поставок, которая описывается разностным уравнением с запаздыванием

$$x(k+1) = x(k) + Bu(k-h(k)) + Gd(k)\,, \tag{1}$$

где $k = 0,1,...$ – номер дискретного интервала; $x(k) \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояний, компоненты которого описывают наличные уровни запасов ресурсов; n – количество видов ресурсов; $u(k) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, компоненты которого описывают размеры заказов на поставку ресурсов; $d(k) \in R^q$ – вектор внешних возмущений, компоненты которого описывают размеры внешнего спроса; $B \in R^{n\times m}$, $G \in R^{n\times q}$ – известные матрицы влияния управлений и возмущений, соответственно; $h(k)$ – положительное целое число, кратное выбранному периоду дискретизации, которое определяет величину задержки пополнения запасов и предполагается неизвестным, но удовлетворяющим неравенству $0 \le h(k) \le h_m$, где h_m известно.

На практике, как правило, отсутствует информация, необходимая для построения адекватной модели спроса. Одним из подходов к решению задачи управления запасами в условиях неопределенности спроса является использование концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий [6], в соответствии с которой неопределенность спроса описывается с помощью набора интервалов, в пределах которых компоненты векторной функции $d(k)$ принимают значения произвольным образом. Границы интервалов определяются на основании статистики прошлых продаж. В результате внешние возмущения удовлетворяют ограничениям

$$d(k) \in D = \{d \in R^q : 0 \le d^{min} \le d \le d^{max}\}\,, \tag{2}$$

где векторы граничных значений спроса d^{min} и d^{max} считаются известными.

Для задач управления запасами характерно наличие эксплуатационных ограничений на значения управляющих воздействий. В теории управления ограничения традиционно задаются в какой-либо норме. Однако спецификой рассматриваемой задачи является неотрицательность значений переменных. Кроме того, суммарный размер заказов ресурсов, формируемых в текущем периоде, как правило, также ограничен. Это приводит к необходимости учета ограничений на значения управляющих воздействий, которые представлены в виде неравенств

$$u(k) \in U = \{u \in R^m : 0 \le u^{min} \le u,\ \ \sum_{i=1}^{m} u_i \le u^{max}\}, \tag{3}$$

где компоненты вектора $u^{min} \in R^m$, а также значение $u^{max} \in R$ заданы.

Управление запасами заключается в определении размеров заказов на восполнение запасов и моментов времени формирования заказов. В работе используется модель периодической проверки, которая предполагает контроль уровня запасов в каждом периоде и формирование заказов, размеры которых определяются в соответствии с выбранной стратегией.

Традиционным средством защиты от неопределенности спроса является создание страховых запасов. Размеры страховых запасов вычисляются на основе верхних граничных значений спроса с учетом максимальной величины запаздывания

$$x^* = h_m d^{max}\,. \tag{4}$$

Предполагается, что уровни наличных запасов ресурсов доступны для непосредственного измерения. Тогда закон управления строится в виде динамической обратной связи по сигналу рассогласования между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов

$$u(k) = K(k)(x(k) - x^*)\,, \tag{5}$$

где $K(k) \in R^{m\times n}$ – нестационарная матрица коэффициентов обратной связи. Тогда уравнение замкнутой системы для управления (5) примет вид

$$x(k+1) = x(k) + BK(x(k-h(k)) - x^*) + Gd(k). \tag{6}$$

Критерий качества в случае бесконечного временного горизонта выбран в виде

$$J_\infty(k) = \sum_{t=k}^{\infty} \beta^t ((x(t) - x^*)^T W_x (x(t) - x^*) + u^T(t) W_u u(t)), \tag{7}$$

где $W_x \in R^{n\times n}$, $W_u \in R^{m\times m}$ – положительно определенные диагональные весовые матрицы; $0 < \beta < 1$ – коэффициент дисконтирования. Первое слагаемое в (7) определяет размеры штрафов за отклонение текущих уровней запасов ресурсов от страховых, второе – стоимость производства и хранения ресурсов, наличие множителя β^t обеспечивает ограниченность критерия на бесконечном временном интервале.

Для системы (1) с ограничениями (2–3) необходимо решить задачу синтеза регулятора, который для любого допустимого спроса $d(k) \in D$ $\forall k \ge 0$ и любой величины задержки $0 \le h(k) \le h_m$ обеспечивает:

1) полное и своевременное удовлетворение спроса на ресурсы, то есть выполнение требования неотрицательности значений состояний

$$x(k) \in X = \{x \in R^n : \; 0 \le x\}; \qquad (8)$$

2) робастную устойчивость замкнутой системы (6) при выполнении ограничений (3) на значения управляющих воздействий;

3) гарантированную стоимость управления, которая означает, что значение критерия качества (7) для замкнутой системы не превысит некоторого граничного значения J^*.

Изложение основного материала

Гарантирующими [7] называют управляющие воздействия, при которых гарантируется минимизация верхнего граничного значения показателя качества при любых допустимых возмущениях и любом варианте реализации неопределенности модели, то есть выполняется

$$J^* = \inf_{u(k)\in U} \sup_{d(k)\in D,\, 0\le h(k)\le h_m} J_\infty(k).$$

Для того, чтобы функционал (7) был конечен, необходимо и достаточно, чтобы замкнутая система (6) была робастно устойчива.

Построим функционал Ляпунова-Красовского (ФЛК) для замкнутой системы (6) в виде

$$V(k) = \beta^k (x(k) - x^*)^T P(k)(x(k) - x^*) + $$
$$+ \beta^k \sum_{i=1}^{h(k)} u^T(k-i)T(k)u(k-i), \qquad (9)$$
$$P(k) = P^T(k) \succ 0, \quad T(k) = T^T(k) \succ 0.$$

Вычислим первую разность по k ФЛК (9) в силу системы (6):

$$\Delta V = V(k+1) - V(k) = \beta^k[\beta(x(k+1) - x^*)^T P(k) \times$$
$$\times (x(k+1) - x^*) - (x(k) - x^*)^T P(k)(x(k) - x^*) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{h(k+1)} (x(k+1-i) - x^*)^T K^T(k)T(k)K(k) \times$$
$$\times (x(k+1-i) - x^*) -$$
$$- \sum_{i=1}^{h(k)} (x(k-i) - x^*)^T K^T(k)T(k)K(k)(x(k-i) - x^*)] =$$
$$= \beta^k[(x(k) - x^*) + BK(k)(x(k-h(k)) - x^*) +$$
$$+ G(d(k) - d^*) + Gd^*]^T \beta P(k)[(x(k) - x^*) +$$
$$+ BK(k)(x(k-h(k)) - x^*) +$$
$$+ G(d(k) - d^*) + Gd^*] - \beta^k[(x(k) - x^*)^T P(k)(x(k) - x^*) +$$
$$+ (x(k) - x^*)^T K^T(k)T(k)K(k)(x(k) - x^*) -$$
$$-(x(k-h(k)) - x^*)^T K^T T K(x(k-h(k)) - x^*)] = s^T(k) \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \Psi(k) & P(k)B & P(k)G & P(k)G \\ B^T P(k) & B^T P(k)B - T(k) & B^T P(k)G & B^T P(k)G \\ G^T P(k) & G^T P(k)B & G^T P(k)G & G^T P(k)G \\ G^T P(k) & G^T P(k)B & G^T P(k)G & G^T P(k)G \end{bmatrix} s(k),$$

где $\Psi(k) = (\beta - 1)P(k) + K^T(k)T(k)K(k)$;

$$s(k) = col\{\beta^{k/2}(x(k) - x^*);\; \beta^{k/2}(K(x(k-h(k)) - x^*));$$
$$\beta^{k/2}(d(k) - d^*);\; \beta^{k/2} d^*\}.$$

Потребуем, чтобы значение ФЛК (9) с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью

$$\Delta V \le -\beta^k (x(k) - x^*)^T (W_x + K^T(k) W_u K(k))(x(k) - x^*). \quad (10)$$

Просуммировав левые и правые части неравенства (10) по k от 0 до ∞, получим

$$J_\infty(k) \le (x(0) - x^*)^T P(0)(x(0) - x^*) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{h(k)} (x(-i) - x^*)^T K^T(i)T(i)K(i)(x(-i) - x^*), \qquad (11)$$

то есть ФЛК (9), вычисленный в момент времени $k = 0$, определяет верхнее граничное значение критерия (7). Тогда задача синтеза гарантирующего управления эквивалентна задаче минимизации ФЛК (9), вычисленного в момент времени $k = 0$:

$$u(k) = \arg \min_{u(k)\in U} V(0). \qquad (12)$$

Классический подход к решению задачи синтеза управления, минимизирующего квадратичный критерий качества, основан на решении алгебраического уравнения Риккати и гарантирует оптимальное решение для произвольных начальных условий. Этим управление, полученное в результате решения задачи (12), отличается от классического. Чтобы получить аналогичный результат, применим метод инвариантных эллипсоидов [8].

Эллипсоид, описываемый уравнением

$$E(x^*, Q(k)) =$$
$$= \{x \in R^n : (x(k) - x^*)^T Q^{-1}(k)(x(k) - x^*) \le 1\}, \qquad (13)$$

называется инвариантным по состоянию для рассматриваемой системы, если любая траектория системы, начавшись в эллипсоиде, остается в нем для любого момента времени $k \ge 0$.

Инвариантный эллипсоид (13) может рассматриваться в качестве аппроксимации множества достижимости замкнутой системы (6), то есть позволяет характеризовать влияние внешних возмущений и неопределенности параметров модели на траекторию замкнутой системы.

По аналогии с (13) определим семейство эллипсоидов, инвариантных по состоянию с запаздыванием

$$E_i(x^*, L(k)) = \{ x \in R^n : (x(k-i) - x^*)^T \times$$
$$\times L^{-1}(k)(x(k-i) - x^*) \le 1\}, \quad i = \overline{1, h_m}, \tag{14}$$
$$L(k) = K^{-1}(k)N(k)(K^T(k))^{-1}, \quad N(k) \in R^{m\times m}.$$

Сравнение выражения (9) с выражениями (13) и (14) позволяет утверждать, что если выполняются условия

$$P(k) = Q^{-1}(k), \quad T(k) = N^{-1}(k), \tag{15}$$

то сумма эллипсоидов (13–14) представляет множество, которое находится внутри поверхности уровня ФЛК (9).

Таким образом, задача сводится к построению регулятора, который обеспечивает минимизацию по некоторому критерию суммы инвариантных эллипсоидов при заданных ограничениях. В качестве критерия выбрана сумма квадратов полуосей эллипсоидов, то есть сумма следа матрицы $Q(k)$ и следа матрицы $N(k)$.

Результат решения задачи синтеза оптимального гарантирующего управления запасами в условиях неопределенных запаздываний представлен в виде следующей теоремы.

Теорема. Рассмотрим систему (1) с ограничениями (2–3), и пусть матрицы $\hat{Q}(k) \in R^{n\times n}$, $\hat{Y}(k) \in R^{m\times n}$ и $\hat{N}(k) \in R^{m\times m}$ получены в результате решения задачи

$$\mathrm{tr}(Q(k)) + \mathrm{tr}(N(k)) \to \min \tag{16}$$

при ограничениях на матричные переменные $Q(k) = Q^T(k) \succ 0$, $N(k) = N^T(k) \succ 0$, $Y(k)$ и скалярный параметр $\alpha(k) > 0$

$$\begin{bmatrix} -Q(k) & \beta^{1/2}Q(k) & BN(k) & G & G & 0_{n\times m} & 0_{n\times m} & 0_{n\times n} \\ \beta^{1/2}Q(k) & -Q(k) & 0_{n\times m} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} & Y^T(k) & Y^T(k) & Q(k) \\ N(k)B^T & 0_{m\times n} & -N(k) & 0_{m\times q} & 0_{m\times q} & 0_{m\times m} & 0_{m\times m} & 0_{m\times n} \\ G^T & 0_{q\times n} & 0_{q\times m} & -\alpha(k)Q_d^{-1} & 0_{q\times q} & 0_{q\times m} & 0_{q\times m} & 0_{q\times n} \\ G^T & 0_{q\times n} & 0_{q\times m} & 0_{q\times q} & 0_{q\times q} & 0_{q\times m} & 0_{q\times m} & 0_{q\times n} \\ 0_{m\times n} & Y(k) & 0_{m\times m} & 0_{m\times q} & 0_{m\times q} & -N(k) & 0_{m\times m} & 0_{m\times n} \\ 0_{m\times n} & Y(k) & 0_{m\times m} & 0_{m\times q} & 0_{m\times q} & 0_{m\times m} & -W_u^{-1} & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times n} & Q(k) & 0_{n\times m} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} & 0_{n\times m} & 0_{n\times m} & -W_x^{-1} \end{bmatrix} \preceq 0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} u^{\min}(x(k)-x^*)^+ Y^T(k) & Y(k) \\ Y^T(k) & Q(k) \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \begin{bmatrix} u^{\max}(x(k)-x^*)^+ Y^T(k)e_m & e_m^T Y(k) \\ Y^T(k)e_m & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{18}$$

где $Q_d \in \mathbf{R}^{q\times q}$ – матрица эллипсоида наименьшего объема, который аппроксимирует множество значений спроса D; $0_{n\times m}$ – нулевая матрица соответствующей размерности; $e_m = [1, 1, ..., 1]^T \in R^m$; «$+$» обозначает псевдообращение Мура-Пенроуза [8].

Если задача (16) минимизации линейной функции при ограничениях в виде ЛМН (17–18), которая является задачей полуопределенного программирования, имеет решение $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{Q}(k)$, $\hat{N}(k)$, $\hat{Y}(k)$, то:

1) для любого начального состояния $x(0) \ge x^*$, любого допустимого спроса $d(k) \in D \quad \forall k \ge 0$ и величины задержки $0 \le h(k) \le h_m$ замкнутая система (6) является робастно устойчивой при ограничениях (3);

2) среди всех линейных управлений вида (5) регулятор с матрицей

$$K(k) = \hat{Y}(k)\hat{Q}^{-1}(k) \tag{19}$$

доставляет минимум по критерию следа матрицы сумме инвариантного эллипсоида (13) и семейства эллипсоидов (14) в момент времени k;

3) значение критерия качества замкнутой системы (6) удовлетворяет неравенству

$$J_\infty(k) \le \lambda_{\max}(Q_x^T \hat{Q}^{-1}(k) Q_x) +$$
$$+ h_m \lambda_{\max}(Q_x^T \hat{Q}^{-1}(k) \hat{Y}^T(k) \hat{N}^{-1}(k) \times \tag{20}$$
$$\times \hat{Y}(k) \hat{Q}^{-1}(k) Q_x) = J^*,$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ обозначает максимальное собственное число матрицы $(\cdot)$.

Доказательство теоремы. Выполним аппроксимацию множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема, который задается уравнением

$$E(d^*, Q_d) = \{ d \in \mathbf{R}^q : (d(k) - d^*)^T Q_d^{-1}(d(k) - d^*) \le 1\}. \tag{21}$$

Матрица эллипсоида Q_d и вектор координат центра $d^* \in \mathbf{R}^q$ определяются в результате решения задачи полуопределенного программирования аналогично тому, как это сделано в работе [9].

Введем обозначения:

$$f_i(s) = s^T(k)M_i s(k), \quad M_i \in R^{N\times N}, \quad i = 0,1,$$
$$N = n + m + 2q,$$
$$M_0 =$$
$$= \begin{bmatrix} \Omega(k) & P(k)B & P(k)G & P(k)G \\ B^T P(k) & B^T P(k)B - T(k) & B^T P(k)G & B^T P(k)G \\ G^T P(k) & G^T P(k)B & G^T P(k)G & G^T P(k)G \\ G^T P(k) & G^T P(k)B & G^T P(k)G & G^T P(k)G \end{bmatrix},$$
$$\Omega(k) = \Psi(k) + W_x + K^T(k)W_u K(k),$$
$$M_1 = \text{block diag}\{0_{n\times n}, 0_{m\times m}, Q_d^{-1}, 0_{q\times q}\}.$$

Тогда неравенство (10), обеспечивающее убывание ФЛК (9) вдоль любой траектории замкнутой системы (6), а также неравенство (21), описывающее эллипсоид, аппроксимирующий допустимое множество значений внешнего спроса, запишем в виде $f_0(s) \le 0 \quad \forall s: \quad f_1(s) \le 1$.

С учетом неущербности S-процедуры при одном ограничении [10] достаточным условием знакоопределенности записанных квадратичных форм является выполнение для некоторого скалярного параметра $\alpha(k) > 0$ матричного неравенства

$$M_0 \preceq \alpha(k)M_1,$$

которое можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \beta^{1/2} \\ B^T \\ G^T \\ G^T \end{bmatrix} P(k) \begin{bmatrix} \beta^{1/2} & B & G & G \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} \Omega(k) - \beta P(k) & 0_{n\times m} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} \\ 0_{m\times n} & -T(k) & 0_{m\times q} & 0_{m\times q} \\ 0_{q\times n} & 0_{q\times m} & -\alpha(k)Q_d^{-1} & 0_{q\times q} \\ 0_{q\times n} & 0_{q\times m} & 0_{q\times q} & 0_{q\times q} \end{bmatrix} \preceq 0.$$

Используя модификацию леммы Шура для нестрогих матричных неравенств [10], последнее неравенство запишем в виде

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(k) & \beta^{1/2} I_n & B & G & G \\ \beta^{1/2} I_n & \Omega(k) - \beta P(k) & 0_{n\times m} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} \\ B^T & 0_{m\times n} & -T(k) & 0_{m\times q} & 0_{m\times q} \\ G^T & 0_{q\times n} & 0_{q\times m} & -\alpha(k)Q_d^{-1} & 0_{q\times q} \\ G^T & 0_{q\times n} & 0_{q\times m} & 0_{q\times q} & 0_{q\times q} \end{bmatrix} \preceq 0.$$

Введем матричную переменную $Y(k) = K(k)Q(k)$. Откуда в силу $Q(k) \succ 0$ матрица $K(k)$ восстанавливается единственным образом

$$K(k) = Y(k)Q^{-1}(k). \tag{22}$$

Применив к полученной матрице неравенства конгруэнтное преобразование с помощью блочно-диагональной матрицы $\text{block diag}\{I_n, P^{-1}(k), T^{-1}(k), I_q, I_q\}$, используя лемму Шура и матричные переменные (15), получим ЛМН (17).

Ограничения на значения управляющих воздействий (3) представим в виде неравенств

$$\begin{aligned} u^{\min} &\le Y(k)Q^{-1}(k)(x(k) - x^*), \\ e_m^T Y(k)Q^{-1}(k)(x(k) - x^*) &\le u^{\max}. \end{aligned} \tag{23}$$

Неравенства (23) с помощью модификации леммы Шура для нестрогих матричных неравенств представим в виде совокупности ЛМН (18).

Таким образом, если задача (16) при ограничениях (17–18) имеет допустимое решение $\hat{\alpha}(k)$, $\hat{Q}(k)$, $\hat{Y}(k)$, $\hat{N}(k)$, то закон управления в виде обратной связи

$$u(k) = \hat{Y}(k)\hat{Q}^{-1}(k)(x(k) - x^*)$$

обеспечивает оптимальное гарантирующее управление запасами.

Верхнее граничное значение критерия качества в (11) зависит от начальных условий системы (1). Чтобы устранить эту зависимость, применим подход, предложенный в [11]. Предположим, что начальное состояние системы (1) произвольно, но принадлежит эллипсоиду

$$E(x^*, Q_x) =$$
$$= \{x(-i) \in \mathbf{R}^n : (x(-i) - x^*)^T Q_x^{-1}(x(-i) - x^*) \le 1, \tag{24}$$
$$i = 0,1,2,\dots,h_m\},$$

вектор координат центра которого совпадает с вектором страховых запасов x^*, а матрица Q_x вычисляется из условия (8) в результате решения соответствующей задачи полуопределенного программирования. Тогда оценка (11) приводит к неравенству

$$J_\infty(k) \le \lambda_{\max}(Q_x^T P(k)Q_x) +$$
$$+ h_m \lambda_{\max}(Q_x^T K^T(k)T(k)K(k)Q_x),$$

откуда с учетом введенных обозначений следует неравенство (20) для оценки верхней границы J^* показателя качества замкнутой системы.

Таким образом, теорема доказана.

Численный пример

В качестве примера исследуется компания, занимающаяся продажей сувенирной продукции в городе Нью-Йорк, название которой не разглашается. Данные для моделирования предоставлены компанией Teamwork Retail (https://teamworkretail.com), которая разрабатывает программное обеспечение для управления запасами, используемое исследуемой компанией. Для моделирования выбраны три вида сувенирной продукции, продажи каждого из которых независимы друг от друга. Период дискретизации равен 1 суткам. Пополнение запасов осуществляется путем формирования заказа на фабрику, время выполнения заказа составляет от 2 до 6 суток. Задано ограничение на максимальное суммарное количество единиц в заказе по всем трем видам продукции $u^{max} = 6000$ ед.

На основе информации об объемах продаж за первые 50 дней 2017 года определены граничные значения спроса $d^{min} = col\{662; 1033; 293\}$ и $d^{max} = col\{2947; 3242; 1126\}$. В соответствии с (4) определены размеры страховых запасов ресурсов, которые выбраны в качестве начального состояния системы $x(0) = x^* = col\{17682; 19452; 6756\}$.

Численное решение соответствующих задач полуопределенного программирования выполнено в среде MATLAB с помощью свободно распространяемого пакета cvx [12]. В результате определены параметры эллипсоидов (21) и (24):

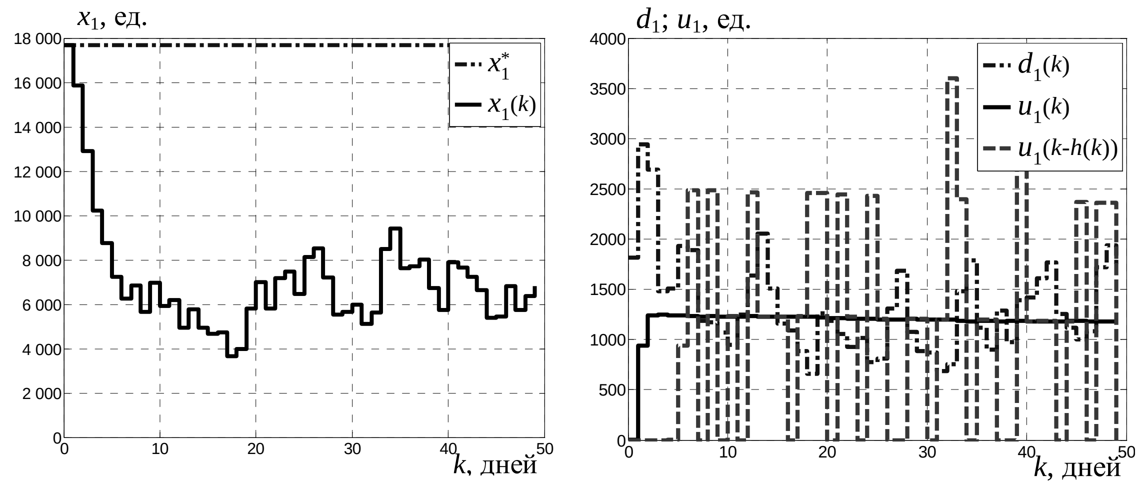
$$Q_d = diag\{3,92 \cdot 10^6; 3,66 \cdot 10^6; 5,20 \cdot 10^5\},$$

$$d^* = col\{1,80 \cdot 10^3; 2,14 \cdot 10^3; 709\},$$

$$Q_x = diag\{3,127 \cdot 10^8; 3,784 \cdot 10^8; 4,564 \cdot 10^7\}.$$

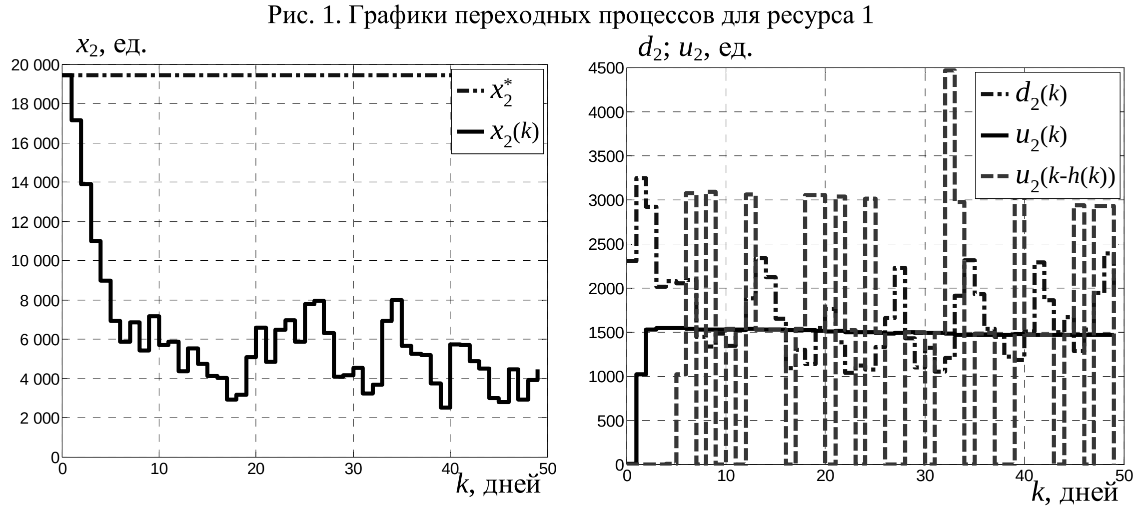
Значения элементов диагональных весовых матриц, определяющих критерий качества (7), выбраны равными $W_x = diag\{1 \cdot 10^{-4}; 1 \cdot 10^{-10}; 13\}$ и $W_u = diag\{1 \cdot 10^{-3}; 1 \cdot 10^{-8}; 2 \cdot 10^{-2}\}$, $\beta = 0,99$. Величина запаздывания $h(k) \in [2; 6]$ в каждом периоде генерировалась случайным образом.

Результаты моделирования приведены на рис. 1–3, где *а* – значения страхового и наличного уровней запасов; *б* – значения спроса, номинального и реального (с учетом запаздывания) управляющих воздействий. При этом получено значение $J_\infty(k) = 4,549 \cdot 10^9$, тогда как наименьшая верхняя граница в соответствии с (20) равна $J^* = 1,291 \cdot 10^{17}$.



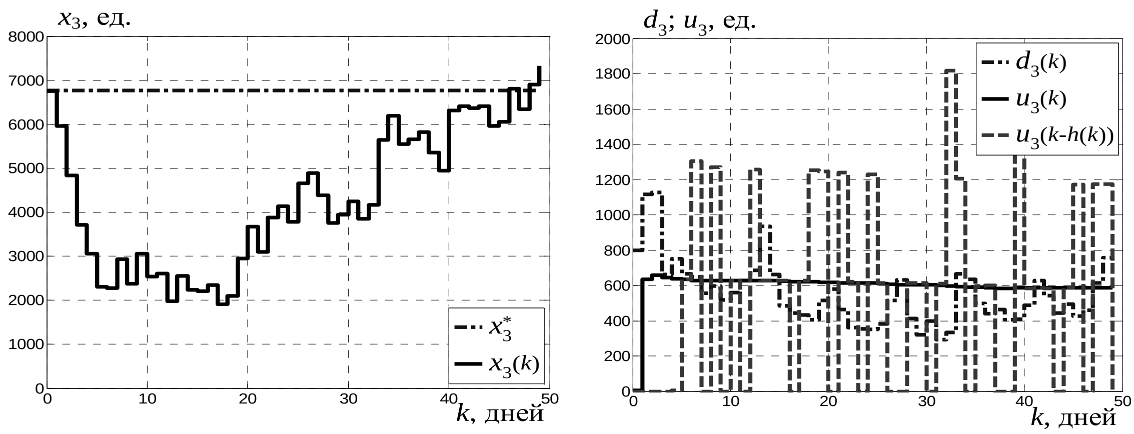
а б

Рис. 1. Графики переходных процессов для ресурса 1



а б

Рис. 2. Графики переходных процессов для ресурса 2



а б

Рис. 3. Графики переходных процессов для ресурса 3

Выводы

В статье предложен подход к решению задачи синтеза гарантирующего управления запасами в дискретных цепях поставок с неопределенными транспортными запаздываниями в условиях действия неизвестного, но ограниченного спроса. Получено условие существования гарантирующего регулятора, реализующего закон управления в виде динамической обратной связи по состоянию. С помощью техники ЛМН задача синтеза гарантирующего регулятора, который минимизирует верхнее граничное значение квадратичного критерия качества, сведена к задаче полуопределенного программирования.

Список литературы

1. Zhu X.L. New results of stability analysis for systems with time-varying delay / X.L. Zhu, G.H. Yang // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2010. – № 20. – P. 596-606.

2. Chang S.S.L. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters / S.S.L. Chang, T.K.C. Peng // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1972. – AC-17 (4). – P. 474-483. – DOI: 10.1109/JACC.1971.4169642.

3. Moheimani S.O.R. Optimal quadratic guaranteed cost control of a class uncertain time-delay systems / S.O.R. Moheimani, I.R. Petersen // IEE Proceedings – Control Theory and Applications. – 1997. – № 144 (2). – P. 183-188.

4. Yu L. Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with both state and input delays / L. Yu, F. Gao // Journal of the Franklin Institute. – 2001. – № 338. – P. 101-110.

5. Баландин Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. – Москва: Физматлит, 2007.

6. Bertsekas, D.P. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / D.P. Bertsekas, I. Rhodes // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1971. – № 16. – P. 117-128.

7. Афанасьев В.Н. Гарантированное управление нелинейными объектами / В.Н. Афанасьев. – Москва: Московский государственный институт электроники и математики, 2012.

8. Albert A.E. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse / A.E. Albert. – New-York, NY: Academic Press, 1972.

9. Дорофеев Ю.И. Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием LMN / Ю.И. Дорофеев // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Харків: ХУПС, 2014. – Вип. 4 (41). – С. 34-41.+

10. Поляк Б.Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств) / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, П.С. Щербаков. – Москва: ЛЕНАНД, 2014.

11. Petersen I.R. Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems / I.R. Petersen, D.C. McFarlane, M.A. Rotea // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 1998. – № 8. – P. 649-657. – DOI: 10.1002/(SICI)1099-1239(19980715)8:8<649::AID-RNC334>3.0.CO;2-6.

12. Grant M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1 [Електронний ресурс] / M. Grant, S. Boyd. – Режим доступу до ресурсу: http://cvxr.com/cvx (Accessed 4 August 2017).

References

1. Zhu, X.L. and Yang, G.H. (2010), New results of stability analysis for systems with time-varying delay, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, No. 20, pp. 596-606.

2. Chang, S.S.L. and Peng, T.K.C. (1972), Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-17 (4), pp. 474-483, DOI: 10.1109/JACC.1971.4169642.

3. Moheimani, S.O.R. and Petersen, I.R. (1997), Optimal quadratic guaranteed cost control of a class uncertain time-delay systems, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, No. 144 (2), pp. 183-188.

4. Yu, L. and Gao, F. (2001), Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with both state and input delays, *Journal of the Franklin Institute*, No. 338, pp. 101-110.

5. Balandin, D. V. and Kogan, M. M. (2007), "*Sintez zakonov upravleniya na osnove linejnyh matrichnyh neravenstv*" [*Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities*], Fizmatlit, Moscow, Russia.

6. Bertsekas, D.P. and Rhodes, I. (1971), Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control*, No. 16, pp. 117-128.

7. Afanas'ev, V.N. (2012), "*Garantiruyushchee upravlenie nelinejnymi ob'ektami*" [*Guaranteed cost control of nonlinear objects*], Moskovskij gosudarstvennyj institut ehlektroniki i matematiki, Moscow, Russia.

8. Albert, A.E. (1972), *Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse*, Academic Press, New-York, NY.

9. Dorofieiev, Y.I. (2014), "Sintez sistemy optimal'nogo upravleniya zapasami s diskretnym PID-regulyatorom s ispol'zovaniem LMN" [Synthesis of the optimal inventory control system with a discrete PID-controller using LMI], *Scientific works of Kharkiv National Air Forces University*, No. 4 (41), pp. 34-41.

10. Polyak, B.T., Hlebnikov, M.V. and Shcherbakov, P.S. (2014), "*Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushcheniyah (tekhnika linejnyh matrichnyh neravenstv)*" [*Control of linear systems under external perturbations (the technique of linear matrix inequalities)*], LENAND, Moscow, Russia.

11. Petersen, I.R., McFarlane, D.C. and Rotea, M.A. (1998), Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, No. 8, pp. 649-657, DOI: 10.1002/(SICI)1099-1239(19980715)8:8<649::AID-RNC334>3.0.CO;2-6.

12. Grant, M. and Boyd, S. (2017), *CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1*, http://cvxr.com/cvx (accessed 4 August 2017).

Поступила в редколлегию 6.09.2017
Одобрена к печати 2.11.2017

Відомості про авторів:

Дорофєєв Юрій Іванович
доктор технічних наук доцент
професор кафедри Національного технічного
університету «Харківський політехнічний інститут»,
Харків, Україна
https://orcid.org/0000-0002-7964-1286
e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

Нікульченко Артем Олександрович
асистент кафедри Національного технічного
університету «Харківський політехнічний інститут»,
Харків, Україна
https://orcid.org/0000-0003-2154-291X
e-mail: an@cloudwk.com

Information about the authors:

Dorofieiev Yuri
Doctor of Technical Sciences Associate Professor
Professor of Department of the National Technical University
«Kharkiv Polytechnic Institute»,
Kharkiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-7964-1286
e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

Nikulchenko Artem
Assistant of Department of the National Technical University
«Kharkiv Polytechnic Institute»,
Kharkiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0003-2154-291X
e-mail: an@cloudwk.com

ОПТИМАЛЬНЕ ГАРАНТУЮЧЕ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ В ЛАНЦЮГАХ ПОСТАВОК В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНИХ ЗАПІЗНЕНЬ

Ю.І. Дорофєєв, А.О. Нікульченко

У статті запропоновано підхід до розв'язання задачі синтезу гарантуючого керування запасами в дискретних ланцюгах поставок з невизначеними транспортними запізненнями і квадратичною функцією вартості в умовах дії невідомого, але обмеженого попиту та наявності обмежень на значення керуючих дій. Задача зводиться до синтезу закону керування у вигляді динамічного зворотного зв'язку за сигналом неузгодженості між готівковими та страховими рівнями запасів, який забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи і гарантує, що значення функції вартості не перевищує деяку верхню межу для всіх допустимих невизначеностей. Достатні умови існування таких регуляторів отримані на основі методу інваріантних еліпсоїдів за допомогою техніки лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Параметризоване зображення гарантуючих регуляторів (якщо вони існують) представлено в термінах допустимих рішень для деякої сукупності ЛМН. Сформульовано задачу напіввизначеного програмування для синтезу оптимального гарантуючого регулятора, який мінімізує верхню межу функції вартості для замкнутої системи. Розглянуто чисельний приклад.

Ключові слова: *керування запасами, гарантуюче керування, метод інваріантних еліпсоїдів, функціонал Ляпунова-Красовського, лінійна матрична нерівність, задача напіввизначеного програмування.*

OPTIMAL GUARANTEED COST INVENTORY CONTROL IN SUPPLY CHAINS WITH UNCERTAIN DELAYS

Yu. Dorofieiev, A. Nikulchenko

An approach to solve guaranteed cost inventory control synthesis problem in discrete-time supply chains with uncertain transport delays and a quadratic cost function with "unknown but bounded" demand and the availability of non-symmetric constraints on the values of control inputs is proposed. The value of delays in each period is assumed to be unknown, but bounded by some maximum value. The problem is to design a dynamic feedback control law with respect to deviation between on hand and safety stock levels such that the closed-loop cost function value do not exceed specified upper bound for any admissible uncertainties. Sufficient conditions for the existence of such controllers are obtained on the basis of the invariant ellipsoids method using the technique of linear matrix inequalities (LMI). A parametrized characterization of the guaranteed cost controllers (if they exist) is given in terms of the feasible solution to a certain LMI set. The problem of semidefinite programming to produce the optimal guaranteed cost controller which minimizes the upper bound of the closed-loop cost function is formulated. Free specialized packages based on the MATLAB system are used for solving of the above problem. The important property of the obtained solution is the asymptotic stability of controlled supply chains which is guaranteed by the development of the Lyapunov direct method using Lyapunov-Krasovskii functional. A numerical example is provided.

Keywords: *inventory control, guaranteed cost control, invariant ellipsoids method, Lyapunov-Krasovskii functional, linear matrix inequality, semidefinite programming.*