УДК 51(083):621.3

І.М. Ратніков[1], О.В. Федоровський[2]

[1]*Державний науково-дослідний інститут авіації, Київ*
[2]*Миколаївський спеціалізований центр бойової підготовки авіаційних фахівців ЗСУ, Миколаїв*

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ДИНАМІКИ ЗМІНИ ЗАТРИМКИ СИГНАЛУ ПРИ ЗМІНІ ПОЛОЖЕННЯ В ПРОСТОРІ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ

Розроблено математичний опис динаміки зміни затримки сигналу від літального апарату, яка повністю описується динамікою зміни дальності до літального апарату, що адекватно описує плавну зміну параметру та враховує його різку зміну. Крім того в математичному описі передбачене коректне обмеження зростання дисперсії швидкості змінення затримки сигналу із часом, яке залежить від типу літального апарата (аеродинамічних властивостей) і особливостей його переміщень.

Ключові слова: *математична модель, математичний опис, затримка сигналу, модель динаміки зміни параметру, адекватність відтворення процесу зміни затримки сигналу.*

Вступ

Постановка проблеми. В задачах фільтрації параметрів радіосигналів апріорні відомості про повідомлення та шум можуть задаватися в різній формі: або в вигляді багатомірних щільностей вірогідності, або в вигляді диференційних рівнянь з заданими початковими умовами (детермінованими або випадковими).

Маючи ці апріорні відомості, а також доступному безпосередньому спостереженню $\xi(t)$ на текучому інтервалі часу $[0,T]$, для кожного T формується апостеріорна щільність вірогідності, або щільність вірогідності повідомлення $\lambda(t)$, котра дозволяє отримати його оцінку $\hat{\lambda}(t)$ за любим з обраних критеріїв.

Як відомо [1], в алгоритмах фільтрації відокремлюється в явному вигляді вплив апріорного розподілу $p_{pr}(\lambda_0)$ та спостереження на оцінку й дисперсію похибки, що, в свою чергу, призводить до необхідності, під час синтезу алгоритмів фільтрації, використання точних апріорних моделей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для отримання значень $\hat{\tau}(t)$ оцінки затримки сигналу за спостереженням

$$\xi(t) = S(t, \tau(t)) + w(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

де $\tau(t)$ – істинне значення затримки сигналу $S(t)$, w(t) – білий гаусівський шум та штучні перешкоди, [0, T] – інтервал часу польоту, що аналізується, може бути застосований добре розроблений апарат теорії оптимальної нелінійної фільтрації [1]. У цьому випадку відповідно до байєсівського підходу синтез працездатних алгоритмів фільтрації ґрунтується на використанні апріорних моделей динаміки зміни параметрів, що фільтруються. В якості таких моделей на практиці зазвичай застосовують [2, 3] вінерівський процес:

$$\frac{dx(t)}{dt} = n(t), \tag{2}$$

або гауссівський процес виду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\beta x(t) + n(t). \tag{3}$$

Тут $x(t)$ – випадковий параметр, що підлягає фільтрації; $n(t)$ – білий гауссівський шум, а β – коефіцієнт, що характеризує ширину спектра флуктуацій випадкового параметра $x(t)$.

Широке розповсюдження моделей (2), (3) пояснюється, у першу чергу, можливістю суттєвого спрощення як процедури синтезу, так і безпосередньої практичної реалізації алгоритмів фільтрації.

Однак використання моделі (2) або (3) у завданні фільтрації затримки сигналу некоректно, принаймні, за двох причин.

По-перше, опис динаміки зміни затримки сигналу абсолютно випадковим процесом у вигляді білого шуму є фізично неадекватним реальному процесу зміни дальності до ЛА при пілотуванні.

По-друге, застосування наведених моделей для фільтрації $\tau(t)$ вступає в протиріччя з відомими постулатами Ейнштейна. Дійсно, у правих частинах рівнянь (2), (3) міститься білий шум, дисперсія якого, як відомо, дорівнює нескінченності. Ця обставина не виключає виконання нерівності $\left|\frac{d\tau}{dt}\right| > c$, де c – швидкість світла.

Формулювання мети статті (постановка завдання). Актуальним науковим завданням є створення математичної моделі, яка адекватно та реалістично відображає динаміку зміни затримки сигналу при зміні положення в просторі літального апарату.

При побудові моделі будемо виходити з того, що вона повинна:

– бути досить простою для практичної реалізації й, у той же час, забезпечувати необхідну точність оцінки $\hat{\tau}(t)$;

– враховувати реальність процесу зміни дальності до ЛА при пілотуванні;

Математичний опис динаміки зміни затримки сигналу повністю описує динаміку зміни дальності до ЛА, виходячи з прямої залежності [5]:

$$D(t) = \tau(t) \times c\,, \tag{4}$$

де $D(t)$ – істинне значення дальності між ЛА; $\tau(t)$ – істинне значення затримки сигналу; c – швидкість світла.

Таким чином, поточна інформація $\xi(t)$ про зміну дальності до об'єкта формально може бути представлена у вигляді (1).

Виклад основного матеріалу

Оскільки процес управління ЛА здійснюється безупинно, потрібно спочатку отримати рівняння моделі в безперервному часі, а потім, за необхідністю, провести дискретизацію. Будемо вважати, що нормальне змінення дальності здійснюється з постійною швидкістю $\nu(t) = dD/dt = \mathrm{const}$, а зміна дальності в процесі пілотування ЛА є збурюванням нормального змінення. При цьому рівняння для змінення дальності в одному просторовому просторі можна представити у вигляді:

$$\frac{d\vec{\lambda}(t)}{dt} = F\vec{\lambda}(t) + Ga(t)\,, \tag{5}$$

де $\vec{\lambda}(t) = \left|D(t), \nu(t)\right|^T$; $D(t)$ – значення дальності в момент часу t; $\nu(t) = dD(t)/dt$ – швидкість змінення дальності; $a(t) = d\nu(t)/dt$ – прискорення змінення дальності, $F = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $G = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Відхилення значення дальності від нормального змінення може бути охарактеризовано дисперсією (максимальною величиною) відхилення та постійною часу (тривалістю) відхилення. Відхилення від нормального змінення і прискорення є корельованими у часі: якщо змінення дальності здійснюється із прискоренням у момент часу t , то при досить малих значеннях τ воно буде здійснюватися із прискоренням і в момент часу $(t+\tau)$. Для опису кореляційної функції $K_a(\tau)$ прискорення зміни дальності приймемо вираз:

$$K_{a(\tau)} = \sigma_a^2 e^{-\alpha|\tau|}, \alpha \ge 0\,, \tag{6}$$

де σ_a^2 – дисперсія прискорення змінення дальності, α – величина, зворотна постійної часу прискорення.

Для розрахунку величини σ_a^2 скористаємося графічним поданням щільності ймовірності прискорення змінення дальності (рис. 1). При пілотуванні ЛА максимальне прискорення змінення дальності $D_m\,(-D_m)$ можливе з імовірністю P_m.

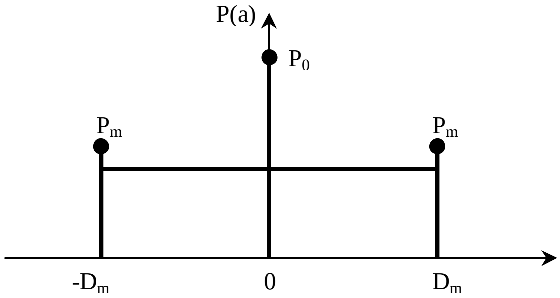

Рис. 1. Щільність ймовірності прискорення

Прискорення відсутнє з імовірністю P_0 й може приймати будь-яке значення з інтервалу $(-D_m, D_m)$ з рівномірною щільністю ймовірності $P(a) = \dfrac{1-(P_0+2P_m)}{2D_m}$. У такому випадку

$$\sigma_a^2 = \int_{-D_m}^{D_m} a^2 \left[\frac{1-(P_0+2P_m)}{2D_m}\right] da + 0 \cdot P_0 +$$

$$+(-D_m)^2 P_m + D_m^2 P_m = \frac{D_m^2}{3}(1 - 4P_m - P_0).$$

Використовуючи метод Вінера-Колмогорова [1] і кореляційну функцію (6), представимо прискорення змінення дальності через білий шум. Для цього запишемо перетворення Лапласа від $K_a(\tau)$:

$$\Theta\left[K_a(\tau)\right] = -\frac{2\alpha\sigma_a^2}{(p-\alpha)(p+\alpha)} = L(p)L(-p)W(p)\,, \tag{7}$$

де $L(p) = \dfrac{1}{p+\alpha}$, $W(p) = 2\alpha\sigma_a^2$.

Величина $L(p)$ є перетворенням Лапласа від «відбілюючого» фільтра для $a(t)$, а $W(p)$ - перетворенням білого шуму, що формує $a(t)$. Результуюче рівняння для прискорення прийме вигляд:

$$\frac{da(t)}{dt} = -\alpha a(t) + n_a(t)\,. \tag{8}$$

Кореляційна функція $K_n(\tau) = 2\alpha\sigma_a^2\delta(\tau)$, де $\delta(\tau)$ – дельта-функція.

Обмеження зростання дисперсії швидкості змінення дальності із часом може бути досягнуте за рахунок введення в рівняння для швидкості додаткового («гальмуючого») доданка $[-\gamma\nu(t)]$, де γ залежить від типу ЛА (аеродинамічних властивостей) і особливостей його переміщень. При цьому рівняння для змінення дальності (в одному просторовому вимірі), яке виражене через білий шум, записуються у вигляді:

$$\frac{d\vec{\lambda}(t)}{dt} = F'\vec{\lambda}(t) + G'n_a(t)\,, \tag{9}$$

де $\vec{\lambda}(t) = \left|D(t), \nu(t), a(t)\right|^T$, $F' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{vmatrix}$, $G' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Змінення дальності між ЛА при виконанні різких маневрів на коротких дистанціях може бути описано [1] розривним марківським процесом $\theta(t)$, що представляє собою послідовність випадкових у часі рідких прямокутних відео імпульсів прискорення змінення дальності. Імпульси мають випадкові тривалості і амплітуди $p(\theta)$, що розподілені за нормальним законом. Інтервали між імпульсами, які описуються переходом $\theta(t)$ з нульового стану в будь-який інший,відмінний від нуля стан, або зворотним переходом, розподілені за експонентним законом з параметрами μ_0 і μ_1 відповідно. Апріорна щільність імовірності такого розривного процесу $\theta(t)$ описується інтегродиференційним рівнянням Колмогорова-Феллера [4]:

$$\frac{\partial p_{pr}(t,\theta)}{\partial t} = -f(t,\theta) + \mu_0 p(\theta)\int_{-\Delta}^{\Delta} p_{pr}(t,\theta)\partial\theta + \mu_1\delta(\theta)\int_{\Phi} p_{pr}(t,\theta)\partial\theta, \quad (10)$$

де $f(t,\theta) = \begin{cases} \mu_0 p_{pr}(t,\theta), & \theta = 0, \\ \mu_1 p_{pr}(t,\theta), & \theta \neq 0. \end{cases}$

Загальну область інтегрування в (10) розподілено на область $(0-\Delta, 0+\Delta)$ і область Φ, що залишається. Таке розподілення, яке відрізняє (10) від класичного представлення рівняння Колмогорова-Феллера, породжено характером імпульсного процесу $\theta(t)$, що розглядається. Остаточно система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D(t)}{\partial t} = \nu(t), \\ \dfrac{\partial \nu(t)}{\partial t} = -\gamma\nu(t) + a(t) + \theta(t), \\ \dfrac{\partial a(t)}{\partial t} = -\alpha a(t) + n_a(t), \end{cases} \quad (11)$$

яка доповнено рівнянням (10), буде включена до повної математичної моделі, що описує апріорні відомості про динаміку зміни відстані між ЛА.

Висновки

Рівняння (10), (11) отримані з основних фізичних передумов, які об'єктивно відображають процедуру зміни дальності до ЛА при пілотуванні, що вигідно відрізняє їх від рівнянь (2), (3). За рахунок дворазового інтегрування абсолютно випадкового процесу забезпечується опис плавного, адекватного реальному, змінення відстані до ЛА. Крім того, в моделі передбачене коректне обмеження зростання дисперсії швидкості змінення дальності із часом.

Модель динаміки зміни затримки сигналу повністю описується динамікою зміни дальності до ЛА, виходячи з залежності (4).

Таким чином, розроблена модель, незважаючи на свою відносну простоту, досить точно враховує плавне змінення затримки сигналу від сталого стану та задовільно описує різку зміну стану, яка обумовлена дискретним процесом $\theta(t)$ змінення затримки сигналу.

Список літератури

1. *Тихонов В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 2004. – 608с.*
2. *Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов / Ю.Г. Сосулин. – М.: Сов. радио, 1978. – 320 с.*
3. *Тихонов В.И. Объединенная синхронизация в радиотехнических системах / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов // Радиотехника. – 1986. – Т. 39, №4. – С. 3-10.*
4. *Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 408 с.*
5. *Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации / Ю.Г. Сосулин. – М.: Радио и связь, 1971. – 244 с.*

Надійшла до редколегії 26.05.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.М. Фоменко, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

И.Н. Ратников, А.В. Федоровский

Разработано математическое описание динамики изменения задержки сигнала от летательного аппарата, которая полностью описывается динамикой изменения дальности до летательного аппарата, что адекватно описывает плавное изменение параметра и учитывает его резкое изменение. Кроме того, в математическом описании предусмотрено корректное ограничение увеличения дисперсии скорости изменения задержки сигнала по времени, которое зависит от типа летательного аппарата (аэродинамических свойств) и особенностей его перемещений.

Ключевые слова: *математическая модель, математическое описание, задержка сигнала, модель динамики изменения параметра, адекватность воссоздания процесса изменения задержки сигнала.*

MATHEMATICAL DESCRIPTION SPEAKERS CHANGE THE DELAY OF THE SIGNAL WHEN CHANGE THE POSITION IN SPACE OF THE FLYING MACHINE

I.N. Ratnikov, A.V. Fedorovsky

The mathematical description speakers change the delay of the signal is Designed from flying machine, which is completely described by track record of the change to range before flying machine that adequately describes fluent change the parameter and takes into account its sharp change. Besides, in mathematical description is provided correct restriction of the increase to dispersions to velocities of the change the delay of the signal on time, which depends on type of the flying machine (aerodynamic characteristic) and particularities of its displacement.

Keywords: *mathematical model, mathematical description, delay of signal, model of dynamics of change of parameter, adequacy of recreation of process of change of delay of signal.*