

УДК 621.34:004.7

С.Г. Семенов¹, Е.В. Мелешко², Я.В. Илюшко³¹ *Национальный технический университет «ХПИ», Харьков*² *Кировоградский национальный технический университет, Кировоград*³ *Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МУЛЬТИСЕРВИСНОГО КАНАЛА СВЯЗИ НА ОСНОВЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ GERT-СЕТИ

Проведен анализ подходов математического моделирования информационно-телекоммуникационных систем в целом, и возможностей математического моделирования современных телекоммуникационных сетей с помощью GERT-систем в частности. Разработана математическая модель мультисервисного канала связи на основе экспоненциальной GERT-сети. Получено аналитическое выражение для расчета плотности распределения времени передачи сообщения в канале связи сети NGN. Доказана теорема о невозможности порождения полюсов второго и третьего порядка, определенным в результате математического моделирования, многочленом.

Ключевые слова: мультисервисный канал связи, математическая модель, граф, сети NGN, GERT-сети.

Введение

Постановка проблемы. В настоящее время в связи с развитием информационных технологий, усложнением микропроцессорных и микроконтроллерных устройств, совершенствованием математического и программного обеспечения телекоммуникационных систем возникает необходимость в разработке новых протоколов обработки и обмена данными. При этом многие возникающие задачи, связанные с процессами оптимизации, тестирования, оценки вероятностно-временных характеристик, параметров оперативности, безопасности, надежности, отказоустойчивости телекоммуникаций значительно упрощаются, если их предварительно решать с помощью математических или имитационных моделей.

Анализ показал, что при решении задач математического моделирования информационно-телекоммуникационных систем в настоящее время используется целый ряд подходов, наиболее результативные из которых базируются на использовании графовых моделей и комбинаторных методов расчета [5], потоковых моделей и методов анализа сетей [4, 6], нейронных сетей, тензорных моделей [6] а также аппарата марковских управляемых случайных процессов [2].

Кроме того, получили свое развитие средства решения оптимизационных задач, формализуемых на основе данных моделей. Это, прежде всего, аналитические методы, методы математического программирования, эвристические методы и др. [1].

Проведенные исследования показали, что большинство указанных подходов моделирования имеют как достоинства, так и недостатки. Несмотря на анонсированную точность моделирования большинство недостатков современных математических моделей (тензорные, нейронные сети и др.) связано с высокой вычислительной сложностью их реализации. В то же время простота графовых моделей, а также аппарата марковских управляемых случайных

процессов в совокупности с новыми нестандартными подходами моделирования позволяет и в настоящее время успешно их использовать при исследовании статистических процессов в телекоммуникационных системах и сетях.

Проведенные исследования показали, что одной из научных проблем математического моделирования телекоммуникационных систем является отсутствие эффективных по времени выполнения и точности методов нахождения закона распределения, характеризующего выходную случайную величину. Это не дает возможности проводить более глубокий анализ проектируемой или действующей телекоммуникационной системы. В то же время ряд подходов, позволяющих решить указанную проблему, остаются не исследованными.

Одним из таких нестандартных подходов математического моделирования является использование графо-аналитических моделей GERT [10].

Анализ литературы [10, 11] показал, что система GERT может быть использована для моделирования сложных технических систем при выполнении следующих условий. Процесс функционирования системы можно рассматривать через последовательные переходы из состояния в состояние, характеризующие определенные события. Каждому из состояний соответствует определенная вероятность. Переход системы из состояния в состояние связывается с выполнением некоторой операции, описываемой случайной величиной с известным законом распределения.

В настоящее время в литературе [11] рассмотрены ряд примеров использования GERT-систем при моделировании сетей передачи данных. Однако ряд ограничений (однородность обрабатываемых входных данных, использование одного протокола транспортного уровня и др.) не позволяют в полной мере использовать эти модели в сетях с гибридной архитектурой и разнородными потоками данных (NGN сетях). Поэтому разработка математической

моделі мультисервисного каналу зв'язу на основі GERT-сеті являється актуальною науковою задачею

Основная часть

Проведенні дослідження процесу передачі даних в мультисервисних каналах зв'язу показали, що час передачі кадрів, інформаційних пакетів, повідомлень протоколами транспортного рівня і рівня доступу мережі NGN можна описувати експоненціальними розподілами або розподілами Ерланга [7 – 9]. Назвемо GERT-сеті, всі дуги яких характеризуються експоненціальними розподілами, експоненціальними GERT-сетями. Для таких мереж в ряді практичних випадків кінцевий результат може бути представлений в аналітичному вираженні, що дозволяє проводити порівняльні дослідження і вирішувати оптимізаційні задачі.

Розглянемо процес передачі даних і розробимо математичну модель алгоритму передачі повідомлення в мультисервисному каналі зв'язу на основі GERT-сеті, представлена на рис. 1.

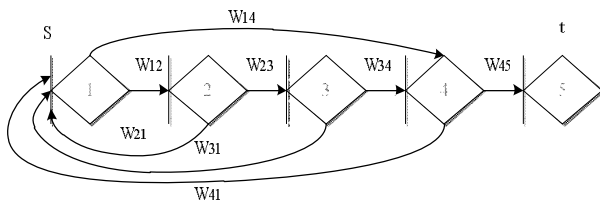


Рис. 1. Модель алгоритму передачі повідомлення в мультисервисному каналі зв'язу

В представленій мережі вузли графа інтерпретуються станами каналу зв'язу ТКС, а гілки графа – ймовірно-часовими характеристиками. Важливою особливістю процесу передачі мультисервисної інформації в мережах NGN є використання всього спектру протоколів транспортного рівня і рівня доступу. В частині використання протоколів TCP і UDP в відповідності з набором використовуваних мережних додатків. На рис. 1 гілка (1, 2) характеризує час передачі кадру (інформаційного пакета) від передатчика до приймача. В стані 2 здійснюється контроль цілості прийнятих даних, і оцінка службових полів на предмет їх відповідності заданим вимогам. Гілки (2, 3); (2, 1) відповідають режиму роботи протоколу TCP,

і задають випадковий час передачі квитанцій про результаті контролю правильності передачі кадру от приймача до передатчика. Вузол 3 відображає стан системи в момент перевірки номера кадру. В цьому стані визначається, чи прийнятий кадр проміжним або останнім в переданому повідомленні. Якщо прийнятий кадр є проміжним, то відповідна цьому стану системи інформація в вигляді квитанції передається передатчику (гілка (3, 1)). В випадку якщо прийнятий кадр є останнім в повідомленні, то система приєднує даний кадр до загального набору прийнятих кадрів і здійснює збирання повідомлень в відповідності з номерами кадрів. Випадковий час збирання кадрів задається гілкою (3, 4). Результати збирання повідомлення в вигляді відповідних квитанцій передаються передатчику, що відповідає гілці (4, 1). Успішна збирання повідомлення переводить систему в стан готовності 5. При передачі даних, в відповідності з алгоритмами обробки даних протоколу UDP, рух кадрів в представленій мережі відповідає гілці (1, 4), при цьому вважається, що ймовірність вибору цієї дуги відома. Гілки (2, 3); (2, 1); (3, 1); (3, 4) і (4, 1) можна характеризувати одним і тим же параметром розподілу, так як вони задають схожі операції передачі службової інформації від приймача до передатчика. Характеристики гілок моделі представлені в табл. 1.

Таблиця 1

Характеристики гілок моделі

№ п/п	Гілка	W-функція	Ймовірність	Виробнича функція моментів
1	(1,2)	W ₁₂	p ₁	λ ₂ / (λ ₂ - s)
2	(1,4)	W ₁₄	1-p ₁	λ ₁ / (λ ₁ - s)
3	(2,3)	W ₂₃	p ₂	λ ₃ / (λ ₃ - s)
4	(2,1)	W ₂₁	1-p ₂	λ ₃ / (λ ₃ - s)
5	(3,1)	W ₃₁	1-p ₃	λ ₃ / (λ ₃ - s)
6	(3,4)	W ₃₄	p ₃	λ ₃ / (λ ₃ - s)
7	(4,1)	W ₄₁	1-p ₄	λ ₃ / (λ ₃ - s)
7	(4,5)	W ₄₅	p ₄	λ ₄ / (λ ₄ - s)

Еквівалентна W-функція часу передачі повідомлення дорівнює:

$$W_E(s) = (W_{14}W_{45} + W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}) / (1 - W_{12}W_{21} - W_{12}W_{23}W_{31} - W_{12}W_{23}W_{34}W_{41} - W_{14}W_{41}) =$$

$$= \frac{p_4 \lambda_4 (\lambda_3 - s) \left(q_1 \lambda_1 (\lambda_2 - s) (\lambda_3 - s)^2 + p_1 p_2 p_3 \lambda_2 \lambda_3^2 (\lambda_1 - s) \right)}{(\lambda_4 - s) \left(p_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - s) (\lambda_3 - s)^2 \left(\frac{(\lambda_2 - s) (\lambda_3 - s)}{p_1 \lambda_2 \lambda_3} - \frac{p_2 q_3 \lambda_3}{\lambda_3 - s} - \frac{p_2 p_3 q_4 \lambda_3^2}{(\lambda_3 - s)^2} - \frac{q_1 q_4 \lambda_1 (\lambda_2 - s)}{p_1 \lambda_2} - q_2 \right) \right)}$$

де 1 - p₁ = q₁; 1 - p₂ = q₂; 1 - p₃ = q₃; 1 - p₄ = q₄.

Особливості процесу передачі даних в мультисервисному каналі зв'язу характеризуються різноманітністю циркулюючих в ньому інформаційних потоків, і, відповідно, використанням

різних протоколів (TCP, UDP і др.) транспортного рівня і рівня доступу [9]. При цьому можливі різні випадки організації зворотного зв'язу (цикли відправитель-получатель-відправитель) через службові повідомлення (протокол TCP). На

рис. 1 эти циклы зафиксированы в виде переходов

$$W_{12} \rightarrow W_{21}; W_{12} \rightarrow W_{23} \rightarrow W_{31};$$

$$W_{12} \rightarrow W_{23} \rightarrow W_{34} \rightarrow W_{41}; W_{14} \rightarrow W_{41}.$$

Для GERT-сетей с циклами не существует простых методов нахождения особых точек функции $\Phi_E(z)$ замены действительных переменных ($z = -i\zeta$), где ζ – действительная переменная. Это объясняется тем, что для нахождения особых точек необходимо решать нелинейные уравнения, и чем сложнее структура GERT-сети, тем сложнее и исходное уравнение. Поэтому в ходе моделирования предлагается прибегнуть к подобной замене. Выполняя комплексное преобразование $z = -s$, получим

$$\Phi(z) = \frac{uz^3 + wz^2 + vz + h}{(\lambda_1 + z)(\lambda_3 + z)(\lambda_4 + z)(z^3 + az^2 + bz + c)}, \quad (1)$$

где $w = q_1\lambda_1(\lambda_2 + 2\lambda_3)$; $h = \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2(q_1 + p_1p_2p_3)$;

$v = \lambda_3(q_1\lambda_1(2\lambda_2 + \lambda_3) + p_1p_2p_3\lambda_2\lambda_3)$; $u = q_1\lambda_1$;

$a = 2\lambda_3 + \lambda_2 - q_1q_4\lambda_1\lambda_3/(\lambda_1 + z)$; $b = \lambda_3(\lambda_3 + 2\lambda_2 - p_1q_2\lambda_2\lambda_3 - \frac{q_1q_4\lambda_1\lambda_3(\lambda_3 + \lambda_2)}{\lambda_1 + z} - \frac{p_1p_2q_3\lambda_2\lambda_3^2}{\lambda_3 + z})$;

$c = \lambda_2\lambda_3^2\left(1 - p_1q_2 - \frac{q_1q_4\lambda_1}{\lambda_1 + z} - \frac{p_1p_2\lambda_3(q_3 + q_4)}{\lambda_3 + z}\right)$.

Плотность распределения вероятностей времени передачи сообщения:

$$\varphi(x) = (2\pi i)^{-1} \times \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx} \times \frac{uz^3 + wz^2 + vz + h}{(\lambda_1 + z)(\lambda_3 + z)(\lambda_4 + z)(z^3 + az^2 + bz + c)} dz, \quad (2)$$

где операция интегрирования выполняется с помощью интеграла Бромвича-Вагнера [1].

Способ интегрирования зависит от того, имеет ли функция $\Phi(z)$ только простые полюсы, или полюсы некоторого порядка. В том случае, когда функция $\Phi(z)$ имеет только простые полюсы, выражение $e^{zx}\Phi(z)$ можно представить в виде:

$$e^{zx}\Phi(z) = \frac{e^{zx}(uz^3 + wz^2 + vz + h)}{z^6 + g_5z^5 + g_4z^4 + g_3z^3 + g_2z^2 + g_1z + g_0} = \mu(z)/\psi(z), \quad (3)$$

где $g_5 = a + \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4$; $g_4 = b + a(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3$; $g_3 = c + b(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) + a(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3) + \lambda_1\lambda_3\lambda_4$; $g_2 = a(\lambda_1\lambda_3\lambda_4) + b(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3) + c(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)$;

$g_1 = b(\lambda_1\lambda_3\lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3$; $g_0 = c(\lambda_1\lambda_3\lambda_4)$.

Тогда плотность распределения времени передачи сообщения равна:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^6 \text{Res} [e^{zx}\Phi(z)] = \sum_{k=1}^6 \frac{\mu(z_k)}{\psi'(z_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^6 \frac{e^{zx}(uz_k^3 + wz_k^2 + vz_k + h)}{6z_k^5 + 5g_5z_k^4 + 4g_4z_k^3 + 3g_3z_k^2 + 2g_2z_k + g_1} \dots (4)$$

Функция $\Phi(z)$ кроме простых полюсов, определяемых корнями уравнения $yz^3 + az^2 + bz + c = 0$, может иметь и полюса второго или третьего порядка. Это возможно в тех случаях, когда значение λ_1 , λ_3 и λ_4 совпадают друг с другом или равны значению корней z_3 ; z_4 ; z_5 ; z_6 . В этих случаях плотность распределения времени передачи сообщения $\varphi(x)$ находится по формуле нахождения вычетов r_{-1} от полюсов z_k порядка n :

$$r_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{n-1} \left((z - z_k)^n e^{zx} \Phi(z) \right)}{dz^{n-1}}. \quad (5)$$

Выражение 1 представляет собой дробно-рациональную функцию относительно z со степенью знаменателя большей, чем степень числителя. Поэтому для него выполняется условия леммы Жордана [1]. Функция $\Phi(z)$ имеет полюсы в точках $z_1 = -\lambda_1$; $z_2 = -\lambda_3$ и $z_3 = -\lambda_4$. Многочлен $yz^3 + az^2 + bz + c$ порождает еще три полюса. Решение уравнения

$$yz^3 + az^2 + bz + c = 0 \quad (6)$$

может быть найдено любым методом, например, по формулам Виета [3]. В результате вычисляются еще три особые точки z_4, z_5, z_6 .

Теорема 1. Многочлен $yz^3 + az^2 + bz + c$ не может породить полюсов второго и третьего порядка.

Доказательство. Коэффициенты уравнения 6 больше нуля. Поэтому, если это уравнение имеет действительные корни, то, очевидно, ни один из них не может быть положительным. Если уравнение 6 имеет отрицательные действительные корни, то они могут быть второй или третьей кратности. Действительно, если предположить, что многочлен $yz^3 + az^2 + bz + c$ порождает полюс третьего порядка в точке $z = -\mu$, то $(z + \mu)^3 = z^3 + 3z^2\mu + 3z\mu^2 + \mu^3$. Так как $\eta < 0$, то и $\mu^3 < 0$, что противоречит соотношению

$\mu^3 = c = \lambda_2\lambda_3^2 \times \left(1 - p_1q_2 - \frac{q_1q_4\lambda_1}{\lambda_1 + z} - \frac{p_1p_2\lambda_3(q_3 + q_4)}{\lambda_3 + z} \right) > 0$
 $(p_1q_2 + q_1q_4\lambda_1/(\lambda_1 + z) + p_1p_2\lambda_3(q_3 + q_4)/(\lambda_3 + z))$ всегда меньше 1), т.е. многочлен $yz^3 + az^2 + bz + c$ не может породить полюсов третьего порядка.

Аналогичным образом доказывается невозможность порождения рассматриваемым многочленом полюса второго порядка.

Пусть многочлен $yz^3 + az^2 + bz + c$ порождает полюс второго порядка в точке $z = -\mu_1$ и полюс

первого порядку в точке $z = -\mu_2$. Тогда выполняется соотношение:

$$(z + \mu_1)^2 (z + \mu_2) = z^3 + (2\mu_1 + \mu_2)z^2 + (\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2)z + \mu_1^2\mu_2.$$

Так как $\mu_1^2 > 0$, и $\mu_2 < 0$, то $\mu_1^2\mu_2 < 0$. Если $\mu_1^2\mu_2 = c > 0$ то уравнение 6 не может порождать полюсы второго порядка.

В соответствии с основной теоремой алгебры [3] всякая целая рациональная функция n -й степени

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n; \quad (c_n \neq 0, n = 1, 2, \dots)$$

имеет n нулей.

Из теоремы 1 следует, что многочлен $uz^3 + az^2 + bz + c$ может иметь или три разных отрицательных действительных нуля, или один отрицательный действительный нуль и два комплексных сопряженных нуля.

Выводы

Таким образом, на основе экспоненциальной GERT-сети разработана математическая модель мультисервисного канала связи, которая отличается от известных учетом процедур информационного обмена с возможными циклами в соответствии с протоколами транспортного уровня и уровня доступа сетей NGN. Модель может быть использована для исследования информационных процессов в мультисервисных телекоммуникационных сетях, при разработке новых протоколов, алгоритмов и программ управления каналными ресурсами в NGN-сетях.

Применение экспоненциальных стохастических моделей GERT даст возможность использования результатов, полученных в аналитическом виде (функции, плотности распределения) для проведения сравнительного анализа и исследований более сложных информационно-телекоммуникационных систем математическими методами.

Список литературы

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1964. – 772 с.
2. Вишневецкий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В.М. Вишневецкий. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1968. – 431 с.
4. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем / За заг. ред. В.В. Поповського. – Х.: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 564 с.
5. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах: пер. с англ. / Э. Майника; под ред. Е.К. Масловского. – М.: Мир, 1981. – 321 с.
6. Семенов С.Г. Разработка распределенного метода многопутевой маршрутизации, основанного на потоковой модели с предвычислением путей (маршрутов). / С.Г. Семенов, А.А. Можжаев, А.Г. Беленков // 36. науч. пр. «Модельювання та інформаційні технології» – К.: ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова, 2005. – Вип. 32. – С. 189-192.
7. Семенов С.Г. Математическая модель процесса доставки информационных пакетов в компьютерной сети системы критического применения / С.Г. Семенов, И.В. Ильина. // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – Вип. 1(28). – С. 162-165.
8. Семенов С.Г. Распределение канальных ресурсов сетевого оборудования при информационном обмене в единой автоматизированной системе управления / С.Г. Семенов // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 6(33). – С. 307-310.
9. Телекоммуникационные системы и сети: учебное пособие. В 3 томах / Под ред. В.П. Шувалова. – М.: Горячая линия-Телеком, 2005. – Т. 3. – 592 с.
10. Pritsker A.A.B. Modeling and analysis using GERT networks New York : Wiley : Distributed by Halsted Press, 1979.
11. Pritsker A.A.B., Happ W.W. GERT: Graphical Evaluation and Review Technique. Part I. Fundamentals // The Journal of Industrial Engineering (May 1966).

Поступила в редколлегию 6.10.2011

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр. А.А. Можжаев, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МУЛЬТИСЕРВІСНОГО КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ НА ОСНОВІ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ GERT-МЕРЕЖІ

С.Г.. Семенов, С.В. Мелешко, Я.В. Ілюшко

Проведений аналіз підходів до математичного моделювання інформаційно-телекомунікаційних систем в цілому, і можливостей математичного моделювання сучасних телекомунікаційних мереж за допомогою GERT-систем зокрема. Розроблена математична модель мультисервісного каналу зв'язку на основі експоненціальної GERT-мережі. Отриманий аналітичний вираз для розрахунку щільності розподілу часу передачі повідомлення в каналі зв'язку мережі NGN. Доведена теорема про неможливість породження полюсів другого і третього порядку, визначеним в результаті математичного моделювання, многочленом.

Ключові слова: мультисервісний канал зв'язку, математична модель, граф, мережі NGN, GERT-мережі.

MATHEMATICAL MODEL OF MULTISERVICE COMMUNICATION CHANNEL ON BASIS OF EXPONENTIAL GERT-NET

S.G. Semenov, E.V. Meleshko, Ya.V. Ilyushko

The analysis of approaches of mathematical design of the informatively-telecommunication systems is conducted on the whole, and possibilities of mathematical design of modern telecommunication networks by the GERT-net in particular. The mathematical model of multiservice communication channel is developed on the basis of exponential GERT-net. Analytical expression is got for the calculation of closeness of distributing of time of transmission of report in the channel of connection of network of NGN. A theorem is proved about impossibility of generation of poles of the second and third order, certain as a result of mathematical design, by a polynomial.

Keywords: multiservice communication channel, mathematical model, count, networks of NGN, GERT-net.