

УДК 621.317.76.089.68

А.М. Носик<sup>1</sup>, А.П. Нарезній<sup>2</sup>, О.М. Носик<sup>2</sup><sup>1</sup>Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків<sup>2</sup>Метрологічний центр військових еталонів Збройних Сил України, Харків

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕРИТОРІАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНОГО ЕТАЛОНУ ЧАСУ ТА ЧАСТОТИ ВІЙСЬКОВОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

В статті розглянуто метод об'єднання частот територіально розподілених зберігачів часу та частоти. Синтезовано модель формування похибки еталону у вигляді залежності нестабільності частоти від розмірності групи та часу вимірювання. Приведено результати дослідження запропонованої моделі.

**Ключові слова:** груповий еталон часу і частоти, математична модель, шкала часу.

### Вступ

**Постановка проблеми.** Вирішення проблеми забезпечення єдності вимірювань часу і частоти з урахуванням стану, напрямку розвитку і специфічних умов у кожній з держав служить гарантією отримання ними військово-політичної і науково-технічної незалежності.

В Україні одним з перших документів, що визначають нормативні основи національної системи забезпечення єдності вимірювань, разом з Декретом Кабінету Міністрів “Про забезпечення єдності вимірювань” (№ 40-93 від 26 квітня 1993 р.), є його Постанова від 16 березня 1993 р. № 191 “Про утворення Державної комісії єдиного часу та еталонних частот”.

На протязі 1993 – 1995 рр. Комісією із залученням фахівців провідних наукових організацій України було розроблено Державну програму “Створення та розвиток Державної служби єдиного часу та еталонних частот”, затверджену Постановою Кабінету Міністрів № 434 від 16 червня 1995 р. У процесі визначення організаційної структури Державної служби єдиного часу та еталонних частот (ДСЧЧ) було прийнято рішення про створення у її складі на основі метрологічних підрозділів Міністерства оборони, що мають зразкові міри часу і частоти, Центру та пунктів метрологічного контролю сигналів часо-

тно-часової інформації, що використовується споживачами Збройних Сил.

Практичні наслідки неякісного забезпечення держави високоточною частотно-часовою інформацією для оборони України можуть бути катастрофічні:

незначне зниження точності установки частоти сигналу калібрувального генератора радіолокаційної станції може зменшити дальність знаходження повітряної мішені на 15%;

похибка установки частоти зв'язних радіостанцій на 0,1% викликає порушення літеродрукованого зв'язку;

неточність у прив'язці шкали часу зенітно-ракетного комплексу на 1 мкс знижує вірогідність поразки рухомої мішені на 30%;

порушення синхронності роботи радіостанцій радіонавігаційної системи дальньої дії більше ніж на 0,15 мкс не забезпечить безаварійність польотів літальних апаратів і т.д.

**Аналіз публікацій.** Забезпечення єдності часо-частотних вимірювань з підвищенням точності відтворення і зберігання одиниць частоти і часу йде за двома основними напрямками.

Перший з них пов'язаний з удосконаленням і утворенням нових технічних засобів (стандартів частоти і часу). За кордоном з'явилися перші лабораторні зразки таких стандартів, у нас в країні також

ведуться роботи у цьому напрямку. Проте можливості будь-яких технічних засобів обмежені, тому практиці при створенні еталонів широко використовують груповий метод. Пропозиції щодо створення групових засобів вимірювання та можливості їх використання за умов метрологічної автономності було запропоновано у роботі [3].

Другий напрямок підвищення точності пов'язаний з удосконаленням методів статистичного об'єднання результатів вимірювань на групі засобів вимірювальної техніки. Цей напрямок було детально розглянуто у роботі [1]. Виграш у стабільності частоти, залежить від розмірності групового зберігача, тобто числа фізичних приладів – зберігача частоти і часу (ЗЧЧ).

Одним із методів збільшення розмірності групового зберігача може вважатись об'єднання частот ЗЧЧ, територіально розташованих у різних лабораторіях (на різних еталонах). У цьому випадку річ йде про утворення територіально розподіленого групового еталону частоти і (або) часу (ТРГЕ). За таким принципом може бути, побудований еталон частоти і часу, який використовує дані усіх доступних вторинних і відомчих еталонів, а також окремих квантових годинників, які входять у різні технічні системи [2]. Основним фактором, який до найближчого часу стримував реалізацію даної концепції, є дуже висока похибка зовнішніх звірень територіально рознесених зберігачів, яка на прийнятих інтервалах вимірювань суттєво перевищувала, як похибку внутрішніх звірень, так і власну нестабільність частоти зберігачів. На теперішній час з'явилися нові сучасні методи і засоби частотно-часових вимірювань, такі як диференціальні вимірювання за сигналами космічних навігаційних систем ГЛОНАСС і GPS [4]. Так, на базі до 1000 км похибка звірень за частотою буде менше  $1 \times 10^{-14}$  за 10 діб. Отже, використовуючи створену інфраструктуру системи метрологічного контролю ЗС України можливо створення такого територіально розподіленого групового еталону частоти і часу (ТРГЕ).

На даний час мало вивчене питання щодо створення групового еталону та недостатньо досліджений математичний апарат (методологія), який дозволить виявити ступінь впливу різних дестабілізуючих факторів і оцінити потенціальні характеристики такого еталону. При його практичній реалізації неможливо чітко обґрунтувати вимоги до різних апаратурних підсистем і визначити напрямки вкладень матеріальних ресурсів. Тому важливою і актуальною є задача створення математичного апарату, який би дозволяв описати процес формування похибок ТРГЕ, виявити склад факторів та обґрунтувати їх взаємозв'язок і ступінь впливу. На цій основі можуть бути вирішені наступні задачі прямого і зворотного аналізу, які виникають при практичній реалізації даної концепції:

визначити доцільність територіального групування при наявності фіксованого набору технічних засобів і відсутності фінансування на їх модернізацію і розвиток;

визначити об'єкти (технічні засоби) вкладення фіксованого об'єму фінансових ресурсів з метою досягнення максимального ефекту при територіальному групуванні;

визначити склад технічних засобів при проектуванні подібного еталону “з нуля” при відсутності обмежень на фінансування, але при заданих цільових показниках еталону;

нормувати допуски на параметри технічних засобів при фіксованому їх складі, але при наявності фінансових ресурсів на їх модернізацію;

прийняти обґрунтовані рішення про розширення складу, заміну або модернізацію технічних засобів групового еталону при заданих цільових показниках еталону, відсутності обмежень на фінансування, але при умові, що об'єм фінансування повинен бути мінімально необхідним і т.п.

Таким чином, необхідно знайти функцію, яка виражає цільову характеристику ТРГЕ через характеристики елементів, що входять до його складу. Вирішення вище зазначених практичних задач дозволить раціонально використати фінансові ресурси.

**Метою статті** є синтез цільової функції групування ЗЧЧ та створення математичної моделі нестабільності частоти для групового територіально розподіленого еталону.

## Викладення основного матеріалу

Математичну залежність нестабільності частоти від сукупності факторів, що впливають будемо вважати моделлю формування похибки групового еталону. Інтервал часу вимірювання, на якому проводиться статистичне усереднення в ТРГЕ, є мінімальним інтервалом, починаючи з якого можна очікувати підвищення стабільності частоти. На інтервалах вимірювання, які менші інтервалу групування стабільність частоти групового еталону визначається стабільністю частоти “місцевого” еталону. Схематично структура формування стабільності частоти ТРГЕ в залежності від інтервалу вимірювання показано на рис. 1.



Рис. 1. Схема формування частоти групового еталону

На рис. 1 символом  $\tau_n(\text{МЕ})$  позначено час вимірювання, на якому проводиться статистичне групування для одного “місцевого” еталону, а симво-

лом  $\tau_n$ (ТРГЕ) – час вимірювання, на якому групуються рознесені ХЧВ “місцевого” і “віддаленого” еталонів. Значення  $\tau_n$ (МЕ) складає, як правило, одну добу, тому на меншому часі вимірювання стабільності частоти ТРГЕ є стабільність одного фізичного ХЧВ (наприклад, опорного). На інтервалі від  $\tau_n$ (МЕ) до  $\tau_n$ (ТРГЕ) позначається ефект від групування частот на “місцевому” еталоні, і тільки на інтервалах, які перевищують  $\tau_n$ (ТРГЕ), можливо одержати ефект від групування частот рознесених зберігачів. Значення  $\tau_n$ (ТРГЕ) в основному визначається похибкою зовнішніх звірень і в межі повинно прагнути до  $\tau_n$ (МЕ).

Для створення математичної моделі необхідно визначитись з методом статистичного об'єднання частот територіально рознесених зберігачів. При розгляді даного питання необхідно врахувати дві особливості.

По-перше, аналітична одиниця не може існувати сама по собі. Для її “використання”, тобто для доступу до неї, потрібен деякий фізичний носій, який здатний брати участь в безпосередніх фізичних вимірюваннях. Тому аналітична частота (шкала часу) може бути сформована тільки у виді поправки до частоти (шкали часу) реально існуючого приладу. Звичайно для цих цілей вибирається один із групи ЗЧЧ, який прийнято називати опорним.

По-друге, необхідними даними для реалізації процедур статистичного групування являються не абсолютні вимірювання частот зберігачів, а значення відносних різниць частот у парах ЗЧЧ, тобто результати взаємних вимірювань.

У ході пошуку оптимального алгоритму статистичного групування була звернена увага на алгоритм рекурентного оцінювання в просторі станів, відомий за назвою фільтра Калмана. Реалізація цього алгоритму припускає опис процесів поведінки об'єкта (у нашому випадку групи рубідієвих стандартів частоти) й вимірів у вигляді марківських процесів у просторі станів. Варто помітити, що на інтервалах виміру 1 година і більше процес зміни частоти атомного стандарту в часі з великим ступенем вірогідності можна віднести до марківських процесів (без післядії), тому що інтервал виміру в кілька разів перевищує стандартний цикл настроювання резонатора.

Для початку оцінювання параметрів групи зберігачів у просторі станів необхідні апіорні оцінки параметрів кожного зберігача в деякий нульовий момент часу, тобто значення вектора стану  $X(0)$ , а також кореляційна матриця похибок оцінок  $P(0)$ . Матриця  $P(0)$  по суті характеризує точність, з якою нам відомі початкові оцінки  $X(0)$ . Крім того, припустимо, що нам відомі нестабільність частот зберігачів на інтервалі виміру  $h$  і похибки взаємних частотних і шкальних вимірів, тобто кореляційні матриці

$K_w$  і  $K_z$ , відповідно. Далі, починаючи з моменту часу  $k = 1$  алгоритм фільтра Калмана виглядає стандартно:

1) прогнозуємо значення вектора стану:

$$X^*(k) = AX(k-1);$$

2) прогнозуємо очікуваний вимір:

$$Y^*(k) = CX^*(k);$$

3) розраховуємо апіорну дисперсію оцінки:

$$Q(k) = AP(k-1)AT + K_w;$$

4) розраховуємо коефіцієнт підсилення:

$$H(k) = Q(k)CT[CQ(k)CT + KZ]^{-1};$$

5) знаходимо нову оцінку:

$$X(k) = X^*(k) + H(k)[Y(k) - Y^*(k)];$$

6) розраховуємо апостеріорну дисперсію оцінки:  $P(k) = Q(k) - H(k)CQ(k)$ , яка, по-перше, є критерієм якості процедури оцінювання та, по-друге, дозволяє розрахувати апіорну дисперсію оцінки для наступного кроку.

Принцип дії фільтра Калмана, заснований на використанні оновлюючої інформації, яка укладена в так названій нев'язці вимірів  $[Y(k) - Y^*(k)]$ , тобто різниці між реальним і очікуваним результатами вимірів. Ця нев'язка зважується з коефіцієнтом  $H(k)$ , що залежить від складу і точності вимірів (матриць  $C$  та  $K_z$ ). Для простоти ми вважали матрицю вимірів  $C$  стаціонарною, хоча в загальному випадку склад вимірів може мінятися від кроку до кроку.

Вище було зазначено, що у векторі стану утримуються параметри кожного зберігача відносно до якогось умовного нуля. У процесі роботи по рекурентному алгоритму оцінювання фільтр, як би «розставляє» параметри зберігачів у деякій  $N$ -мірній площині відповідно до даних взаємних звірень. Причому, чим стабільніше  $i$ -й зберігач, тобто, чим менше значення  $\sigma_{fi}$ , тим точніше його параметри відтворюються щодо умовного нуля або, тобто більший вплив його параметри роблять на положення самого умовного нуля. Таким чином, на кожному кроці оцінювання умовний нуль являє собою зважену суму похибок прогнозування параметрів усіх вхідних у групу зберігачів. А це власне і є шукані групова частота і шкала атомного часу. В окремому випадку, коли всі значення  $\sigma_{fi}$  рівні, проводиться просте (незважає) усереднення.

У запропонованому методі дві послідовні для традиційного алгоритму задачі: формування групових одиниць (частоти і шкали часу) і оцінка параметрів кожного зберігача щодо цих величин – вирішуються одночасно. Групова частота і шкала часу в явному виді взагалі не формуються, а відразу розв'язується задача оцінки параметрів зберігачів щодо групових одиниць. Для випадку групування територіально рознесених зберігачів за основу візьме-

мо алгоритм статистичного групування, у якому врахуємо похибки внутрішніх і зовнішніх звірень для рознесених ЗЧЧ, точніше – для двох різних груп «місцевих» і «віддалених» зберігачів. На практиці ми спостерігаємо не частоту будь-якого зберігача, а якийсь випадковий процес, що представляє собою композицію власне частоти зберігача і похибок виміру цієї частоти. Для «місцевих» ЗЧЧ на нестабільність частоти накладається похибка внутрішніх звірень, для «віддаленого» же – похибка як внутрішніх, так і зовнішніх звірень.

Для визначення ваг зберігачів внутрішніми звіреннями можна зневажити по двох причинах. По-перше, похибка внутрішніх звірень зневажливо мала в порівнянні з похибкою зовнішніх звірень і власною нестабільністю ЗЧЧ. По-друге, внутрішні звірення присутні для всіх елементів групи, отже, враховуючи їхню малу похибку, не можуть істотно змінити вагову пропорцію.

При ваговому підсумовуванні на групі з  $N$  еталонів-зберігачів середньозважену групову частоту можна визначити так:

$$y_{\text{ГРГЕ}} = \sum_{i=1}^N \omega_i y_i, \quad (1)$$

де  $y_i$  – частота;  $i$ -го зберігача;  $\omega_i$  – ваговий коефіцієнт, приписаний  $i$ -му зберігачеві.

Вагові коефіцієнти територіально розподілених еталонів по методу невизначених коефіцієнтів Лагранжа будуть зворотно пропорційні нестабільності їх частот, в якості характеристики якої використовується дисперсія

$$\omega_i = \frac{1/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N 1/\sigma_i^2}; \quad \sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (2)$$

де  $\sigma^2$  – дисперсія частоти  $i$ -го місцевого талону.

Для стандартів частоти замість класичної дисперсії можна використовувати так названу дисперсію Аллана [2], що стійка до систематичної зміни (дрейфу) частоти. Квадратний корінь з цієї величини називається варіацією Аллана, а у вітчизняній літературі – середнім квадратичним двох виборчим відхиленням.

Для випадку групування територіально рознесених зберігачів за основу візьмемо такий алгоритм:

$$y_{\text{ГР}} = \sum_{i=1}^N \omega_i y_i + \sum_{j=1}^M \omega_j y_j + \sum_{i=1}^{N-1} \omega_i \Delta y_{i-on} + \sum_{j=1}^{M-1} \omega_j \Delta y_{j-oy} + \sum_{j=1}^M \omega_j \Delta y_{oy-on}. \quad (3)$$

З (3) випливає, що нестабільність групового еталона, що складається з  $M$  «віддалених» еталонів, складається з  $N+M$  нестабільностей ЗЧЧ і  $M$  похибок зовнішніх звірень для «віддалених» еталонів-зберігачів.

Для перших чотирьох доданків прийемо, що похибки усіх внутрішніх взаємних звірень статистично незалежні. Крім того, логічно вважати, що п'ятий доданок у цілому статистично незалежний від перших чотирьох. Сам же п'ятий доданок представляє суму по  $M$  однієї і тій ж величини, тому що похибка зовнішнього звірення одна для всіх «віддалених» зберігачів. Статистично це еквівалентно сумі  $M$  корельованих величин, коефіцієнт кореляції між якими в кожній парі дорівнює 1. Оскільки дисперсія суми випадкових величин дорівнює сумі елементів кореляційної матриці, дисперсія п'ятого доданка буде дорівнює сумі з  $M^2$  зважених дисперсій зовнішнього звірення  $\sigma_{\text{ext}}^2$ . Остаточо для дисперсії групової частоти маємо

$$\sigma_{\text{ГР}}^2 = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^M \omega_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \omega_i^2 \sigma_{\Delta i}^2 + \sum_{j=1}^{M-1} \omega_j^2 \sigma_{\Delta j}^2 + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \omega_k \omega_l \sigma_{\text{ext}}^2. \quad (4)$$

Припускаючи, для спільності розгляду, що всі «місцеві» і «віддалені» зберігачі рівностабільні  $\sigma_i = \sigma_j = \sigma$ , а внутрішні звірення в обох групах ЗЧЧ рівноточними  $\sigma_{\Delta i} = \sigma_{\Delta j} = \sigma_{\text{int}}$ , вираження (4) можна привести до виду

$$\sigma_{\text{ГР}}^2 = \sigma^2 (N\omega_i^2 + M\omega_j^2) + \sigma_{\text{int}}^2 ((N-1)\omega_i^2 + (M-1)\omega_j^2) + \sigma_{\text{ext}}^2 M^2 \omega_j^2. \quad (5)$$

У (5) індекси  $i$  та  $j$  для вагових коефіцієнтів збережені для того, щоб розрізнити ваги «місцевих» і «віддалених» зберігачів. Остаточна формула для нестабільності групової частоти ТРГЭ прийме вид

$$\sigma_{\text{ГР}}^2 = \frac{1}{\left[ \frac{N}{\sigma^2} + \frac{M}{\sigma^2 + M\sigma_{\text{ext}}^2} \right]^2} \left\{ \sigma^2 \left[ \frac{N}{\sigma^4} + \frac{M}{(\sigma^2 + M\sigma_{\text{ext}}^2)^2} \right] + \dots + \sigma_{\text{int}}^2 \left[ \frac{N-1}{\sigma^4} + \frac{M-1}{(\sigma^2 + M\sigma_{\text{ext}}^2)^2} \right] + \sigma_{\text{ext}}^2 \frac{M^2}{(\sigma^2 + M\sigma_{\text{ext}}^2)^2} \right\}. \quad (6)$$

Вираз (5) відображає модель формування похибки групового територіально рознесеного еталону. При цьому можна використовувати як квадратичну метрику (5), так і корінь з неї. Як цільову функцію для аналізу також можна використовувати відношення

$$Z = \frac{\sigma_{\text{ГР}}(\text{МЕ})}{\sigma_{\text{ГР}}(\text{ТРГЕ})}, \quad (7)$$

де  $\sigma_{\text{ГР}}(\text{МЕ})$  – нестабільність частоти «місцевого» еталону;  $\sigma_{\text{ГР}}(\text{ТРГЕ})$  – нестабільність частоти групового еталону.

Останнім і найважливішим етапом синтезу будь-якої математичної моделі є підтвердження її

адекватності реальним фізичним процесам. У даному випадку адекватність (6) реальним процесам накопичення похибок у груповому територіально розподіленому еталоні перевірялася методом імітаційного моделювання. Самі результати такого моделювання не представляють особливого інтересу, тому вони виведені за рамки даної роботи. Відзначимо лише, що адекватність моделі (6) з великим ступенем вірогідності підтверджується.

Таким чином, поставлена задача синтезу цільової функції для нестабільності частоти групового територіально розподіленого еталону може вважатися вирішеною.

Для ілюстрації можливостей реалізації моделі розглянемо лише один найпростіший приклад. Допустимо, що нас цікавить можливий вигравш від територіального групування в залежності від числа ЗЧЧ на «місцевому» і «віддаленому» еталоні. Покладемо при цьому, що на деякому інтервалі виміру  $\tau_n$  досяжні наступні значення відносних величин:  $\sigma = 0,5 \cdot 10^{-11}$ ;  $\sigma_{\text{int}} = 0,2 \cdot 10^{-12}$ ;  $\sigma_{\text{ext}} = 5 \cdot 10^{-13}$ ,  $M_1=2$ ,  $M_2=3$ ,  $M_3=4$ ,  $M_4=10$  ( $M$  – кількість віддалених зберігачів).

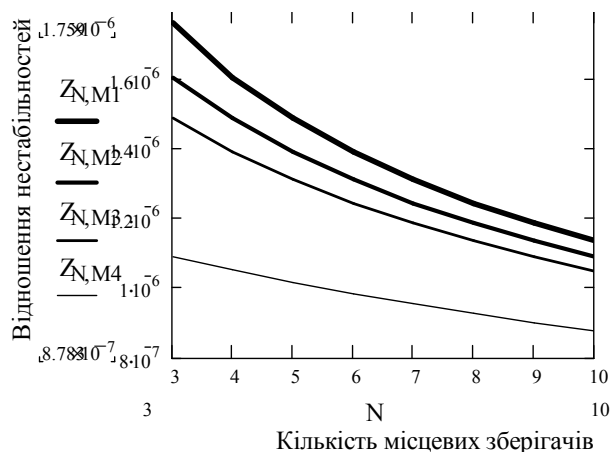


Рис. 2. Вигравш від використання територіально розподіленого еталону часу та частоти

## ВИСНОВКИ

Аналіз отриманих результатів дає нам змогу зробити висновок, що певний ефект від «віддалених» ЗЧЧ виявляється лише при малій розмірності «місцевої» групи, тобто при великій кількості «місцевих» зберігачів додавання «віддалених» впливає незначно.

Виходячи з проведених досліджень можливо зробити висновок, що самим критичним параметром для територіально розподіленого групового еталону частоти і часу є похибка зовнішніх звірень, так як від неї залежать вагові коефіцієнти, з якими може бути використана інформація від «віддалених» ЗЧЧ. Практично корисний ефект від групування виявляється при значеннях  $\sigma_{\text{ext}}$  менших  $1 \cdot 10^{-14}$ .

Іншими словами, в доступному для огляду майбутньому можна говорити про ефективне територіальне групування частот ЗЧЧ на інтервалах виміру не менш 10 дБ.

## Список літератури

1. Донченко С.И. Новый подход к формированию групповой частоты и шкалы атомного времени на ансамбле хранителей / С.И. Донченко, А.Н. Крошкин // Измерительная техника. – 1999. – №7. – С. 3-7.
2. Крошкин А.Н. Математическая модель группового территориально распределенного эталона времени и частоты / А.Н. Крошкин // Измерительная техника. – 2001. – № 6. – С. 19-24.
3. Ермишин С.М. Групповые средства измерения // Измерительная техника. – 2000. – № 2. – С. 11-17.
4. Кайдановский М.Н. Методика, аппаратура и погрешности сличения шкал времени по спутниковым каналам связи / М.Н. Кайдановский, Е.Л. Гуревич, С.А. Клионер // Измерительная техника. – 1993. – № 12. – С. 18-21.

Надійшла до редколегії 27.04.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.В. Худов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРРИТОРИАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ЭТАЛОНА ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ ВОЕННОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Ан.М. Носик, А.П. Нарезный, Ал.М. Носик

В статье рассмотрено метод объединения частот территориально распределенных хранителей времени и частоты. Синтезирована модель формирования погрешности эталона в виде зависимости нестабильности частоты от размерности группы и времени измерения. Наведены результаты исследования предложенной модели.

**Ключевые слова:** групповой эталон времени и частоты, математическая модель, шкала времени

## MATHEMATICAL MODEL OF DISTRIBUTED OF TERRITORIAL ETALON TIME AND FREQUENCY MILITARY

A.M. Nosyk, O.P. Narezniy, O.M. Nosyk

The method of combining the frequency of distributed keepers of time and frequency is considered in the article. Model of the standard error as a function of frequency instability on the dimension, and time of measurement is synthesized. The results of a study of the model are shown.

**Keywords:** group time and frequency standards, the mathematical model, the timeline.