

УДК 621.301

Б.Т. Кононов, А.А. Мушаров

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

## ФЕРОРЕЗОНАНС НАПРУГ В ДИСИПАТИВНІЙ СИСТЕМІ

Розглядається явище ферорезонансу напруг у дисипативній системі. Наводяться аналітичні співвідношення, які дозволяють визначити амплітуди напруг та резонансні частоти.

**Ключові слова:** ферорезонанс напруг, дисипативна система, резонансна частота.

### Вступ

**Постановка науково-технічної задачі.** Виникнення явища ферорезонансу в електричній системі шляхом непередбаченого втручання в її роботу може викликати небажані наслідки як для основного обладнання цієї системи, так і для її споживачів. Тому вивчення явища штучного ферорезонансу дозволить обґрунтувати рекомендації, виконання яких якщо й не унеможливить виникнення цього явища, то хоча б послабить його негативні наслідки.

**Аналіз літератури.** Явище ферорезонансу розглядалось в [1], де аналізуються залежності  $I = f(U)$  та  $U = f(I)$  для випадків ферорезонансу струмів та напруг. В [1] для аналізу явища ферорезонансу запропоновано використовувати рівняння Дуффінга, але отримані при цьому аналітичні співвідношення лише приблизно описують характер процесів, що відбуваються, оскільки при дії збурень не враховується вплив вищих гармонійних складових. Врахування впливу вищих гармонійних складових, стосовно третьої гармонійної складової, яка є найбільш важливою, розглянуто в [2]. Але в [2] розглянуті консервативні системи, які не дозволяють з'ясувати вплив втрат енергії на процеси, що відбуваються.

Ферорезонанс струмів у дисипативній системі розглянуто в [3], але в цій роботі не розглядаються специфічні особливості явища ферорезонансу напруг при врахуванні втрат енергії.

**Мета** дійсної статті є отримання аналітичних співвідношень, які описують ферорезонанс напруг в дисипативній системі.

### Основний матеріал

Для врахування втрат енергії, які мають місце в системі, що описується диференціальним рівнянням другого порядку виду

$$\ddot{x} + K_1 \dot{x} + K_2 x = G(t), \quad (1)$$

де  $K_1$  та  $K_2$  – нелінійні функції;  $G(t)$  – збурення, яке змінюється за гармонійним законом, можливо вважати, що рішення (1) буде мати дещо подібне перехідній складовій, яка в решті решт згасає, та встановленій складовій, котра лишається. Рішення

нелінійного рівняння, зрозуміло, не може бути з такою простотою розбито на дві частини, оскільки принцип суперпозиції не може бути використаний для нелінійних рівнянь. У зв'язку з цим, в дійсній статті розглядається лише шлях отримання встановленої складової рішення. Для електричного кола, показаного на рис. 1, де може виникнути ферорезонанс напруг, відповідно до другого закону Кірхгофа справедливе наступне співвідношення

$$u = u_R + u_L + u_C, \quad (2)$$

де  $u_R$ ,  $u_L$ ,  $u_C$  – відповідно складові втрат прикладеної напруги  $u$  на активному опорі  $R$ , індуктивності  $L$  та ємності  $C$ .

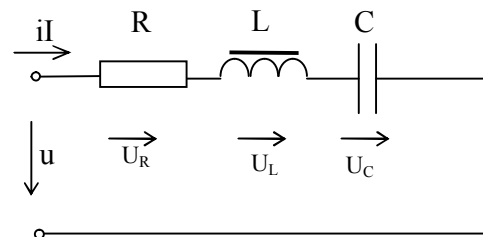


Рис. 1. Схема дисипативної системи

Рівняння (2) запишемо у вигляді

$$u = Ri + \frac{d\psi}{dt} + \frac{q}{C}, \quad (3)$$

де  $i$  – струм, що проходить у розглядаємій системі;

$\psi$  – потокозчеплення;

$q$  – заряд, що накопичений на ємності  $C$ .

Відповідно до [1], струм, що проходить по колу, представимо у вигляді скороченого поліному третього ступеня

$$i = a_1 \psi + a_2 \psi^3, \quad (4)$$

де  $a_1$ ,  $a_2$  – відповідні коефіцієнти полінома. Використовуючи результати, отримані в [2], представимо миттєве значення напруги  $u$ , як суму миттєвих значень першої та третьої гармонійних складових

$$u \approx \frac{4}{\pi} U_{\max} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} \right). \quad (5)$$

Виконавши операцію диференціювання співвідношення (3), отримаємо

$$\frac{du}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}. \quad (6)$$

З огляду на те, що  $\frac{dq}{dt} = i$ , представимо (6) таким чином

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + (\theta_1 + \theta_2\psi^2) \frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi + h\psi^3 = D(\cos\omega t + \cos 3\omega t), \quad (7)$$

де  $\theta_1 = Ra_1$ ;  $\theta_2 = 3Ra_2$ ;

$$\omega_0^2 = \frac{a_1}{C}; \quad h = \frac{a_2}{C}; \quad D = \frac{4\omega}{\pi} U_{\max}.$$

Встановлене рішення рівняння (7) будемо шукати у вигляді

$$\psi = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (8)$$

Підставивши (8) в (7) та порівнюючи коефіцієнти при  $\cos\omega t$  та  $\cos 3\omega t$  у лівій і правій частині отриманої тотожності, маємо

$$\begin{cases} [A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}hA^3] \cos\varphi - \theta_1 A\omega \sin\varphi = D; \\ [A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}hA^3] \sin\varphi - \theta_1 A\omega \cos\varphi = 0; \\ \frac{\theta_2 A^3 \omega}{2} \cos 3\varphi + \frac{hA^3}{4} \sin 3\varphi = 0; \\ -\frac{\theta_2 A^3 \omega}{2} \sin 3\varphi + \frac{hA^3}{4} \cos 3\varphi = D. \end{cases} \quad (9)$$

З першого та другого рівняння системи (9) отримуємо, що квадрат збудуючої сили  $D^2$  дорівнює

$$[A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}hA^3]^2 + (\theta_1 A\omega)^2 = D^2. \quad (10)$$

Відповідно, з третього та четвертого рівняння системи (9) маємо

$$[\frac{\theta_2 A^3 \omega}{2}]^2 + [\frac{hA^3}{4}]^2 = D^2. \quad (11)$$

У випадку, коли

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

рівняння (10) та (11) перетворюються в отримані в [2] співвідношення, що, власне, й не дивно

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}hA^3 = D; \\ \frac{hA^3}{4} = D. \end{cases} \quad (12)$$

Для дослідження рівняння (12) в [1] пропонується виконати графічну побудову, за якою рівняння (12) поділяють на дві частини

$$\begin{aligned} y_1 &= (\omega^2 - \omega_0^2)A + D; \\ y_2 &= \frac{3}{4}hA^3. \end{aligned} \quad (13)$$

Значення  $A$  визначають з умови

$$y_1 = y_2.$$

Відповідна графічна побудова наведена на рис. 2.

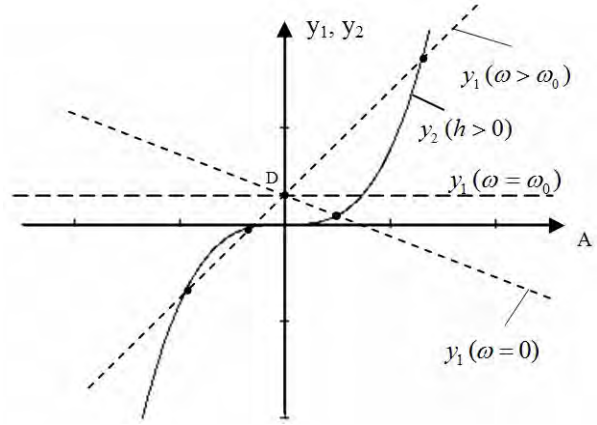


Рис. 2. Графічне рішення рівняння (12)

В загальному випадку, певному значенню  $\omega$  може відповідати три значення  $A$ , котрим відповідають три дійсних кореня.

Це показано на рис. 3, де наведена залежність  $A = f(\omega)$

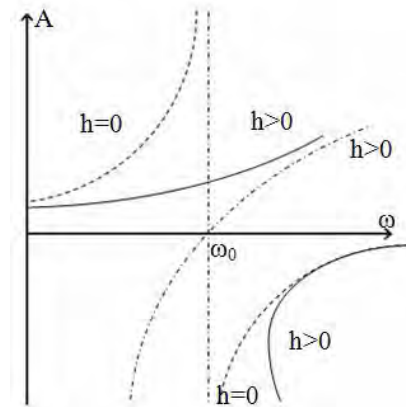


Рис. 3. Залежність амплітуди від частоти зовнішнього впливу

На рис. 3 пунктирними лініями наведені резонансні криві, які відповідають лінійній системі ( $h = 0$ ), а штрих-пунктирними лініями показані асимптоти при  $h = 0$  та  $h > 0$ .

Для нелінійної консервативної системи вісь резонансної кривої деформується, що свідчить про можливість стрибкоподібного зміння модуля  $|A|$ , що має місце тоді, коли похідна  $\frac{dA}{d\omega}$  спрямована до нескінченності, тобто

$$\frac{dA}{dt} \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Умову (14) доцільно замінити умовою

$$\frac{d(\omega^2)}{dA} = 0, \quad (15)$$

яка визначає можливість раптового змінення модуля  $|A|$ .

Рівняння (10) є кубічним рівнянням відносно  $A^2$  і тому не може бути так просто досліджено за допомогою побудови, як це зроблено в [1]. Разом з тим, це рівняння дозволяє отримати корисні відомості. Дійсно, як і для нелінійної консервативної системи, так і для нелінійної дисипативної системи справедлива умова (15), яка після диференціювання співвідношення (10) приймає такий вигляд

$$A \left\{ \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{3}{4} hA^2 \right] \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{9}{4} hA^2 \right] + (\theta_1 \omega)^2 \right\} = 0. \quad (16)$$

При  $\theta_1 = 0$  з (16), маємо, що для консервативної нелінійної системи

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + \frac{3}{4} hA^2; \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \frac{9}{4} hA^2. \end{aligned} \quad (17)$$

При  $\theta_1 \neq 0$  з (16) маємо, що рішенням (16) є лише одна лінія, яка розміщується між кривими, визначеними співвідношенням (17). Мінімальне значення  $\omega$ , що відповідає цій лінії, можливо отримати, взявши похідні з (16) по  $A$ . В результаті маємо, що

$$\omega_{\min}^2 = \omega_0^2 + \frac{9}{8} hA^2. \quad (18)$$

Значення  $A$ , що відповідає  $\omega_{\min}$ , дорівнює

$$A = \frac{2\theta_1}{\sqrt{3h}} \sqrt{1 + \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{\theta_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (19)$$

Таким чином, зрозуміло, що амплітудне значення напруг напередодні стрибкоподібного кидка зі зростанням демпфіруючого впливу зростає, а потім починає зменшуватися. Разом з тим, значення  $|A|$  в дисипативній системі менше відповідного значення  $|A|$  в консервативній системі.

## Висновки

1. Наведені аналітичні співвідношення дозволяють провести аналіз явища феррорезонансу в дисипативній системі.
2. Втрати енергії, які властиві дисипативній системі, змінюють резонансну частоту системи та зменшують амплітудні значення напруг при феррорезонансі.

## Список літератури

1. Теоретические основы электротехники / под ред. Г.И. Атабекова, ч. 2 и 3. Нелинейные цепи. Электромагнитное поле / Г.И. Атабеков, С.Д. Купелян, А.Б. Тимофеев, С.С. Хухриков. – М. – Л., Энергия, 1966 – 280 с.
2. Кононов Б.Т. Феррорезонанс в электрических сетях с поперечной и продольной компенсацией потерь напряжения / Б.Т. Кононов, Е.А. Кононова, А.А. Мушаров // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2012. – Вип. 1(30). – С. 144-146.
3. Кононов Б.Т. Феррорезонанс в электрических цепях с различными схемами соединения активного сопротивления, емкости и катушки с ферромагнитным сердечником / Б.Т. Кононов, А.А. Мушаров // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2012. – Вип. 2 (31). – С. 110-114.

Надійшла до редколегії 21.09.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.Н. Чинков Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

## ФЕРРОРЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ В ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Б.Т. Кононов, А.А. Мушаров

*Рассматривается явление феррорезонанса напряжений в диссипативной системе. Приводятся аналитические соотношения, которые позволяют определить амплитуды напряжений и резонансные частоты.*

**Ключевые слова:** феррорезонанс напряжений, диссипативная система, резонансная частота.

## FERRORERSONANCE OF VOLTAGES IN A DISSIPATIVE SYSTEM

В.Т. Kononov, A.A. Musharov

*Consider the phenomenon of ferroresonance voltage in a dissipative system. The analytical relationships that allow us to determine the amplitude of the voltage and resonant frequency.*

**Keywords:** ferroresonance of voltages, dissipative system, resonant frequency.