УДК 621.301

Б.Т. Кононов, А.О. Мушаров

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

АНАЛІТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ ФЕРОРЕЗОНАНСНИХ ЯВИЩ В ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМАХ

В статті розглядаються методи отримання аналітичних співвідношень для визначення вільної складової рішення нелінійних диференційних рівнянь.

Ключові слова: *ферорезонанс, консервативна та дисипативна система, вільна складова.*

Вступ

Постановка науково-технічної задачі. В електричних колах, які містять котушку з феромагнітним осердям, ємність та активний опір, можливе виникнення явища ферорезонансу напруг або ферорезонансу струмів. Для визначення значень напруг та струмів, які виникають в електричних колах при ферорезонансі, потрібно знайти рішення відповідних аналітичних співвідношень, що описують явище ферорезонансу.

Аналіз літератури. Явище ферорезонансу розглянуте в [1 – 3], де для визначення зв'язку між струмом в котушці i_K та потокозчепленням ψ запропоновано використовувати скорочений поліном третього ступеня, а саме

$$i_K = a_1\psi + a_2\psi^3, \tag{1}$$

де a_1 та a_2 – відповідні коефіцієнти полінома. В [1] ферорезонанс розглядається без урахування вищих гармонійних складових напруг та струмів. Вплив вищих гармонік напруг і струмів розглянутий в [2,3,4]. В цих роботах отримані диференціальні рівняння, що описують ферорезонансні явища в консервативних та дисипативних системах для різних варіантів вмикання котушки L_K, конденсатора C та активного опору R. В [2 – 4], крім того, приведені часткові рівняння, які отримані для вимушених складових. В [5] пропонується для аналізу ферорезонансних явищ розглядати властивості особливих точок, але цей метод можливо використовувати лише в найпростіших випадках. Більш вагомий результат можливо отримати, якщо знайти аналітичний вираз для вільної складової рішення нелінійного диференційного рівняння, що описує ферорезонансні явища.

Мета статті. Отримання аналітичного рішення для вільної складової нелінійних диференціальних рівнянь, що описують ферорезонансні явища в електричних колах консервативних та дисипативних систем.

Основний матеріал

По результатам досліджень, опублікованих в [2 – 5], неоднорідні нелінійні диференційні рівняння, що описують явище ферорезонансу, мають наступний вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + A_1\psi + A_2\psi^3 = \varphi_1(U, I), \tag{2}$$

для консервативних систем

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + A_0\frac{d\psi}{dt} + A_1\psi + A_2\psi^3 = \varphi_2(U, I), \tag{3}$$

для дисипативних систем, де $\varphi_1(U, I)$, $\varphi_2(U, I)$ – відповідні функції від напруг U та струмів I.

Оскільки рівняння (3) фактично узагальнює різноманітні варіанти опису ферорезонансних явищ, пошук вільної складової рішення рівнянь (2) та (3) будемо знаходити для рівняння (3).

У зв'язку з тим, що знайти точне рішення рівняння (3), скоріш за все, неможливо, будемо шукати наближене рішення. При цьому скористаємося наступним методом. Вихідне нелінійне диференціальне рівняння розіб'ємо на дві частини. Перша з них буде являти собою лінійне диференціальне рівняння, аналітичне рішення якого можливе. Друга частина містить нелінійну складову. Рішення лінійного диференціального рівняння дає нульове наближення рішення нелінійного диференціального рівняння. Нульове наближення рішення та нелінійну складову будемо використовувати для отримання уточнень, які разом з нульовим наближенням утворюють перше наближення рішення вихідного нелінійного диференціального рівняння. Для отримання більш значної точності цей прийом слід використати вдруге й отримати друге наближення рішення. Наведено приклад використання цього методу для рівняння (3).

Корені p_1, p_2 лінійного диференціального рівняння, яке отримується з рівняння (3), обчислюються зі співвідношення

$$p_1, p_2 = -\frac{A_0}{2} \pm \sqrt{\frac{A_0^2}{4} - A_1}, \tag{4}$$

а вільна складова потокозчеплення дорівнює

$$\psi_в = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \tag{5}$$

де C_1 та C_2 постійні інтегрування, для визначення яких використаємо наступні початкові умови:

$$\psi_{(t=0)} = 0;$$
$$\left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{(t=0)} = U_K = U_{max}. \qquad (6)$$

Співвідношення (6) отримані для випадку резонансу напруг, коли до електричного кола приєднана напруга U, що змінюється за законом $u = U_{max}\cos\omega t$. З (4, 5 та 6) слідує, що $C_1 + C_2 = 0$, а $C_1 p_1 + C_2 p_2 = U_{max}$, тобто $C_1 = -C_2 = \dfrac{U_{max}}{z\sqrt{\dfrac{A_0^2}{4} - A_1}}$,

а $\psi_в$ дорівнює

$$\psi_в = \frac{U_{max}}{z\sqrt{\dfrac{A_0^2}{4} - A_1}}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \qquad (7)$$

Розглянемо три можливі випадки, які визначаються співвідношенням коефіцієнтів A_0 та A_1. В першому випадку корені p_1 та p_2 від'ємні дійсні числа і перехідний процес в лінійному колі є аперіодичним. Рівняння (7) дає нульове рішення нелінійної системи (3). У відповідності до використовуємого методу розіб'ємо нелінійну частину на лінійну та нелінійну складову і введемо безрозмірний множник α при нелінійній складовій, а саме отримаємо

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -A_0\frac{d\psi}{dt} - A_1\psi - A_2\psi^3. \qquad (8)$$

Перше наближення рішення рівняння (8) запишемо у вигляді

$$\psi_{11} = \psi_{01} + \alpha\psi_1. \qquad (9)$$

Введемо позначення $\dfrac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}$, $\dfrac{d^2\psi}{dt^2} = \ddot{\psi}$ та

$$\ddot{\psi}_{01} + \alpha\ddot{\psi}_{11} = -A_0\dot{\psi}_{01} - A_0\alpha\dot{\psi}_{11} - A_1\psi_{01} -$$
$$-A_1\alpha_1\psi_{11} - \alpha A_2(\psi_0 + (\alpha\psi_1)^3) \qquad (10)$$

Виходячи з вимоги підвищення точності рішення при зростанні множника α від нуля до одиниці будемо вимагати, щоб коефіцієнти при першій ступені α були тотожно рівні.

Відповідно маємо, що $\ddot{\psi}_{02} = -A_0\dot{\psi}_{02} - A_1\psi_{02}$, що відповідає нульовому наближенню рішення, тобто $\psi_{02} = \psi_{в2} = \dfrac{U_{max}}{2\delta}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$, де згідно (7) прийнято, що $\delta = \sqrt{\dfrac{A_0^2}{4} - A_1}$. Для першого уточнення маємо, що

$$\ddot{\psi}_{11} = -A_0\dot{\psi}_{11} - A_1\psi_{11} - A_2\psi_{01}. \qquad (11)$$

Таким чином, отримане неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, стандартна форма якого має вигляд

$$\ddot{\psi}_{11} + A_0\dot{\psi}_{11} + A_1\psi_{11} = A_2\frac{U_{max}}{2\delta}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \qquad (12)$$

Рішення рівняння (12) містить як вільну, так і вимушену складові

$$\psi_{11} = C_3 e^{p_1 t} + C_4 e^{p_2 t} + \frac{A_2}{A_1}\frac{U_{max}}{2\delta}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}) \qquad (13)$$

Оскільки початкові умови для нульового рішення при $t = 0$ вже використані, слід вважати, що $\psi_1(0) = 0$ та $\dot{\psi}_1(0) = 0$. Це означає, що $C_3 + C_4 = 0$, а $C_3 p_1 + C_4 p_2 = \dfrac{A_2}{A_1}\dfrac{U_{max}}{2\delta}(p_2 - p_1)$, тобто

$$C_3 = -C_4 = -\frac{A_2}{A_1}\frac{U_{max}}{2\delta},$$

зрозуміло, що уточнення першого порядку ψ_1 дорівнює

$$\psi_{11} = \frac{A_2}{A_1}\frac{U_{max}}{\delta}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}), \qquad (14)$$

а перше наближення рішення має вигляд

$$\psi_{01} + \psi_{11} = \frac{U_{max}}{2\delta}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) + \frac{A_2}{A_1}\frac{U_{max}}{\delta}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}) =$$
$$= \frac{U_{max}}{2\delta}\left(1 - \frac{2A_2}{A_1}\right)[e^{p_1 t} - e^{p_2 t}]. \qquad (15)$$

З (15) слідує, що не лінійність не змінює характер перехідного процесу, але зменшує амплітудні значення його експоненціальних складових.

У другому випадку, коли $\dfrac{A_0^2}{4} = A_1$, корені характеристичного рівняння (4) однакові, $p_1 = p_2 = -\dfrac{A_0}{2}$, а вираз (7) являє собою невизначеність, розв'язуючи яку за правилом Лопіталя, отримаємо

$$\psi_{в2} = U_{max} t e^{-\frac{A_0}{2}t} \qquad (16)$$

В цьому випадку, неоднорідне диференціальне рівняння для визначення уточнення першого порядку ψ_{12} має вигляд

$$\ddot{\psi}_{12} + A_0\dot{\psi}_{12} + A_1\psi_{12} = -A_2 U_{max} t e^{-\frac{A_0}{2}t} \qquad (17)$$

Рішення рівняння (17) містить вільну $\psi_в$ і вимушену $\overline{\psi}$ складові, яку будемо шукати у вигляді $\overline{\psi}_{12} = t^2(Bt + C)e^{-\frac{A_0}{2}t}$. В результаті отримаємо

$$\psi_{12} = \frac{A_2}{6}U_{max} t^3 e^{-\frac{A_0}{2}t}, \qquad (18)$$

а перше наближення рішення визначається з виразу

$$\psi_0 + \psi_1 = U_{max} t e^{-\frac{A_0}{2}t} + \frac{A_2}{6}U_{max} t^3 e^{-\frac{A_0}{2}t} \qquad (19)$$

Таким чином і в цьому випадку вільна складова перехідного процесу має вигляд згасаючої експоненти, при цьому не лінійність збільшує амплітудне значення вільної складової перехідного процесу.

Нарешті, у випадку, коли $\frac{A_0^2}{4} < A_1$, корені характеристичного рівняння є комплексними і спряженими $p_1, p_2 = -\frac{A_0}{2} \pm j\omega_в$, де $\omega_в = \sqrt{A_1 - \frac{A_0^2}{4}}$. В цьому випадку перехідний процес має коливальний характер, а амплітудне значення вільної складової зменшується за експоненціальною залежністю

$$\psi_{в3} = \frac{U_{max}}{\omega_в} e^{-\frac{A_0}{2}t} \sin\omega_в t\,, \qquad (20)$$

Відповідне рівняння, що дозволяє визначити перше уточнення, має вигляд

$$\ddot{\psi}_{13} + A_0\dot{\psi}_{13} + A_1\psi_{13} = -\frac{U_{max}}{\omega_в} e^{-\frac{A_0}{2}t} \sin\omega_в t\,. \qquad (21)$$

Вимушену складову $\dot{\psi}_{13}$ рішення диференціального рівняння (21) будемо шукати у вигляді

$$\overline{\psi}_{13} = t^2 e^{-\frac{A_0}{2}t}(a\cos\omega_в t + b\sin\omega_в t)\,, \qquad (22)$$

де $b = -\frac{U_{max}}{\omega_в(1-4\omega_в^2 t^2)}$, $a = -\frac{U_{max} t^2\omega_в}{1-4\omega_в^2 t^2}$.

Враховуючи зауваження, які зазначені при отриманні співвідношення (14), маємо що

$$\psi_{13} = t^2 e - \frac{A_0}{2} t[-\frac{U_{max} t^2\cos\omega_в t}{1-4\omega_в^2 t^2} - $$

$$-\frac{U_{max}\sin\omega_в t}{\omega_в(1-4\omega_в^2 t^2)}]\,. \qquad (23)$$

Відповідно, перше наближення рішення

$$\psi_{03} + \psi_{13} = -\frac{U_{max}}{\omega_в} e^{-\frac{A_0}{2}t}[\sin\omega_в t(1+\frac{1}{1-4\omega_в^2}) + $$

$$+\frac{\cos\omega_в t^2 \cdot \omega_в^2}{1-4\omega_в^2 t^2}]\,. \qquad 24)$$

Друге наближення рішення отримується тим же методом, що й перше, але аналітичні співвідношення, які при цьому мають місце, дуже складні і їх використання ускладнює аналіз процесів, що відбуваються при ферорезонансі. Для якісного аналізу явища ферорезонансу доцільно розглянути консервативну систему, процеси в якій описуються диференціальним рівнянням (2).

Нульове наближення рішення ψ_0 в консервативній системі знаходиться з наступного рівняння

$$\ddot{\psi}_0 + \omega_0^2\psi_0 = 0\,, \qquad (25)$$

де введено позначення, що $\omega_0^2 = A_1$.

Виходячи з прийнятих початкових умов (6), коли $\psi(t=0) = 0$, а $\frac{d\psi}{dt}(t=0) = U_{max}$, рішення рівняння (25) має вигляд

$$\psi_0 = \frac{U_{max}}{\omega_0}\sin\omega_0 t\,. \qquad (26)$$

Оскільки рішення носить коливальний характер, припустимо, що амплітуда коливань буде впливати на їх частоту, тобто

$$\omega^2 = \omega_0^2 + A_2\alpha_1(A) + A_2^2\alpha_2(A)\,, \qquad (27)$$

де початкова амплітуда $\psi_A = \frac{U_{max}}{\omega_0}$, A_2 – коефіцієнт при ψ^3 в рівнянні (2), рішення якого будемо шукати у вигляді

$$\psi = \psi_0 + A_2\psi_1 + A_2^2\psi_2\,, \qquad (28)$$

де ψ_0 – нульове наближення рішення, ψ_1, ψ_2 – перше та друге уточнення рішення.

Враховуючи, що $A_1 = \omega_0^2$ та визначаючи цю величину з (27), отримуємо, підставляючи (28) в (2)

$$\ddot{\psi}_0 + A_2\ddot{\psi}_1 + A_2^2\ddot{\psi}_2 + \omega^2\psi_0 - A_2\alpha_1\psi_0 - A_2^2\alpha_2\psi_0 +$$

$$+A_2\omega^2\psi_1 + A_2^2\omega^2\psi_2 - A_2^2\omega^2\psi_2 - A_2^2\alpha_1\psi_1 +$$

$$+A_2\psi_0^3 + h^2 3\psi_0^2\psi_1 = 0\,. \qquad (29)$$

В (29) залишені лише складові, потрібні для визначення першого та другого уточнення. Перше уточнення визначимо з наступного рівняння

$$\ddot{\psi}_1 + \omega^2\psi_1 = \alpha_1\psi_0 - \psi_0^3 = \alpha_1\psi_A\sin\omega t -$$

$$-\psi_A^3\sin^3\omega t = (\alpha_1\psi_A - \frac{3}{4}\psi_A^3)\sin\omega t + \frac{\psi_A^3}{4}\sin 3\omega t\,. \qquad (30)$$

Рішення рівняння (30) має вигляд

$$\ddot{\psi}_1 + \omega^2\psi_1 = \alpha_1\psi_0 - \psi_0^3 =$$

$$= \alpha_1\Psi_A\sin\omega t - \Psi_A^3\sin^3\omega t =$$

$$= (\alpha_1\Psi_A - \frac{3}{4}\Psi_A^3)\sin\omega t + \frac{\Psi_A^3}{4}\sin 3\omega t\,. \qquad (30)$$

Рішення рівняння (30) має вигляд

$$\psi_1 = B\cos\omega t + C\sin\omega t + \frac{\omega t}{2}(\alpha_1\psi_A - \frac{3}{4}\psi_A^3) -$$

$$-\frac{\psi_A^3}{32\omega^2}\sin 3\omega t\,, \qquad (31)$$

де перші дві складові (31) являють собою загальний інтеграл однорідного рівняння, а третя та четверта складова (31) є частковим рішенням, при чому третя складова визначається збурюючою силою, частота якої дорівнює власній частоті системи. Для виключення третьої складової потрібно, щоб $\alpha_1 = \frac{3}{4}\psi_A^2$. Оскільки початкові умови для пошуку коефіцієнтів нульові $\psi_1(t=0) = 0$, $\dot{\psi}_1(t=0) = 0$, то $B = 0$, а $C = \frac{\psi_A^3}{32\omega^2}$. Таким чином перше уточнення визначається виразом

$$\psi_1 = -\frac{\psi_A^3}{32\omega^2}(\sin\omega t + \sin 3\omega t);$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{4}\psi_A^2. \qquad (32)$$

Друге уточнення знайдемо з виразу

$$\ddot{\psi}_2 + \omega^2\psi_2 = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_0 - 3\psi_0^2\psi_1 =$$

$$= \frac{3\psi_A^2}{4}\frac{\psi_A^3}{32\omega^2}(\sin\omega t + \sin 3\omega t) + \alpha_2\psi_A\sin\omega t -$$

$$-3\psi_A^2\sin^2\omega t\frac{\psi_A^3}{32\omega^2}(\sin\omega t + \sin 3\omega t). \quad (33)$$

Рішення рівняння (33), виходячи з того, що $\psi_2(t=0)=0$ та $\dot{\psi}_2(t=0)$, та маючи на увазі те, що для нехтування складової, яка містить множником час t, потрібно щоб $\alpha_2 = -\frac{3A_0}{128\omega^2}$, отримаємо у вигляді

$$\psi_2 = -(\frac{\psi_A^5}{1024\omega^4})(\sin\omega t + \sin 5\omega t);$$
$$\alpha_2 = -\frac{3\psi_0^4}{128\omega^2}. \quad (34)$$

В результаті з'ясовано, що друге наближення рішень представляється наступним співвідношенням

$$\psi_в = \frac{U_{max}}{\omega_0}\sin\omega t - \frac{A_2U_{max}^3}{\omega_0^3 32\omega^2}(\sin\omega t + \sin 3\omega t) -$$
$$-\frac{A_2^2U_{max}^5}{\omega_0^5 1024\omega^4}(\sin\omega t + \sin 5\omega t);$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3A_2U_{max}^2}{\omega_0^2 4} - \frac{3A_2^2U_{max}^4}{128\omega_0^2\omega^2}. \quad (35)$$

Таким чином, в консервативній системі не лінійність впливає на викривлення форми коливань завдяки появі вищих гармонійних складових та зміні частоти коливань. Зрозуміло, що вплив нелінійності в дисипативній системі носить подібний характер, різниця полягає лише в тому, що згасання амплітудних значень потокозчеплення відбувається більш інтенсивно. Отриманий вираз (34) для визначення другого уточнення дозволяє дати відповідь щодо можливості застосування запропонованого методу для отримання рішення нелінійного диференціального рівняння. Дійсно, множник $\frac{A_2U_{max}^2}{\omega_0^3 32\omega^2}$ та його квадрат входять в вираз (35) і для отримання вимагаємої точності та впевненості в можливості використання знайдених співвідношень потрібно, щоб

$$A_2 \le \frac{32\omega^2\omega_0^2}{U_{max}^2}.$$

Висновки

1. Запропоновані аналітичні співвідношення для визначення вільної складової рішення нелінійних диференціальних рівнянь, що описують явище ферорезонансу в консервативній та дисипативній системах.

2. Характер перехідного процесу визначається співвідношенням між значеннями коефіцієнтів в вихідних диференціальних рівняннях, що описують явище ферорезонансу.

3. Нелінійність, яка має місце при ферорезонансі, викликає до появи вищих гармонійних складових, що створюють закономірності зміни потокозчеплення. При цьому має місце як зміна амплітудних значень потокозчеплення, так і зміна частот вимушених коливань, які зростають зі зростанням характеру нелінійності.

Список літератури

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники / Г.И. Атабеков, С.Д. Купелян, А.Б. Тимофеев, С.С. Хухриков. Под ред. Г.И. Атабекова, ч. 2 и 3. Нелинейные цепи. Электромагнитное поле. – М. – Л., Энергия, 1966 – 280 с.

2. Кононов Б.Т. Феррорезонанс в электрических сетях с поперечной и продольной компенсацией потерь напряжения / Б.Т. Кононов, Е.А. Кононова, А.О. Мушаров // Збірник наукових праць ХУПС, вип. 1(30). – 2012. – С. 144-146.

3. Кононов Б.Т. Ферорезонанс в электрических цепях с различными схемами соединения активного сопротивления, емкости и катушки с ферромагнитным сердечником / / Б.Т. Кононов, А.О. Мушаров // Збірник наукових праць ХУПС, вип. 2 (31). – 2012. – С. 111-113.

4. Кононов Б.Т. Ферорезонанс напруг в дисипативній системі / / Б.Т. Кононов, А.О. Мушаров // Системи озброєння і військова техніка. – 2012. – № 4 (32). – С. 118-120.

5. Кононов Б.Т. Дослідження стійкості ферорезонансних систем / Б.Т. Кононов, А.О. Мушаров // Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України. – 2013. – № 1 (32). – С. 110-114.

Надійшла до редколегії 6.03.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Більчук, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ФЕРРОРЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Б.Т. Кононов, А.А. Мушаров

В статье рассматриваются методы получения аналитических соотношений для определения свободной составляющей решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *феррорезонанс, консервативная и диссипативная система, свободная составляющая.*

ANALITIC RELATIONS FOR ANALYSIS OF PHENOMENA OF FERRORESONANCE IN ELECTRICAL SYSTEMS

B.T. Kononov, A.A. Musharov

The article discusses methods for obtaining analytical relations for the determination of the free components of a solution of nonlinear differential equations.

Keywords: *ferroresonance, conservative and dissipative system, the free component.*