

УДК 629.7.05:004.94:351.814.33(045)

Д.В. Васильєв

Національний авіаційний університет, Київ

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КЕРОВАНОГО РУХУ ЛІТАКА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ АЕРОНАВІГАЦІЙНОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ПОЛЬОТІВ

*Розроблено кінематико-енергетичну модель керованого руху літака для дослідження процесів обробки інформації, прийняття рішень та управління при аеронавігаційному обслуговуванні польотів.*

**Ключові слова:** математична модель, керований рух літака, аеронавігаційне обслуговування польотів.

### Вступ

**Постановка проблеми.** Впровадження глобальної концепції зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM (Communication, Navigation, Surveillance / Air Traffic Management) вимагає проведення досліджень процесів обробки інформації, прийняття рішень та управління при аеронавігаційному обслуговуванні польотів. Сьогодні актуальними є задачі підвищення ефективності використання повітряного простору і планування потоків повітряного руху, створення систем виявлення та розв'язання конфліктних ситуацій між літаками.

При розв'язанні таких задач необхідно моделювати просторові траєкторії руху літаків з застосуванням математичних моделей, які за максимального спрощення зберігають достатній ступінь адекватності реальному процесу польоту. Моделі повинні враховувати динамічні властивості руху, льотно-технічні характеристики (ЛТХ) різних типів літаків, закони траєкторного керування, оцінювати витрати палива, а також не вимагати великих обчислювальних потужностей, що дає змогу виконувати розрахунки у режимі реального часу.

**Аналіз досліджень і публікацій.** При дослідженні процесів аеронавігаційного обслуговування

польотів в більшості випадків застосовуються кінематичні моделі руху літаків, в яких відсутні керуючі складові [1, 2]. Однак, застосування кінематичних детермінованих моделей не дозволяє врахувати динамічні властивості руху, що є важливим під час моделювання складних маневрів.

Застосування складних динамічних моделей керованого руху [3] вважається недоцільним, оскільки вимагає великих потужностей комп'ютера.

Моделі, які містяться в EUROCONTROL Base of Aircraft Data (BADA) [4, 5] і використовуються для розрахунку профілю польоту, не призначені для моделювання керованого руху літаків.

**Постановка завдання. Метою роботи є** розробка кінематико-енергетичної моделі керованого руху літака для дослідження процесів аеронавігаційного обслуговування польотів.

Завдання полягає в розробці моделі, в якій сигнали керування формуються з урахуванням динамічних та енергетичних властивостей руху літака.

### Склад кінематико-енергетичної моделі керованого руху літака

Для моделювання просторового руху літаків пропонується використовувати кінематико-енергетичну модель, до складу якої входить кінематична

модель, спрощена динамічна (енергетична) модель та модель керувань.

Кінематична модель призначена для визначення координат положення літака, складових повітряної і шляхової швидкості польоту, курсу, фактичного шляхового кута.

Спрощена динамічна модель забезпечує визначення прискорення літака та витрат палива. Пропонується в якості такої моделі використовувати модель Operations Performance Model (OPM), яка застосовується в BADA, що забезпечує можливість враховувати ЛТХ та експлуатаційні обмеження різних типів літаків, інформація про які міститься в базі даних.

Модель керувань забезпечує формуванням заданих значень тяги, крену та тангажу.

Взаємодія моделей між собою у складі кінематико-енергетичної моделі здійснюється наступним чином:

– до кінематичної моделі передаються прискорення із спрощеної динамічної моделі, задані кути крену та тангажу з моделі керувань;

– до спрощеної динамічної моделі передаються повітряна швидкість, вертикальна швидкість і висота польоту з кінематичної моделі, а також тяга двигунів і заданий крен з моделі керувань;

– до моделі керувань передаються всі параметри, визначені кінематичною моделлю, та прискорення із спрощеної динамічної моделі.

### Кінематична модель керованого руху

Пропонується використати наступну кінематичну модель, що описує керований рух літака у декартовій системі координат  $x_g, y_g, h$  [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}_g = V \sin \varphi \cos \theta + u_x, \\ \dot{y}_g = V \cos \varphi \cos \theta + u_y, \\ \dot{h} = V \sin \theta, \\ \dot{V} = a, \\ \dot{\varphi} = \frac{g}{V} \operatorname{tg} \gamma, \end{cases} \quad (1)$$

де  $x_g, y_g, h$  – координати та висота польоту літака;  $V$  – повітряна швидкість;  $\dot{x}_g, \dot{y}_g$  – складові шляхової швидкості;  $\varphi$  – курс;  $a$  – поздовжнє прискорення;  $\theta$  – кут тангажу;  $\gamma$  – кут крену;  $u_x, u_y$  – складові швидкості вітру;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Виконується лінеаризація системи (1) за умов, що кут тангажу має невеликі значення, задані значення кута тангажу  $\theta_3$  і крену  $\gamma_3$  відпрацьовуються за короткий проміжок часу (тобто  $\cos \theta \equiv 1$ ,  $\theta \equiv \theta_3$ ,  $\gamma \equiv \gamma_3$ ). Тоді система (1) записується у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}_g = \dot{x} + u_x, \\ \ddot{x} = \frac{\dot{V}}{V} \dot{x} + \dot{y} \frac{g}{V} \operatorname{tg} \gamma_3, \\ \dot{y}_g = \dot{y} + u_y, \\ \ddot{y} = \frac{\dot{V}}{V} \dot{y} - \dot{x} \frac{g}{V} \operatorname{tg} \gamma_3, \\ \dot{h} = V \sin \theta_3, \\ \dot{V} = a, \\ \dot{\varphi} = \frac{g}{V} \operatorname{tg} \gamma_3, \end{cases} \quad (2)$$

де  $\dot{x}, \dot{y}$  – складові повітряної швидкості;  $\ddot{x}, \ddot{y}$  – складові поздовжнього прискорення.

Система (2) описує керований рух літака як лінійний процес і у векторно-матричному вигляді подається наступним чином:

$$\dot{X} = FX + BU + Gw, \quad (3)$$

$$X = [x_g \quad \dot{x} \quad y_g \quad \dot{y} \quad h \quad V \quad \varphi]^T,$$

$$U = [a \quad \operatorname{tg} \gamma_3 \quad \sin \theta_3]^T,$$

$$w = [u_x \quad u_y]^T,$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{x}}{V} & \frac{\dot{y}}{V} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{y}}{V} & -\frac{\dot{x}}{V} & 0 \\ 0 & 0 & V \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g}{V} & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де  $X$  – вектор станів;  $F$  – матриця, що визначає динаміку руху;  $U$  – вектор керувань;  $B$  – матриця, що розподіляє керування;  $w$  – вектор збурень;  $G$  – матриця, що розподіляє збурення.

Моделі (3) надаються динамічні властивості руху літака шляхом введення сигналів керування від спрощеної динамічної моделі (прискорення  $a$ ) та моделі керувань (кути заданого крену  $\gamma_3$  та тангажу  $\theta_3$ ).

Для комп'ютерного моделювання керованого руху літака виконується дискретизація математичної моделі (3). Модель записується у наступному вигляді для моменту часу  $i$  у припущенні, що сигнали

керування та збурювання зберігають постійне значення на інтервалі часу дискретизації:

$$X(i) = \Phi(i, i-1)X(i-1) + B'U(i-1) + G'w(i-1). \quad (4)$$

Перехідна матриця  $\Phi$ , матриці  $B'$  та  $G'$  дорівнюють відповідно:

$$\Phi(i, i-1) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{V_x \Delta t^2}{2V} & \frac{V_y g \Delta t^2}{2V} & 0 \\ \frac{V_x \Delta t}{V} & \frac{V_y g \Delta t}{V} & 0 \\ \frac{V_y \Delta t^2}{2V} & -\frac{V_x g \Delta t^2}{2V} & 0 \\ \frac{V_y \Delta t}{V} & -\frac{V_x g \Delta t}{V} & 0 \\ 0 & 0 & V \Delta t \\ \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g \Delta t}{V} & 0 \end{bmatrix}_{i-1}, \quad G' = \begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де  $V_x, V_y$  – складові повітряної швидкості;  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  – крок дискретизації.

Визначення складових шляхової швидкості  $V_{xg}, V_{yg}$ , вертикальної швидкості  $V_h$  та фактично-го шляхового кута (ФШК)  $\psi$  здійснюється за допомогою додаткової системи рівнянь:

$$\begin{cases} V_{xg}(i) = V_x(i) + u_x(i-1), \\ V_{yg}(i) = V_y(i) + u_y(i-1), \\ V_h(i) = V(i-1) \sin \theta_3(i-1), \\ \psi(i) = \arctg \frac{V_{xg}(i)}{V_{yg}(i)}. \end{cases} \quad (5)$$

Також виконується перерахунок координат літака та складових шляхової швидкості до частково-ортодоромічної системи координат (ЧОСК)  $s, z$ , в якій вісь  $s$  співпадає з лінією заданого шляху (ЛЗШ), визначається кут зносу  $\beta$ .

В результаті формується вектор  $Y$ , який містить значення складових шляхової швидкості, вертикальної швидкості, ФШК, кута зносу, а також координат та складових швидкості у ЧОСК.

### Спрощена динамічна модель

В якості спрощеної динамічної моделі руху літака використовується модель OPM BADA, до складу якої входить ряд моделей, які забезпечують ви-

значення аеродинамічних сил, витрат палива, зміни маси літака, параметрів атмосфери, перевірку експлуатаційних обмежень [4].

Для визначення прискорення літака а застосовується модель Total-Energy Model, що входить до OPM BADA:

$$(P - D)V = mgV_h + mVa, \quad (6)$$

де  $P$  – тяга двигунів,  $D$  – сила лобового опору,  $m$  – маса літака,  $V_h$  – вертикальна швидкість.

В моделі аеродинаміки (Aerodynamics Model) визначається сила лобового опору  $D$  як функція від повітряної швидкості польоту, маси літака, кута крену, коефіцієнтів підйомної сили та лобового опору, площі крила і щільності повітря на висоті польоту.

Значення коефіцієнтів підйомної сили та лобового опору також розраховуються в моделі аеродинаміки. Щільність повітря  $\rho$  визначається у моделі атмосфери (Atmosphere Model).

Витрати палива  $Q$  визначаються в моделі Fuel Consumption Model як функція від тяги двигунів, повітряної швидкості та висоти польоту, а також спеціальних коефіцієнтів витрат палива. Враховується зміна маси літака у відповідності до витрат палива.

При моделюванні приймається, що аеродинамічні сили, тяга двигунів, витрати палива, маса літака і параметри атмосфери не змінюються на інтервалі часу дискретизації  $\Delta t$ .

На сьогодні база даних BADA містить ЛТХ 117 типів літаків. Для кожного типу літака ЛТХ зберігаються в окремому файлі Operations Performance File (OPF File). З відповідного файлу OPF File беруться дані про площу крила, коефіцієнти витрат палива, експлуатаційні обмеження за швидкістю і висотою польоту, спеціальні коефіцієнти для визначення максимальної тяги двигунів тощо. Загальні параметри та експлуатаційні обмеження для всіх типів літаків зберігаються в файлі Global Parameter File (GPF File).

Для коректного моделювання руху літака виконується перевірка експлуатаційних обмежень, наведених у табл. 1.

### Модель керувань

В моделі керувань формуються задані значення тяги  $P$ , тангажу  $\theta_3$  та крену  $\gamma_3$ . Для стабілізації заданих значень повітряної швидкості  $V_3$  та висоти польоту  $h_3$  застосовуються наступні закони керування тягою і тангажем [1]:

$$\dot{P} = k_v(V_3 - V) - k'_v a, \quad (7)$$

$$\dot{\theta}_3 = k_h(h_3 - h) - k'_h V_h, \quad (8)$$

де  $k_v, k'_v, k_h, k'_h$  – передатні коефіцієнти.

В залежності від методу навігації для стабіліза-

ції заданого лінійного бокового відхилення від ЛЗШ  $z_3$ , заданого курсу  $\varphi_3$  або азимуту при польоті за радіомаяком VOR застосовуються наступні закони керування креном [1, 3]:

$$\gamma_3 = k_z(z_3 - z) - k'_z V_z, \quad (9)$$

$$\gamma_3 = k_\varphi(\varphi_3 - \varphi), \quad (10)$$

$$\gamma_3 = k_\varepsilon \varepsilon - k_\beta \beta + k_\varphi(\varphi_3 - \varphi), \quad (11)$$

де  $z$  – лінійне бокове відхилення від ЛЗШ;  $V_z$  – швидкість зміни лінійного бокового відхилення від

ЛЗШ;  $\varepsilon$  – відхилення від заданого азимуту;  $k_z, k'_z, k_\varphi, k_\varepsilon, k_\beta$  – передатні коефіцієнти.

### Структурна схема кінематико-енергетичної моделі

Для комп'ютерного моделювання польоту застосовується дискретна кінематико-енергетична модель у припущенні, що її параметри зберігають постійне значення на інтервалі часу дискретизації  $\Delta t$ . Структурна схема дискретної моделі представлена на рис. 1.

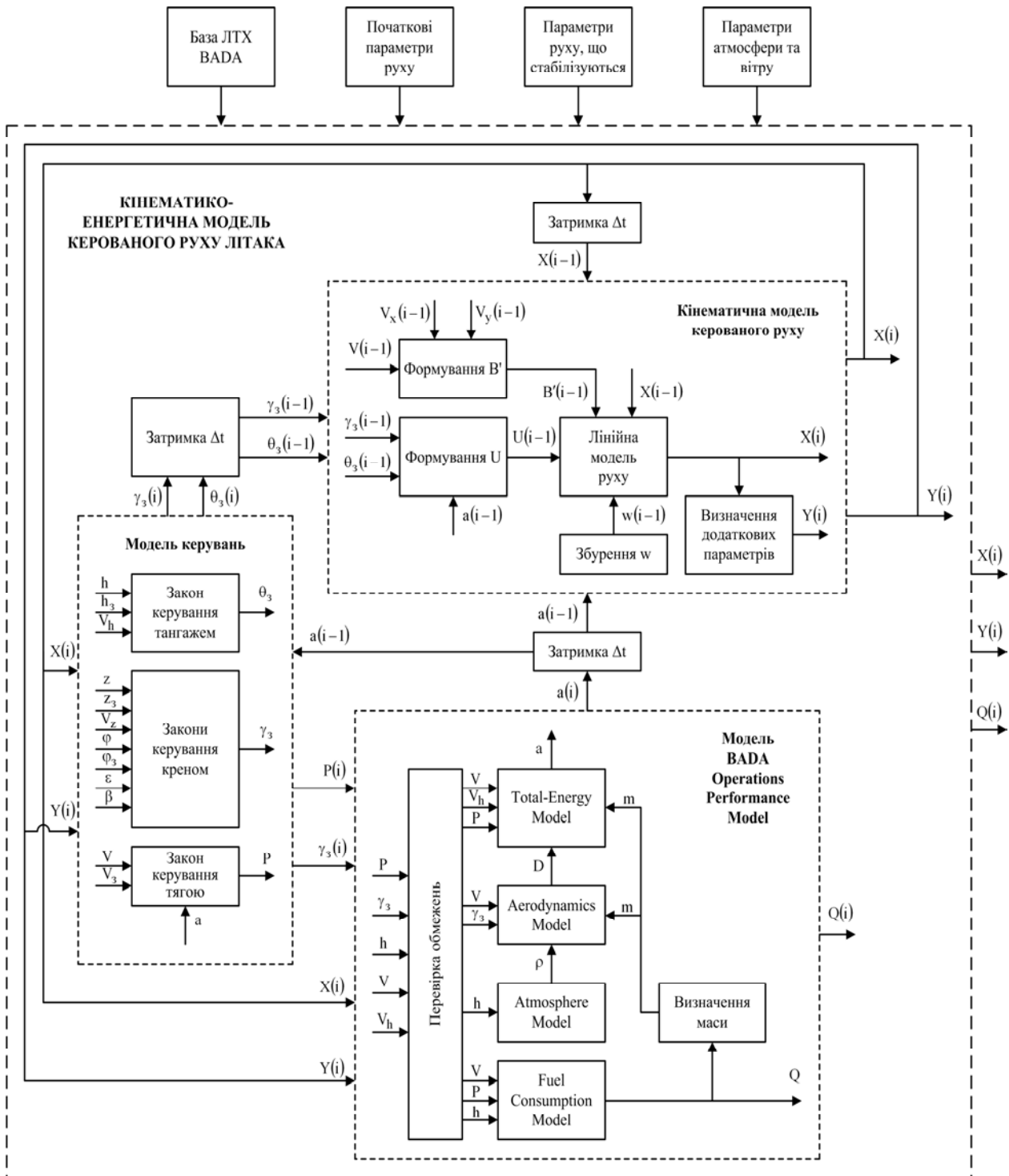


Рис. 1. Структурна схема дискретної кінематико-енергетичної моделі керованого руху літака

## Експлуатаційні обмеження за ЛТХ

№	Параметр	Джерело інформації
1	Мінімальна повітряна швидкість	Розраховується за даними OPF File та GPF File
2	Максимальна повітряна швидкість	Розраховується за даними OPF File
3	Максимальне число Маха	OPF File
4	Максимальна вертикальна швидкість	Розраховується за даними OPF File та GPF File
5	Максимальна висота польоту	Розраховується за даними OPF File
6	Максимальний кут крену	GPF File
7	Максимальне прискорення	GPF File
8	Максимальна тяга двигунів	Розраховується за даними OPF File

Вхідними даними для моделі є:

- початкові параметри руху літака (координати та висота польоту, повітряна та вертикальна швидкість, крен, маса);
- параметри атмосфери (температура повітря, швидкість та напрямок вітру);
- інформація про ЛТХ з бази даних BADA;
- параметри руху, які стабілізуються (задані значення повітряної швидкості, висоти польоту, лінійного бокового відхилення від ЛЗШ, курсу, азимуту).

### Висновки

Розроблена кінематико-енергетична модель керованого руху враховує динамічні властивості руху, льотно-технічні характеристики різних типів літаків, які містяться в базі даних BADA, та дозволяє визначити витрати палива.

Розрахунок траєкторії польоту з використанням запропонованої моделі керованого руху не потребує великих потужностей комп'ютера і може бути виконаний у режимі реального часу.

Модель може бути застосована для дослідження процесів аеронавігаційного обслуговування польотів, при розв'язанні задач підвищення ефективності використання повітряного простору і планування потоків повітряного руху, при створенні систем виявлення та розв'язання конфліктних ситуацій між літаками.

### Список літератури

1. Васильєв В.М. Моделирование аэронавигационных систем. Обработка информации та принятия решений в системе керування повітряним рухом: навч. посіб. / В.М. Васильєв, В.П. Харченко. – К.: НАУ, 2008. – 188 с.
2. Автоматизированные системы управления воздушным движением: Новые информационные технологии в авиации: учеб. пособ. / [Р.М. Ахмедов, А.А. Бибутов, А.В. Васильев и др.]; под ред. С.Г. Пятко и А.С. Красова. – СПб.: Политехника, 2004. – 446 с.
3. Автоматизация самолетовождения и управления воздушным движением: Учебник для вузов гражданской авиации / [Агаджанов П.А., Воробьев В.Г., Кузнецов А.А., Маркович Е.Д.]. – М.: Транспорт, 1980. – 357 с.
4. User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA) Revision 3.9. – EUROCONTROL, 2011. – 107 p.
5. Base of Aircraft Data (BADA) Aircraft Performance Modelling Report. – EUROCONTROL, 2009. – 68 p.
6. Советов Б.Я. Моделирование систем: Учеб. для вузов – 3-е изд., перераб. и доп. / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.
7. Васильєв Д.В. Особливості математичного моделювання керованого польоту повітряних кораблів при розв'язанні конфліктних ситуацій / Д.В. Васильєв // Сучасні проблеми авіакосмічних технологій та систем: наук.-практ. семінар, 28 травня – 1 червня 2012 р., Житомир: тези доп. – К.: НАУ, 2012. – С. 9.

Надійшла до редколегії 19.04.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.Г. Мелкумян, Національний авіаційний університет, Київ.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ АЭРОНАВИГАЦИОННОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛЕТОВ

Д.В. Васильев

*Разработана кинематико-энергетическая модель управляемого движения самолета для исследования процессов обработки информации, принятия решений и управления при аэронавигационном обслуживании полетов.*

**Ключевые слова:** математическая модель, управляемое движение самолета, аэронавигационное обслуживание полетов.

### MATHEMATICAL MODEL OF CONTROLLED AIRCRAFT MOTION FOR ANALYSIS OF AIR NAVIGATION SERVICE PROCESSES

D.V. Vasyliiev

*The kinematical-energy model of controlled aircraft motion for analysis of data processing, decision making and control processes at air navigation service was developed.*

**Keywords:** mathematical model, controlled aircraft motion, air navigation service.