

УДК 681.5

В.М. Чинков, С.В. Герасимов

Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

МЕТОДИКА СИНТЕЗУ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТЕХНІЧНОГО СТАНУ ЗРАЗКІВ ОЗБРОЄННЯ ПРИ ІНТЕГРАЛЬНОМУ ОБМЕЖЕННІ

Запропонована методика синтезу оптимального вимірювального сигналу для контролю технічного стану зразка озброєння при інтегральному обмеженні. Наведений приклад застосування розробленої методики для розрахунку параметрів оптимального вимірювального сигналу при контролі характеристик зразка. Визначена форма оптимального вимірювального сигналу в залежності від параметрів контрольованого зразка озброєння та умов проведення контролю.

Ключові слова: вимірювальний сигнал, синтез, контроль технічного стану, озброєння та військова техніка.

Вступ

Постановка проблеми та аналіз літератури. В попередній публікації [1] обґрунтована математична проблема синтезу вимірювальних сигналів, які пропонується використовувати при проведенні операцій з визначення технічного стану зразка озброєння та військової техніки (ОВТ) при його експлуатації за технічним станом. Крім того, сформульовані основні обмеження, що необхідно враховувати при синтезі вимірювальних сигналів. В даній статті розроблена методика синтезу вимірювального сигналу військового засобу вимірювальної техніки (ВЗВТ) для визначення технічного стану зразка ОВТ при врахуванні інтегрального обмеження.

Метою даної статті є розробка методики синтезу вимірювального сигналу при врахуванні інтегрального обмеження.

Виклад основного матеріалу

Синтез вимірювального сигналу будемо проводити для однієї кількісної оцінки контролю параметрів зразка ОВТ, яка має суттєвий вплив на вибір методу контролю, для чутливості S .

Для визначення параметрів оптимального вимірювального сигналу при інтегральному обмеженні використаємо метод Лангранжа та складемо функцію Ψ [1, 2]:

$$\Psi = \int_0^T \int_0^T k(\tau, \tau') u(\tau) u(\tau') d\tau d\tau' - \lambda \int_0^T u^2(\tau) d\tau, \quad (1)$$

де T – тривалість операції контролю; $k(\tau, \tau')$ – функція, яка визначає зв'язок тривалості τ вимірювального сигналу реального ВЗВТ з теоретично обґрунтованою тривалістю вимірювального сигналу τ' (еталонна тривалість); $u(\tau)$ – деякий вхідний вимірювальний сигнал, що синтезується; λ – певний параметр сигналу.

Оптимальний вимірювальний сигнал визначається при $\dot{\Psi} = 0$, при цьому параметр λ визначається

з умови інтегрального обмеження [1]:

$$\int_0^T u^2(\tau) d\tau \leq E_c, \quad (2)$$

де E_c – енергія сигналу реального ЗВТ.

Розрахуємо варіацію $\dot{\Psi}$ і дорівняємо її до нуля, отримаємо рівняння для визначення оптимального сигналу $u(\tau)$:

$$\int_0^T k(\tau, \tau') u(\tau') d\tau' = \lambda u(\tau). \quad (3)$$

Як видно з (3), оптимальний сигнал представляє собою власну функцію оператора $k(\tau, \tau')$. Значення функціоналу чутливості S на оптимальному сигналі $u_{\text{опт}}(\tau)$ з урахуванням (2) дорівнює

$$S(u_{\text{опт}}) = \lambda \int_0^T u^2(\tau) d\tau = \lambda E_c. \quad (4)$$

Рівняння (3) має множини рішень і, як показує (4), для отримання найбільшого значення S необхідно узяти те значення S , яке відповідає найбільшому власному числу λ_0 . Позначимо розв'язання рівняння (3), яке відповідає найбільшому власному числу λ_0 через $\varphi_0(\tau)$. Тоді оптимальний сигнал

$$u_{\text{опт}}(\tau) = A \varphi_0(\tau), \quad (5)$$

де A – коефіцієнт.

Значення коефіцієнту A повинно визначатися з умови нормування (5). Відмітимо, що форма оптимального сигналу повністю визначається функцією $\varphi_0(\tau)$. Для лінійних систем з постійними коефіцієнтами оптимальний сигнал $u_{\text{опт}}(\tau)$ може бути знайдено в явному виді.

Позначимо передатну функцію зразка ОВТ через $G(p)$ [3]. Позначимо також через $g_i(p)$ відображення функції $g_i(t) = \frac{\partial h(t, q)}{\partial q_i}$, де $h(t, q)$ – пе-

рехідна характеристика зразка; $g_i(t)$ – похідні вихідного сигналу контрольованого зразка ОБТ за параметрами контролю q_i , де $i = \overline{1, n}$, n – кількість параметрів контролю зразка ОБТ, в деякий час t .

Оскільки $G(p)$ – дрібно-раціональна функція,

то $g_i(p) = \frac{\partial G(p)}{\partial q_i}$ також дрібно-раціональна та може

бути записана у виді

$$g_i(p) = \frac{L_i^{(2)}(p)}{L_i^{(1)}(p)}, \quad (6)$$

де $L_i^{(1)}(p)$, $L_i^{(2)}(p)$ – поліноми по змінній p .

З рівняння (6) випливає, що функція $g_i(t)$ задовольняє диференціальному рівнянню:

$$L_i^{(1)}\left(\frac{d}{dt}\right)g_i(t) = L_i^{(2)}\left(\frac{d}{dt}\right)\delta(t), \quad (7)$$

де $\delta(t)$ – дельта-функція Дирака.

Формула (7) дозволяє з інтегрального рівняння (3) отримати відповідне диференціальне рівняння. Для цього представимо функцію $k(\tau, \tau')$ так:

$$k(\tau, \tau') = \int_0^T \sum_{i=1}^n g_i(t-\tau)g_i(t-\tau')dt. \quad (8)$$

Застосуємо до обох частин рівняння (3) диференціальний оператор $\prod_{i=1}^n L_i^{(1)}\left(-\frac{d}{d\tau}\right)L_i^{(1)}\left(\frac{d}{d\tau}\right)$ і використаємо співвідношення (7) і (8). Після проведення перетворень отримаємо диференціальне рівняння для $u(\tau)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n L_j^{(1)}\left(-\frac{d}{d\tau}\right)L_j^{(1)}\left(\frac{d}{d\tau}\right) \right] L_j^{(2)}\left(-\frac{d}{d\tau}\right)L_j^{(2)}\left(\frac{d}{d\tau}\right)u(\tau) = \\ = \lambda \prod_{i=1}^n L_i^{(1)}\left(-\frac{d}{d\tau}\right)L_i^{(1)}\left(\frac{d}{d\tau}\right)u(\tau). \end{aligned} \quad (9)$$

Відповідне виразу (9) характеристичне рівняння отримаємо заміною $\frac{d}{d\tau} \rightarrow p$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n L_j^{(1)}(-p)L_j^{(1)}(p) \right] L_j^{(2)}(-p)L_j^{(2)}(p)u(\tau) = \\ = \lambda \prod_{i=1}^n L_i^{(1)}(-p)L_i^{(1)}(p)u(\tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Поділивши обидві частини рівняння (4) на $\prod_{i=1}^n L_i^{(1)}(-p)L_i^{(1)}(p)$ і використавши співвідношення (6) остаточно запишемо так:

$$\sum_{i=1}^n g_i(-p)g_i(p) = \lambda. \quad (11)$$

Формула (11) представляє собою характерис-

тичне рівняння та визначає корені $p(\lambda)$, кількість яких залежить від порядку рівняння (11).

Знайшовши корені $p_k(\lambda)$, де $k = \overline{1, s}$, s – порядок рівняння (11), в явному вигляді розв'язання рівняння (3) має вид:

$$u_\lambda(\tau) = \sum_{k=1}^s B_k(\lambda)e^{p_k(\lambda)\tau}, \quad (12)$$

де $B_k(\lambda)$ – постійні коефіцієнти вимірювального сигналу.

Значення λ , а також постійні коефіцієнти $B_k(\lambda)$ розраховуються після підстановки (12) в (3) і зажадавши тотожного виконання рівняння (3), що призводить до системи однорідних лінійних рівнянь відносно величин B_k . При цьому значення λ отримуємо з умови рівності нулю детермінанта системи.

Таким чином, співвідношення (1) – (12) складають методику синтезу оптимального вимірювального сигналу при інтегральних обмеженнях. Розглянемо приклад застосування запропонованої методики визначення оптимального вимірювального сигналу. Знайдемо оптимальний сигнал при контролі постійної часу аперіодичної ланки, передатна функція $G(p)$ якої визначається формулою

$$G(p) = \frac{1}{T_0 p + 1},$$

де T_0 – постійна часу ланки, коефіцієнт підсилення якої дорівнює одиниці.

Тоді для функції $g_{T_0}(p)$ отримаємо

$$g_{T_0}(p) = \frac{\partial G(p)}{\partial T_0} = -\frac{p}{(T_0 p + 1)^2}. \quad (13)$$

Для спрощення розрахунків в подальшому пропонується вимірювати час в одиницях T_0 , тобто в (13) $T_0 = 1$.

Рівняння (11) для визначення коренів запишемо у наступному виді:

$$\sum_{k=1}^s \left(-\frac{p_k^2}{(p_k^2 + 1)^2} \right) = \lambda, \quad (14)$$

де s – порядок рівняння (14), $s = 4$.

З виразу (14) знайдемо

$$\begin{aligned} p_1 = \frac{\sqrt{4\lambda - 1} - 1}{2\sqrt{\lambda}}; \quad p_2 = -\frac{\sqrt{4\lambda - 1} + 2}{2\sqrt{\lambda}}; \\ p_3 = -p_1; \quad p_4 = -p_2. \end{aligned}$$

Отримані корені рівняння (14) відповідно до співвідношення (12) дозволяють записати вхідний вимірювальний сигнал таким чином:

$$u(\tau) = B_1 e^{p_1 \tau} + B_2 e^{p_2 \tau} + B_3 e^{p_3 \tau} + B_4 e^{p_4 \tau}. \quad (15)$$

Підставивши (15) в (3), отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^4 B_k e^{p_k T} = 0; \\ \sum_{k=1}^4 \frac{B_k}{p_k} e^{p_k T} = 0; \\ \sum_{k=1}^4 \frac{B_k}{p_k + 1} = 0; \\ \sum_{k=1}^4 \frac{B_k}{(p_k + 1)^2} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Дорівнюємо детермінант цієї системи нулю, отримаємо рівняння для визначення λ :

$$\det(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{p_1 T} & e^{p_2 T} & e^{p_3 T} & e^{p_4 T} \\ \frac{1}{p_1} e^{p_1 T} & \frac{1}{p_2} e^{p_2 T} & \frac{1}{p_3} e^{p_3 T} & \frac{1}{p_4} e^{p_4 T} \\ \frac{1}{p_1 + 1} & \frac{1}{p_2 + 1} & \frac{1}{p_3 + 1} & \frac{1}{p_4 + 1} \\ \frac{1}{(p_1 + 1)^2} & \frac{1}{(p_2 + 1)^2} & \frac{1}{(p_3 + 1)^2} & \frac{1}{(p_4 + 1)^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Після виконання розрахунків для детермінанта $\det(\lambda)$ маємо наступне співвідношення:

$$\det(\lambda) = 4 \left[\sin^2 \alpha \sin^2 (T/\cos \alpha) - \sin^2 (\alpha + T \operatorname{tg} \alpha) \right], \quad (18)$$

де $\cos \alpha = 2\sqrt{\lambda}$.

Дослідження рівняння $\det(\lambda) = 0$ показує, що воно має нескінчену множину коренів, які знаходяться в інтервалі $0 < \lambda < 1/4$. Як виходить з наведеної методики, для визначення оптимального сигналу необхідно знайти найбільше значення λ_0 , яке задовольняє рівнянню (18), або, що теж саме, найменше значення $\alpha = \alpha_0$.

Відповідні значення λ_0 залежно від значення T (при цьому час T вимірюється в одиницях T_0), наведені в таблиці.

При отриманих значеннях λ_0 система рівнянь (16) дозволяє знайти (з точністю до загального множника) коефіцієнти B_k , а разом з тим форму оптимального сигналу (15).

Таблиця 1

Залежність власного числа сигналу λ_0 від тривалості контролю T

T	0,2	0,3	0,4	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	20,0
λ_0	0,012	0,023	0,034	0,051	0,092	0,134	0,192	0,208	0,225	0,233	0,237	0,241	0,242	0,245

Оскільки коефіцієнти B_k пропорційні мінорам детермінанта $\det(\lambda)$ (17), то з використанням (12)

знайдемо оптимальний сигнал $u_{\text{опт}}(\tau)$:

$$u_{\text{опт}}(\tau) = \begin{vmatrix} e^{p_1 \tau} & e^{p_2 \tau} & e^{p_3 \tau} & e^{p_4 \tau} \\ \frac{1}{p_1} e^{p_1 \tau} & \frac{1}{p_2} e^{p_2 \tau} & \frac{1}{p_3} e^{p_3 \tau} & \frac{1}{p_4} e^{p_4 \tau} \\ \frac{1}{p_1 + 1} & \frac{1}{p_2 + 1} & \frac{1}{p_3 + 1} & \frac{1}{p_4 + 1} \\ \frac{1}{(p_1 + 1)^2} & \frac{1}{(p_2 + 1)^2} & \frac{1}{(p_3 + 1)^2} & \frac{1}{(p_4 + 1)^2} \end{vmatrix}.$$

Виконавши розрахунки, знайдемо

$$u_{\text{опт}}(\tau) = A_1 \cos[\omega_1 (T - \tau) + \varphi_1] + A_2 \cos[\omega_2 (T - \tau) + \varphi_2]. \quad (19)$$

У формулі (19) частоти ω_1 і ω_2 дорівнюють:

$$\omega_1 = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right); \quad \omega_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\omega_1}, \quad (20)$$

де $\alpha = \arccos(2\sqrt{\lambda_0})$. Величини A_1 , φ_1 і A_2 , φ_2 визначаються за допомогою співвідношень:

$$A_1 e^{\varphi_1} = -2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin^2 \frac{T}{\cos \alpha} + (1 - \sin \alpha) \times \left[\sin^2 2(T \operatorname{tg} \alpha + \alpha) - \sin \alpha \sin \frac{2T}{\cos \alpha} \right]; \quad (21)$$

$$A_2 e^{2\varphi_2} = -2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin^2 \frac{T}{\cos \alpha} - 2(1 + \sin \alpha) \times \left[\sin^2 2(T \operatorname{tg} \alpha + \alpha) - \sin \alpha \sin \frac{2T}{\cos \alpha} \right]. \quad (22)$$

На рис. 1 наведені графіки оптимального сигналу $u_{\text{опт}}(\tau)$ для різних співвідношень між часом контролю T і постійною часу ланки T_0 , які побудовані за формулою (19).

Асимптотичний вигляд $u_{\text{опт}}(\tau)$ при великих і при малих значеннях часу контролю можна знайти наступним чином.

При $T/T_0 \gg 1$, як видно з таблиці, і, як показують проведені розрахунки, величина $\lambda_0 \rightarrow 1/4$, а $\alpha = \arccos(2\sqrt{\lambda_0}) \ll 1$. В цьому випадку, формули (20) дають наступний результат:

$$\omega_1 \approx -1 + \frac{\pi}{T}; \quad \omega_2 \approx -1 - \frac{\pi}{T}.$$

Таким чином, при $T/T_0 \gg 1$ сигнал $u_{\text{опт}}(\tau)$ представляє собою суму синусоїд близьких частот, або синусоїду частоти $\omega = 1$, яка промодульована синусоїдою малої частоти $\Delta\omega = \pi/T$:

$$u_{\text{опт}}(\tau) \approx A \sin \frac{\pi\tau}{T} \cos(T - \tau).$$

Відповідний графік показаний на рис. 1, а.

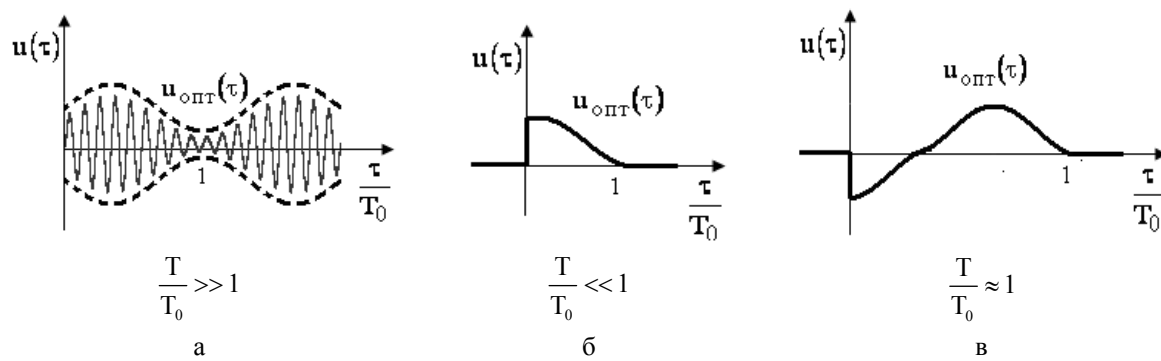


Рис. 1. Форма оптимального вимірювального сигналу

При малому часі контролю ($T/T_0 \ll 1$) величина $\lambda_0 \ll 1$, а $\alpha \rightarrow \pi/2$. З формул (21) і (22) випливає, що $A_1/A_2 \ll 1$, а $\varphi_2 \rightarrow \pi/2$. Отже, при малому часі контролю оптимальний вимірювальний сигнал знайдемо так:

$$u_{\text{опт}}(\tau) \approx A \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T-\tau}{T}\right) = A \cos \frac{\pi\tau}{2T}.$$

Графік $u_{\text{опт}}(\tau)$ при $T/T_0 \ll 1$ показано на рис. 1, б. В проміжних випадках, коли час контролю T незначно відрізняється від постійної часу ланки T_0 сигнал $u_{\text{опт}}(\tau)$ має вид, показаний на рис. 1, в. При збільшенні часу контролю кількість нулів функції $u_{\text{опт}}(\tau)$ монотонно зростає, а відстань між нулями прямує до π .

Висновки

В статті розроблена методика синтезу вимірювального сигналу при врахуванні інтегрального обмеження, яка може бути використана при обґрунтуванні параметрів діагностичної апаратури для визначення технічного стану зразка озброєння та

військової техніки при його експлуатації за технічним станом. Наведений приклад застосування запропонованої методики дозволив визначити можливі форми для оптимальних вимірювальних сигналів в залежності від параметрів об'єкта контролю й значення часу контролю.

Список літератури

1. Чинков В.М. Математична постановка проблеми синтезу вимірювальних сигналів для визначення технічного стану зразків озброєння при їх експлуатації за технічним станом / В.М. Чинков, С.В. Герасимов // Системи озброєння та військової техніки. – № 4 (36). – 2013. – С. 128-131.
2. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
3. Бесекерський В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерський, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1972. – 768 с.

Надійшла до редколегії 5.02.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Б. Кононов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

МЕТОДИКА СИНТЕЗА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОБРАЗЦОВ ВООРУЖЕНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ

В.Н. Чинков, С.В. Герасимов

Предложена методика синтеза оптимального измерительного сигнала для контроля технического состояния образца вооружения при интегральном ограничении. Приведен пример применения разработанной методики для расчета параметров оптимального измерительного сигнала при контроле характеристик образца вооружения. Определена форма оптимального измерительного сигнала в зависимости от параметров контролируемого образца вооружения и условий проведения контроля.

Ключевые слова: измерительный сигнал, синтез, контроль технического состояния, вооружение и военная техника.

METHOD OF SYNTHESIS OF MEASUREMENTS SIGNALS FOR CONTROL OF THE TECHNICAL STATE OF STANDARDS OF ARMAMENT AT INTEGRAL LIMITATION

V.M. Chinkov, S.V. Gerasimov

The method of synthesis of optimum measuring signal is offered for control of the technical state of standard of armament at integral limitation. The example of application of the developed method is resulted for the calculation of parameters of optimum measuring signal at control of descriptions of standard of armament. The form of optimum measuring signal is certain depending on the parameters of the controlled standard of armament and terms of the use of control.

Keywords: measuring signal, synthesis, control of the technical state, armament and military technique.