

УДК 621.396.367

В.П. Долгушин<sup>1</sup>, Р.Ю Кольцов<sup>1</sup>, Е.С. Ленков<sup>2</sup>, В.Н. Лоза<sup>1</sup><sup>1</sup>Военный институт Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, Киев<sup>2</sup>Национальный авиационный университет, Киев

## ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ ВЫЯВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА

*Рассмотрены вопросы аналитического обоснования спектрального представления сложной сигнальной функции на основе системы функций Хаара, метод построения быстрых алгоритмов преобразования, приведены результаты вычисления спектров по базису Хаара нескольких нестационарных сигналов, по анализу которых сформулирована оценка информационных возможностей метода.*

**Ключевые слова:** сигнальная функция, дискретное преобразование, спектральное представление.

### Введение

Дискретное преобразование Хаара (ДПХ) называют системой Хаара. Ортогональная система функций Хаара известна с начала прошлого столетия (1910 г.), но получила широкое практическое использование, особенно в таких областях, как функциональный анализ и обработка экспериментальных данных, только в последнее время. Наряду с применением в качестве инструмента спектрального анализа система функций Хаара служит хорошим "обучающим" примером аналитического освоения ортогональных базисов в пространстве вейвлетов. ДПХ является альтернативой кратковременному (оконному) преобразованию Фурье и используется для анализа тонких особенностей сложных и нестационарных по времени или в пространстве сигналов (под не стационарностью понимается наличие локальных неоднородностей и скачков).

Задачами настоящего анализа ставятся: аналитическое обоснование спектрального представления на основе функций Хаара, построение быстрых алгоритмов дискретного анализа с данной базисной

системой и оценка их информационных характеристик по результатам вычисления спектра Хаара для нескольких характерных сигнальных функций.

### Основной раздел

#### Обоснование базового одношагового ДПХ

Обоснование процедуры ДПХ с базисом системы Хаара производится на примере обработки экспериментальной зависимости  $f(x)$  на интервале  $0 \leq x \leq 1$ , представленной  $n = 16$  значениями. Данные примера представлены на рис. 1 (сверху) в виде гистограммы с 16 отрезками, масштабные коэффициенты уровней (обозначим  $j$ ) определяются в двоичной системе счисления, т.е пропорционально  $2^j$  (при такой системе существенно упрощается реализация вычислительных алгоритмов).

Индекс  $j = 4$  связан с полным числом шагов в данном примере, при этом функция представляется как

$$f(x) = \sum_{k=0}^{15} s_{j,k} \varphi_{j,k}, \quad (1)$$

где  $s_{j,k} = f(k/6)/4$ , а  $\varphi_{j,k}$  – ступенька с единичной нормой и шириной  $1/16$ .

При произвольном значении  $j$  функция скачка записывается в виде:

$$2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k). \quad (2)$$

В соответствии с (2) на следующем этапе ( $j=3$ ) представляется поведение функции в интервале  $1/8$  и производится усреднение по 2-м соседним интервалам исходной гистограммы. С точностью до нормирующего множителя ( $\sqrt{2}$ ) полученные *средние значения* задаются коэффициентами  $s_{j,k}$ . Для получения информации о *флюктуациях* функции на основе данных коэффициентов вычисляются разности между уровнями  $s_{j,k}$ , которые определяют второй набор коэффициентов, обозначаемых  $d_{j,k}$ . Значения коэффициентов определяются выражениями:

$$\begin{aligned} s_{j-1,k} &= (1/\sqrt{2}) \cdot [s_{j,2k} + s_{j,2k+1}]; \\ d_{j-1,k} &= (1/\sqrt{2}) \cdot [s_{j,2k} - s_{j,2k+1}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Гистограммы коэффициентов  $s_{j,k}$  и  $d_{j,k}$  для уровней  $j = 3$  и  $2$  показаны на рис. 1 ниже исходного сигнала. Обозначение  $j$  имеет значение *масштабного* коэффициента, значение уровня (масштаба) определяется как  $2^{-j}$ , а точки отсчёта соответственно  $k2^{-j}$ .

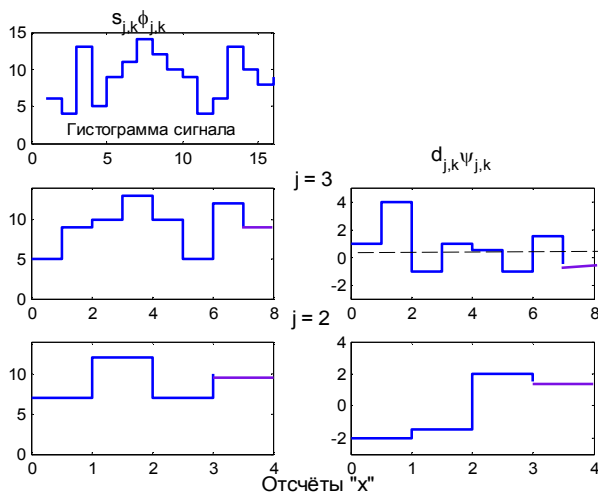


Рис. 1. Коэффициенты  $s_{j,k}$  и  $d_{j,k}$  (уровни  $j = 3$  и  $2$ )

При попарном разбиении интервалов нормированная разность значений  $d_{j,k}$  имеет противоположные знаки в соседних интервалах, связанную с этими коэффициентами функцию обозначают:

$$\Psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^{-j} x - k). \quad (4)$$

Используя (2) – (4), спектральное представление сигнала можно записать в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^7 s_{j,k} \varphi_{j,k}(x) + \sum_{k=0}^7 d_{j,k} \Psi_{j,k}(x). \quad (5)$$

Для базисных функций выражения (5) приняты следующие названия:

$$\varphi_{j,k}(x) - \text{скейлинг-функция (масштабирующая),}$$

$\Psi_{j,k}(x)$  – *вейвлет Хаара* (в общем случае – "материнский" вейвлет).

Последовательно переходя к более широким уровням ( $j = 3, 2, 1, 0$ ), производится усреднение на интервалах  $1/8, 1/4, 1/2, 1$ . На уровне, соответствующем  $j = 0$ , имеется только одно среднее значение по всему интервалу (обозначим  $s_{0,0}$ ). Результат разложения по всем уровням записывается в виде:

$$f(x) = s_{0,0} \varphi_{0,0}(x) + d_{0,0} \Psi_{0,0}(x) + \sum_{k=0}^1 d_{1,k} \Psi_{1,k}(x) + \sum_{k=0}^3 d_{2,k} \Psi_{2,k}(x) + \sum_{k=0}^7 d_{3,k} \Psi_{3,k}(x). \quad (6)$$

Функции  $\varphi_{0,0}(x)$  и  $\Psi_{0,0}(x)$  называются соответственно *скейлинг-функцией* и *вейвлетом Хаара*. Вид функций показан на рис. 2.

Вейвлет Хаара формируется функцией единичного скачка, называемой функцией Хевисайда. Скейлинг-функция находится решением функционального уравнения:

$$\varphi_H(x) = \theta(x) \cdot \theta(1-x), \quad (7)$$

где  $\theta(x)$  обозначает функцию Хевисайда, равную 1 при положительных значениях аргумента и 0 при отрицательных.

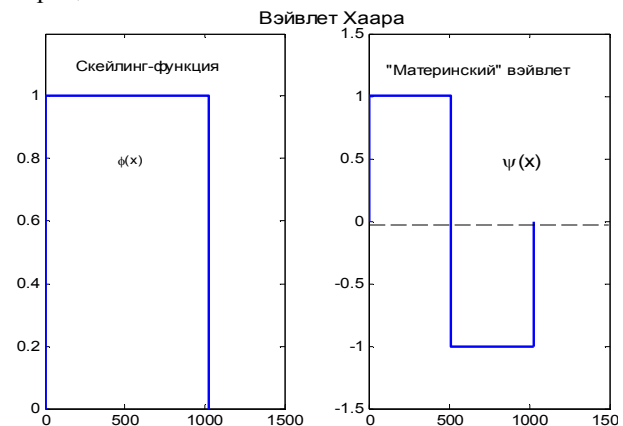


Рис. 2. Функции  $\varphi_{0,0}(x)$  и  $\Psi_{0,0}(x)$

"Материнский" вейвлет Хаара с учётом (7) определяется выражением:

$$\begin{aligned} \Psi_H(x) &= \theta(x) \cdot \theta(x-2x) - \\ &= -\theta(2x-1) \cdot \theta(1-x). \end{aligned} \quad (8)$$

По результатам изложенного анализа можно констатировать, что представление исходной функции выражением (6) содержит среднюю величину функции по всему интервалу, представленную коэффициентом  $s_{0,0}$ , и все его флюктуации с чётко указанным масштабом и положением на оси «x» в 15 нормированных коэффициентах  $d_{j,k}$ .

На практике в большинстве случаев из общего представления разложения сигнала по формуле (5) отбрасывают первую сумму, т.к. обычно интерес вызывает не среднее значение, а *форма* функции, определяемая флюктуациями вокруг среднего.

### Численный алгоритм преобразования с системой Хаара

Численные алгоритмы спектрального преобразования с использованием базиса функций Хаара применяются к дискретным сигналам, но при вычислении реализуют непрерывное преобразование (НП). Поэтому первым этапом НП является конструирование из дискретного сигнала непрерывного времени  $f(t)$  (в дальнейшем символ  $f$  используется как для непрерывного, так и дискретного времени).

Анализ первого этапа алгоритма ДПХ производится на примере простейшего сигнала типа дискретной пачки импульсов:

$$f = \{f_k\}_{k=0}^7 = [8, 4, 6, 8, 9, 7, 2, 4]. \quad (9)$$

Преобразование (9) в непрерывную функцию осуществляется масштабирующей функцией Хаара  $\varphi_H$  (7). Картина преобразования иллюстрируется на рис. 3. На верхней части рис. 3 показаны исходный сигнал и соответствующая ей непрерывная кусочно-постоянная функция  $f$ . Алгоритм преобразования имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=0}^7 f_k \varphi_H(t-k). \quad (10)$$

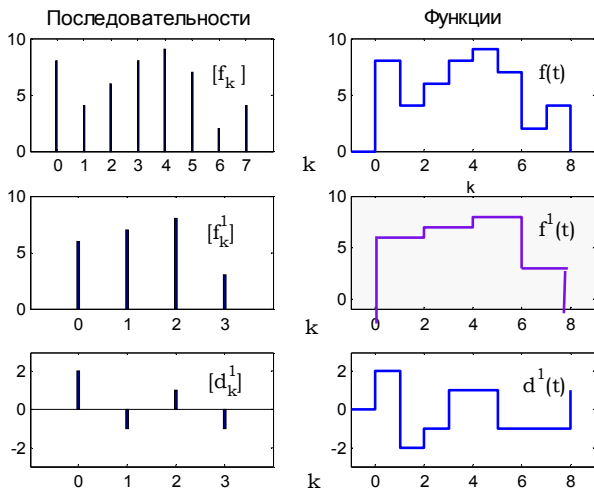


Рис. 3. Преобразование (9)

Функция  $f(t)$  является суперпозицией масштабирующих функций (7) с различными сдвигами, при этом каждая умножается на соответствующий элемент последовательности. Сигнал непрерывного времени представляется кусочно-постоянной функцией на интервалах единичной длины со скачками в момент взятия отсчётов.

Следующий шаг строит более грубое приближение  $f^1$  последовательности  $f$ , вычисляя среднее арифметическое соседних элементов последовательности:

$$\begin{aligned} \{f_k^1\}_{k=0}^3 &= \{(f_0 + f_1)/2, \dots, (f_6 + f_7)/2\} = \\ &= \{6, 7, 8, 3\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Длина последовательности  $f^1$  составляет половину исходной. Из этой новой последовательности строится сигнал непрерывного времени  $f^1(t)$ , показанный на правом рис. 2-го ряда. Алгоритм вычисления соответствует:

$$f^1(t) = \sum_{k=0}^3 f_k^1 \varphi_H(t/2 - k). \quad (12)$$

Эти результаты представляют собой аппроксимацию исходного сигнала.

Следующий этап (3-ий ряд рис. 3) определяет детализующий сигнал и вычисляется на основе поэлементной разности (обозначается  $d^1$ ):

$$\{d_k^1\}_{k=0}^3 = \{(f_0 - f_1)/2, \dots, (f_6 - f_7)/2\}; \quad (13)$$

$$d^1(t) = \sum_{k=0}^3 d_k^1 \Psi_H(t/2 - k). \quad (14)$$

Быстрый алгоритм НП с базисом Хаара на основании рассмотренного примера можно сформулировать следующим образом:

1. Дискретный сигнал  $\{f_k\}$  с использованием масштабирующей функции  $\varphi_H$ , соответствующей вейвлету Хаара, преобразуется в сигнал непрерывного времени  $f(t)$  согласно выражению (12).

2. По формулам (13), (14) вычисляются последовательности  $\{f_k^1\}$  и  $\{d_k^1\}$  соответственно.

3. Спектральное представление непрерывной функции с использованием системы Хаара для  $n = 2$  и  $t = 2k$  производится по формуле:

$$L_H f(2, 2k) = \sqrt{2} d_k^1 / c_{\Psi_H}. \quad (15)$$

### Частотные фильтры Хаара

Практическая реализация алгоритма ДПХ основана на применении цифровых фильтров (ЦФ).

Масштабирующий (скейлинг) ЦФ является низкочастотным. Преобразование определяется линейной свёрткой в виде:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \varphi(2x - k), \quad (16)$$

где  $M$  – число коэффициентов.

Процедура выполняется двоичным изменением масштаба и целочисленными трансляциями “ $k$ ”, коэффициент нормировки равен  $\sqrt{2}$ , что соответствует традиционному варианту быстрых алгоритмов вычисления.

Выражение (16) для рассмотренного выше примера (рис. 3) в матричной форме записи имеет вид:

$$f^1 = Hf, \quad (17)$$

где  $H$  – матрица преобразования низкочастотного ЦФ.

“Материнская” базисная функция Хаара соответствует высокочастотному ЦФ и записывается как

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \Psi(2x - k) \text{ или } d^1 = Gf. \quad (18)$$

Характеристики ЦФ определяются последовательностями  $\{h_k\}$  и  $\{g_k\}$ . Базисные функции  $\varphi(x)$

и  $\Psi(x)$  относятся к ортогональным подпространствам гильбертова пространства  $L^2(\mathbb{R})$ , что соответствует выполнению условия:

$$\sum_k h_k g_{k+2M} = 0. \tag{19}$$

Из решения уравнения (19) определяется зависимость между коэффициентами  $h_k$  и  $g_k$ :

$$g_k = (-1)^k h_{2M-1-k}. \tag{20}$$

Для системы Хаара  $M=1$ , отсюда коэффициенты ЦФ имеют значение:

$$\begin{cases} h_0 = \sqrt{2}/2; & h_1 = \sqrt{2}/2; \\ g_0 = \sqrt{2}/2; & g_1 = -\sqrt{2}/2. \end{cases} \tag{21}$$

Характеристики ЦФ Хаара: импульсная (сверху) и частотная (внизу) приводятся на рис. 4.

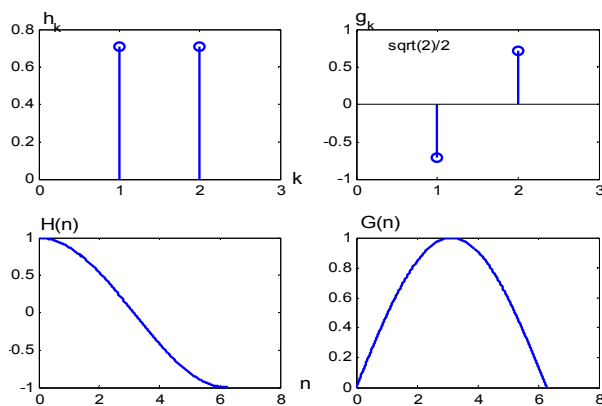


Рис. 4. Характеристики цифровых фильтров Хаара

Рассмотренная система обработки на 2-х ЦФ Хаара выполняет задачу одношагового спектрального преобразования, реализация многоуровневого ДПХ, требуемая при обработке реальных сигналов, связана с использованием системы (называемой *базой фильтров*) подобных по структуре ЦФ, организованных по итеративной пирамидальной схеме построения Маллата.

**Экспериментальное исследование результатов анализа нестационарных сигналов**

Исследование выполнено методом числового эксперимента путём программного вычисления и анализа результатов ДПХ. Как известно [1], ДПХ не может быть записано в аналитической форме, оно характеризуется набором численных коэффициентов в некоторых функциональных пространствах. Операции вычисления результатов ДПХ нескольких характерных сигналов выполнены с использованием СКМ (средств компьютерной математики) [4].

Важнейшим продуктом визуализации результатов спектрального анализа методом ДПХ являются *спектрограммы* (СПГ), отображающие значение коэффициентов разложения сигнала на плоскости масштаб – время (значения масштаба обратно про-

порциональны частоте). Наличие локальных особенностей (нарушения гладкости) сигнала отображается на СПГ в виде вертикальных линий, при этом пикам сигнала соответствуют белые цвета, а гладким участкам – тёмные.

1. Тестовый сигнала, состоящего из гладкой функции и 2-х явно выраженных скачков амплитуды. Аналитическое выражение сигнала имеет вид:

$$s = \sin(t) + k \text{sign}(\sin(t - \tau)).$$

Результат преобразования представлен в виде спектрограммы на рис. 5.

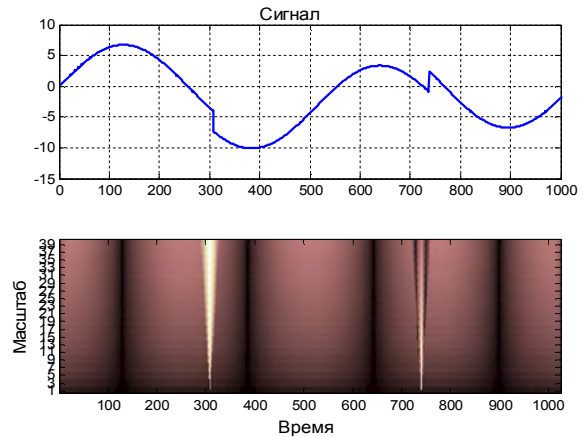


Рис. 5. Спектрограмма преобразования

Экстремумы гладкой части сигнала выделены тёмными вертикальными линиями, локальные скачки чётко видимыми белыми, которые на временной оси точно соответствуют положению скачков на сигнале.

2. Дискретная биквантованная пачка, в правой части которой имеются 2 небольшие области флуктуаций (отмечены на рис. двойной стрелкой). Результат вычисления с использованием непрерывного вейвлет-преобразования с целью получения наиболее наглядного представления показан на рис. 6.

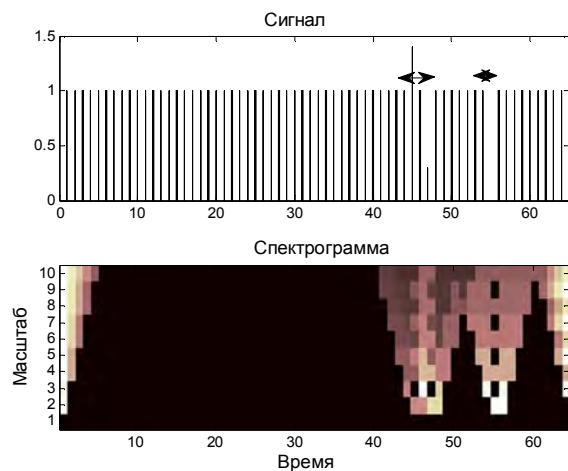


Рис. 6. Результат вычисления с использованием непрерывного вейвлет-преобразования

Как следует из рис. 6, СПГ, полученная по системе ДПХ, позволяет с высоким качеством распо-

знать флюктуирующую пачку (характерную при наложении 2-х сигналов, отражённых от одиночных целей) по сравнению с нефлюктуирующей, не смотря на крайне слабый характер флюктуаций.

По итогам анализа СПГ для 2-х характерных нестационарных сигналов (рис. 5, 6) можно сделать вывод о достаточно высоких возможностях выделения локальных особенностей сигналов системой анализа Хаара, которые значительно превосходят возможности оконного преобразования Фурье.

Однако необходимо отметить, что преобразование Хаара имеет определённые недостатки, которые связаны с плохими аналитическими свойствами, обусловленными резким перепадом на границах интервалов, т.е. *плохой гладкостью* базисной функции. Кроме того, вейвлеты Хаара не обладают достаточно хорошей *локализацией по частоте*.

Для исследования "предельных" возможностей анализа ДПХ произведен расчёт СПГ для нестационарного сигнала большой сложности. В качестве такого сигнала использована синусоида(s), на которую наложен меандр прямоугольных импульсов с переменной частотой (s1). Аналитическое выражение сигнала имеет вид:

$$S(t) = \sin(t) + \alpha \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{(t-7)^2}{3}\right)\right),$$

где  $\alpha$  – коэффициент, принятый равным 0,1 для иллюстрации сигнала на рис. 7, и 0.0001 – для расчёта СПГ.

Результаты представлены на рис. 7. На верхней части рис. показаны отдельно составляющие сигнала (суммарный сигнал при уровне меандра 0,0001 представляет из себя «чистую» синусоиду).

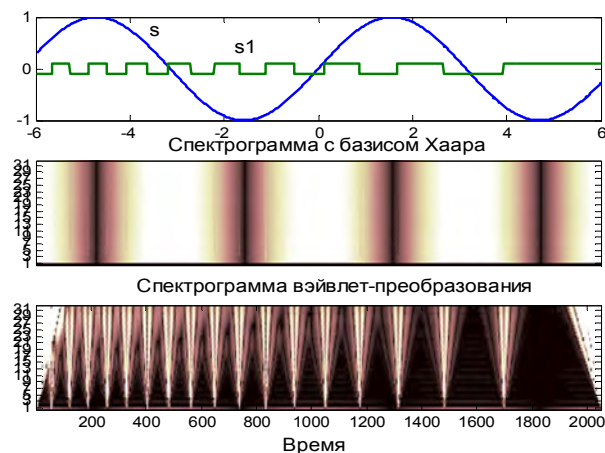


Рис. 7. Результаты исследования

Средняя часть рис. 7 демонстрирует результат ДПХ. Очевидно, что для данного сигнала особенности в виде скачков на синусоиде не видны. СПГ характеризует только синусоиду (тёмные полосы – экстремумы). Этот факт объясняется наличием недостатков базисной функции, которая является простейшим вейвлетом.

На нижнем рис. 7 показана СПГ того же сигнала при использовании популярного вейвлета Добеши. На СПГ отчётливо фиксируются светлым цветом все скачки от импульсов меандра. Некоторое усложнение спектра по краям вызвано ограничением сигнала во временной области. Особо следует отметить, что при столь малой величине амплитуды меандра (уменьшена по сравнению с синусоидой в 1000 раз) внешне сигнал не отличается от обычной синусоиды. При Фурье-преобразовании такая функция вообще не показывает каких-либо особенностей – она представляется единичной дискретной линией.

## Выводы

В Фурье-преобразованиях базисные функции имеют бесконечный носитель, при котором невозможно обнаружить отдельные особенности в сигнале, преобразование обеспечивает качественный анализ глобальных изменений, характерных для стационарных сигнальных функций.

Кратковременный (оконный) анализ даёт возможность связать частотный спектр с малой частью сигнала, локализованной в окне, однако при этом "радиусы" оконных функций оказываются фиксированными. Это позволяет с достаточной точностью анализировать только либо высокочастотные, либо низкочастотные составляющие сигнала.

Система Хаара обеспечивает, так называемый, *кратно разрешающий анализ* (КРА), при котором базисная функция становится *масштабируемой*. ДПХ не осуществляет поиск циклических частот, как в Фурье-анализе, а определяет размеры "деталей" (всплесков, скачков) и фиксирует их положение на временной оси. Используя идею КРА, была построена (И.Добеши) серия базисных функций – всплесков (*вейвлетов*), обладающих свойствами системы Хаара (ортогональность и компактность носителя) и обеспечивающих высокоэффективную спектральную обработку, называемую *вейвлет-анализом* (ВА). Вопросы приложения ВА к обработке сигналов рассматриваются в других статьях.

## Список литературы

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук*. – 1998. – Т. 166, № 11. – С. 1145-1170.
2. Воробьёв В.И. Теория и практика вейвлет-преобразования / В.И. Воробьёв, В.Г. Грибулин. – СПб.: Изд-во ВУС, 1999.
3. Малоземцев В.Р. Хааровские спектры дискретных свёрток / В.Р. Малоземцев, С.М. Машарский // *Вычисл. мат. и математ. физика*. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 954-960.
4. Дьяконов В.П. *MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров* / В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2011 – 976 с.

Поступила в редколлегию 8.08.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. И.В. Рубан, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

**ОЦІНКА МОЖЛИВОСТЕЙ ВИЯВЛЕННЯ ХАРАКТЕРНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ  
НЕСТАЦІОНАРНИХ СИГНАЛІВ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ХААРУ**

В.П. Долгушин, Р.Ю. Кольцов, Е.С. Ленков, В.М. Лоза

*Розглянуті питання аналітичного обґрунтування спектрального представлення складної сигнальної функції на основі системи функцій Хаара, метод побудови швидких алгоритмів перетворення, приведені результати обчислення спектрів по базису Хаара декількох нестационарних сигналів, по аналізу яких сформульована оцінка інформаційних можливостей методу.*

**Ключові слова:** *сигнальна функція, дискретне перетворення, спектральне представлення.*

**ESTIMATION OF POSSIBILITIES OF EXPOSURE OF CHARACTERISTIC FEATURES  
OF NON-STATIONARY SIGNALS BY METHOD OF DISCRETE TRANSFORMATION OF HAAR**

V.P. Dolgushin, R.Y. Kol'cov, E.S. Lenkov, V.N. Loza

*Vine the questions of analytical ground of spectral presentation of difficult alarm function are Considered on the basis of the system of functions of Haar, method of construction of rapid algorithms of transformation, the results of calculation of spectrums are resulted on the base of Haar of a few non-stationary signals, on the analysis of which an estimation is formulated estimation of informative possibilities of method.*

**Keywords:** *alarm function, discrete transformation, spectral presentation.*