

УДК 004.942:53.043

Е.В. Белкин

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ РАЗВИТИЯ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В статье рассматривается применение математических моделей, описывающих нелинейные явления неустойчивости волн большой амплитуды в антиферромагнитных фильтрах и плазменных волноводах. Показаны условия применимости математических моделей, приведены выражения для перевода безразмерных параметров моделей в размерные величины для реальных технических систем. Найдены характерные времена развития процесса модуляционной неустойчивости для плазменных волноводов.

**Ключевые слова:** нелинейность, модуляционная неустойчивость, плазменные волноводы, антиферромагнетики.

### Введение

В предметной области, которой является физика и техника транспортировки и прохождения квазимонохроматических волн большой амплитуды в устройствах и средах с наиболее распространенной на практике кубической нелинейностью, возникает необходимость изучения наиболее важных для такой транспортировки неустойчивостей с возбуждением плотных спектров возмущений. Возбуждение таких спектров возмущений способно привести к различной пространственно-временной модуляции излучения. Модуляционные неустойчивости волн большой амплитуды в средах могут вызвать аномально большие всплески их амплитуды, а также вносить искажение в их поведение при транспортировке. Так, нелинейные эффекты в плазменных волноводах могут привести к формированию импульсов с плотностью энергии на порядок большей, чем номинальная энергия распространяющейся волны. С одной стороны, подобные явления могут нанести вред техническому устройству, например, привести к непрогнозируемому пробою плазменного волновода, а с другой стороны могут явиться основой для создания генератора высокоэнергетических импульсов. Пояснение механизмов и выявление условий возникновения подобных нелинейных эффектов является важной и актуальной задачей, решение которой позволит уточнить рабочие точки приборов, а также может быть полезным при проектировании новых образцов технических устройств. Нелинейные эффекты аналогичной природы заложены в основу функционирования антиферромагнитного фильтра, который используется для ограничения интенсивности магнитных волн в магнитопроводах.

**Целью данной статьи** является разработка рекомендаций для применения математических моделей предложенных в [1, 2, 8, 9] в реальных технических системах.

### Основной раздел

#### Математическая модель модуляционной неустойчивости волны намагниченности в ферритовых ограничителях мощности.

Построение и анализ математической модели модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды вблизи порога развития было представлено в работе [1, 2]. Рассмотренные условия распространения волны соответствуют распространению волн в антиферромагнитных ограничителях мощности.

Волновое возмущение

$$E = A(x, t) \cdot \exp(i\omega t - ikx)$$

при распространении в нелинейной среде подчиняется уравнению Лайтхилла

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - iA|A|^2 + g \quad (1)$$

где  $\delta$  – декремент затухания волны,  $g$  – внешний источник, поддерживающий волновое возмущение основной волны.

Критерий неустойчивости определяется соотношением (2) [3]:

$$\left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\partial \omega}{\partial (|A|^2)} \right) < 0 \quad (2)$$

где  $\omega$  – частота,  $k$  – волновое число.

В работе [2] медленно меняющаяся комплексная амплитуда представлялась в виде ряда:

$$A = u_0(t) \exp(i\varphi_{k_0}(t) - ik_0 x) + \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp(i\varphi_{k_n}(t) - ik_n x) \quad (3)$$

То есть, неустойчивость понималась как возбуждение спектра

$$\sum_{n \neq 0} u_n(t) \cdot \exp(i\varphi_{k_n}(t)) \cdot \exp(i\omega_0 t - ik_n x)$$

где  $u_n(t) \cdot \exp(i\varphi_{k_n}(t))$  – медленно меняющаяся комплексная амплитуда  $n$ -й моды спектра.

Тогда суммарное поле представляет собой модулированную волну на частоте  $\omega_0$ .

Модель основана на системе дифференциальных уравнений, описывающих эволюции амплитуд и фаз основной волны и возмущений неустойчивости. Уравнения построены с учетом нелинейного взаимодействия волн возбуждаемого спектра с основной волной накачки:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} = -\delta u_0 + 2u_0 \cdot \sum_{m>0}^N u_m \sin\Phi_m + g; \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = k_0^2 - u_0^2 - 4 \sum_{m>0}^N u_m^2 - 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 \cos\Phi_m; \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} = u_n \{-\delta + u_0^2 \sin\Phi_n\}; \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = k_n^2 - 2(u_0^2 + 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 - \frac{1}{2} u_n^2) - u_0^2 \cos\Phi_n, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\Phi_n = 2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}$ ;  $n = \mathbb{Z} \cap [-N, N]$ ,  $n \neq 0$ .

В результате численного анализа модели обнаружено обратное влияние возбужденного спектра на основную волну, приводящее к ограничению амплитуды волнового возмущения в системе (рис. 1).

Данный эффект применяется в антиферромагнитном ограничителе мощности и описан в работах [4 – 7] для случая однородной ( $k_0 = 0$ ) магнитной накачки (S-теория).

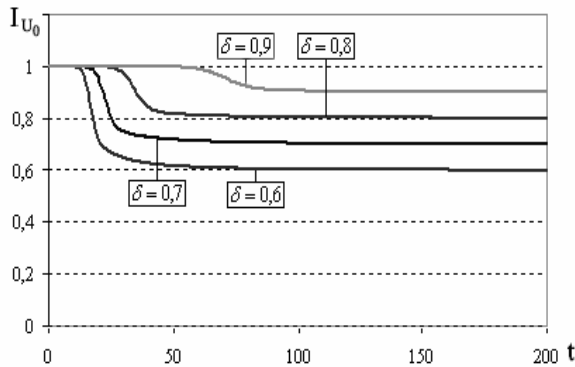


Рис. 1. Эффект ограничения мощности основной волны  $I_{U_0}$ , проходящей через антиферромагнитный фильтр

Обсуждаемый механизм развития неустойчивости, определяющий обратное влияние возбуждаемого спектра спиновых волн на накачку, приводящее к «замораживанию» ее амплитуды на пороговом уровне, с успехом используется для ограничения мощности подаваемой в систему [4]. При этом мощность на выходе, начиная с некоторого уровня входной мощности, остается почти постоянной вплоть до некоторого уровня.

Таким ограничителем является и рассмотренный ферритовый фильтр при мощности на его входе, превышающей несколько милливольт.

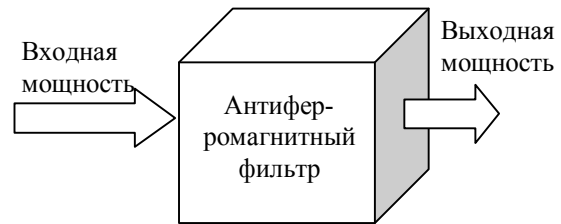


Рис. 2. Схема ферритового ограничителя мощности

Подавая на вход сигналы разной мощности, получаем на выходе уровень возбуждения, определяемый насыщением рассмотренной модуляционной неустойчивости. Важно, что накладывая внешнее магнитное поле (накачку) можно регулировать не только выходной уровень сигнала, но и ширину спектра. Модель, представленная в [2] позволяет значительно более корректно анализировать поведение выходного сигнала при пространственно-временной модуляции накачки, в отличие от S-теории, ориентированной на использование так называемой параллельной накачки, то есть, накачки переменным однородным магнитным полем высокой частоты. В настоящее время можно формировать бегущие волны намагнитченности большой амплитуды, что позволяет создать динамические магнитные ограничители и другие технические устройства, использующие изученные в работах [1, 2] явления.

В антиферромагнитных материалах частоты в каждой из двух антипараллельных подрешеток  $\omega_0$  и  $\Omega_0$  равны

$$\omega_0^2 = \Omega_0^2 = 2\omega_a \omega_{ex},$$

где  $\omega_a$  – частота прецессии отдельно взятой подрешетки,  $\omega_{ex} = gH_{ex}$  – определяет величину сильного антиферромагнитного обмена между подрешетками. Кстати,

$$H_{ex} = BM,$$

где  $B$  – так называемая «обменная константа», которая, обычно в этом случае, весьма значительна, и  $M$  – намагнитченность. Частоты прецессии порядка  $2\pi \cdot (1 \div 3) \cdot 10^{10}$ , а с учетом нелинейности

$$\omega = \omega_0(\vec{k}) + 2T |b|^2,$$

где  $T \propto g\omega_{ex} / M \propto g^2 B$ ,  $g = 2\pi \cdot 2,8$  МГц/э., величины  $b$  определяются как вклад в энергию системы, то есть энергия системы  $H = \omega_0 b b$  или для спектра  $H = \omega_{0k} \sum_{k,k'} b_k b_{k'}$ . И в этом случае выполняется условие модуляционной неустойчивости (2).

Выражения для пересчета параметров модели в параметры реальных технических систем приведены в табл. 1.

Таблица 1

Перевод параметров модели в размерные величины для антиферромагнитных систем

Величина	Представление в размерной (CGS) форме
Частота	$\sqrt{2\omega_a\omega_{ex}}$
Напряженность магнитного поля	$A \cdot (2g\omega_{ex} / M _{t=0})^{-1/2}$
Время	$\tau \cdot (2g\omega_{ex} / M _{t=0})^{-1}$
Координата	$\xi \cdot k$

**Математическая модель эффектов самомодуляции интенсивной волны в плазменном волноводе.**

Модель (4) получила дальнейшее развитие в работах [8, 9], где было построено многомодовое описание процесса самомодуляции интенсивной волны в условиях сильного превышения порога неустойчивости, соответствующих условиям распространения высокоэнергетичной квазимонохроматической электромагнитной волны в плазменном волноводе. В условиях сильного превышения волной порога неустойчивости для корректного математического описания необходимо учитывать взаимодействия возбужденных мод спектра неустойчивости между собой.

Полученная модель представляет собой систему дифференциальных уравнений (5)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= -u_0^2 - 4 \sum_{m>0}^N u_m^2 - 2 \sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \cos \Phi_m; \\ \frac{d}{dt} u_0 &= -u_0 \left( \delta + 2 \sum_{m>0}^N u_{-m} u_m \cos \Phi_m \right) + G; \\ \frac{du_s}{dt} &= -\delta u_s + u_0^2 u_s \sin \Phi_s + 2u_s \sum_{\substack{n \neq s \\ n > 0}}^N u_{-n} u_n \sin \Psi_{sn}; \\ \frac{d\varphi_s}{dt} &= K_s^2 - 2(u_0^2 + \frac{1}{2}u_s^2 + u_{-s}^2 + \sum_{\substack{n \neq s \\ n > 0}}^N (u_n^2 + u_{-n}^2)) - \\ &\quad - \frac{u_{-s}}{u_s} (u_0^2 \cos \Phi_s + 2 \sum_{\substack{n \neq s \\ n > 0}}^N u_{-n} u_n \cos \Psi_{sn}), \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где  $\Psi_{sn} = \Phi_s - \Phi_n$ ;  $\Phi_n = 2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}$ ;

$K_s = k_s - k_0$ ;  $s, n = \mathbb{Z} \cap [-N, N]$ ;  $n, s \neq 0$ ;  $K_{-n} = -K_n$ .

В результате анализа модели в областях сильного превышения порога развития неустойчивости ( $\delta \approx 0.4$ ) получены режимы развития неустойчивостей, при реализации которых наблюдаются всплески амплитуды волнового поля, превышающие среднюю амплитуду более чем в 2,5 раза (рис. 3).

При этом плотность энергии, которая находится в квадратичной зависимости от амплитуды, возрастет в 6-8 раз, что может спровоцировать непрогнозируемого пробоя волновода, в котором транспортируется волна [10, 12].

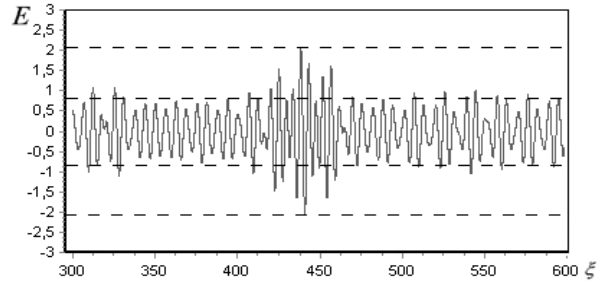


Рис. 3. Всплеск волнового поля в результате самомодуляции, численный эксперимент с параметрами вычислений  $N = 100$ ,  $\delta = 0.4$ ,  $g = 0.4$ ,  $\tau = 6.57$

С целью выработки рекомендаций для применения результатов моделирования в реальных технических системах, получим выражения для перевода параметров модели в величины, характеризующие распространение волны в плазменном волноводе. Для этого рассмотрим коаксиальный плазменный волновод, представляющий собой металлический полый цилиндр, радиуса  $R$ , заполненный плазмой в области  $0 < r < R_d$  и диэлектриком в области  $R_d < r < R$  (рис. 4).

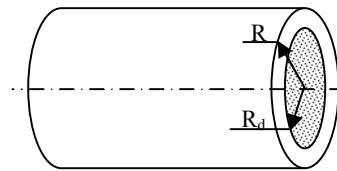


Рис. 4. Цилиндрический плазменный волновод

Ограничимся рассмотрением аксиально-симметричных волн, для которых справедливо дисперсионное уравнение (6) [10]

$$\frac{\varepsilon \cdot I_1(k_{\perp} R_d)}{k_{\perp} I_0(k_{\perp} R_d)} + \frac{\Delta_{10}(R_d, R)}{\kappa \cdot \Delta_{00}(R_d, R)} = 0 \quad (6)$$

где  $k_{\perp} = \sqrt{k_z^2 - k^2 \varepsilon}$ ,  $\kappa = \sqrt{k_z^2 - k^2}$ ,  $k_z$  – компонента волнового вектора в направлении оси волновода,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость плазмы

(здесь  $\varepsilon = 1 - \frac{\Omega_{pe}^2}{\omega^2}$ ,  $\Omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_{pe}}{m_e}}$  – ленгмюровская

частота,  $e$ ,  $m_e$ ,  $n_{pe}$  – заряд, масса и плотность электронов плазмы),

$\Delta_{n,0}(R_d, R) = K_n(\kappa R_d) \cdot I_0(\kappa R) - (-1)^n K_0(\kappa R) \cdot I_n(\kappa R_d)$ ,  $I_n(x)$  и  $K_n(x)$  – модифицированная функция Бесселя и функция Макдольда n-го порядка.

Наиболее интересны электромагнитные волны так называемого поверхностного типа, у которых амплитуда максимальна вблизи границ плазмы, а частота заметно меньше граничной частоты

$$\Omega_{pe} / \sqrt{1 + \gamma_{\Phi}^2},$$

где  $\gamma_{\Phi}^2 = (1 - \frac{v_{\Phi}^2}{c^2})^{-1}$ ,  $v_{\Phi} = \frac{\omega}{k_z}$  – фазовая скорость

вдоль оси волновода, остающаяся меньше скорости света. Эти волны имеют сравнимые амплитуды напряженности электрического и магнитного полей, легко выводятся из волновода и способны взаимодействовать с энергоемкими пучками релятивистских электронов. Обычно считается выполненным для этих колебаний условие

$$k \cdot (R - R_d) = k \cdot h < 1.$$

Для частоты волны конечной амплитуды справедливо выражение (7) [11]

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\Omega_{pe}}{\gamma_{\Phi}} \left( 1 + \frac{e^2 |E|^2 \gamma_{\Phi}^2}{m_e^2 v_T^2 \Omega_{pe}^2} \right) \approx \\ &\approx \frac{\Omega_{pe}}{\gamma_{\Phi}} \left( 1 + \gamma_{\Phi}^2 \frac{W_E}{n_{pe} T_e} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля,  $W_E$  – плотность ВЧ энергии и  $n_{pe} T_e$  – плотность тепловой энергии плазмы, причем в обычных условиях выполнено требование  $W_E / n_{pe} T_e < 1$ . Для этих колебаний, как легко убедиться из (7), справедливо неравенство

$$\partial v_g / \partial k = \partial^2 \omega(\vec{k}) / \partial k^2 < 0,$$

и, следовательно, в этом случае выполняется условие модуляционной неустойчивости (2), и применима рассматриваемая модель.

Исходя из вышеизложенных формул, можно получить выражения для пересчета параметров математической модели в параметры плазменного волновода (см. таблицу 2)

Таблица 2

Перевод параметров модели в размерные величины для плазменных волноводов

Величина	Представление в размерной (CGS) форме
Частота	$\Omega_{pe} / 2\pi\gamma_{\Phi}$
Напряженность поля	$A \cdot (\gamma_{\Phi}^2 \frac{W_E}{n_{pe} T_e}  _{t=0})^{-1/2}$
Время	$\tau \cdot (\gamma_{\Phi}^2 \frac{W_E}{n_{pe} T_e}  _{t=0})^{-1}$
Координата	$\xi \cdot \frac{c\gamma_{\Phi}}{\Omega_{pe}}$

В качестве примера рассмотрим расчет характерных величин для возбуждаемого слаборелятивистским пучком с  $\gamma = \gamma_{\Phi} = 3$  плазменного волновода, заполненного плазмой. Ленгмюровская частота определяется из условия

$$\Omega_{pe} = 5,64 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{n_{pe}},$$

для длины волны излучения равной 10 см (в системе CGS  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\gamma_{\Phi}c}{\Omega_{pe}} = 10$ ) (верхняя граница сантиметрового диапазона), откуда

$$\Omega_{pe} = 0.2\pi\gamma_{\Phi}c = 5.65 \cdot 10^{10} \text{ rad/sec},$$

то есть плотность плазмы порядка

$$n_{pe} = 10^{12} \text{ cm}^{-3}.$$

Так как плазма низкотемпературная, то есть в энергетических единицах  $T_e \approx 10\text{eV}$ , то плотность тепловой энергии получаем порядка

$$n_{pe} T_e \propto 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ erg/eV} \cdot 10^{13} \text{ eV/cm}^3 = 16 \text{ erg/cm}^3.$$

Плотность энергии поля при этом должна оставаться не выше 1-10% этой величины. Средние значения мощности излучения с площади  $1 \text{ cm}^2$  определяются из условия

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{4\pi} \cdot c &\propto (0.01 \div 0.1) \cdot n_{pe} T_e \cdot c / \gamma_{\Phi}^2 \approx \\ &\approx 1.8 \cdot (10^8 \div 10^9) \text{ erg/sec} \cdot \text{cm}^2 = \\ &= 1.8 \cdot (0.01 \div 0.1) \text{ Mwatt/cm}^2 \end{aligned}$$

в непрерывном режиме генерации.

В режиме возникновения всплесков модуляции поля при трехкратном превышении среднего уровня поля, интенсивность поля превышает почти на порядок среднее значение интенсивности по полю. Характерное время развития процесса модуляционной неустойчивости:

$$\begin{aligned} \tau_{char} &\propto (\Omega_{pe} / 2\pi\gamma_{\Phi})^{-1} (\gamma_{\Phi}^2 \frac{W_E}{n_{pe} T_e}) \propto \\ &\propto 3 \cdot (10^{-5} - 10^{-6}) \text{ sec}, \end{aligned}$$

то есть порядка десятка микросекунд. Длительность всплеска модуляции поля – порядка десятка длин волн, то есть порядка  $(10^{-7} - 10^{-8}) \text{ sec}$ .

### Выводы

Рассмотрена применимость моделей процессов развития модуляционной неустойчивости волн большой амплитуды в технических системах. Найдены условия и определены параметры среды и волны конечной амплитуды, для которых реализуются режимы с появлением аномальных всплесков ее огибающей. Определены параметры таких всплесков, частота их появления на различных временах развития процесса. Модели применимы: в феррито-

вых ограничителях мощности, где позволяют определить максимально возможные уровни мощности; в плазменных волноводах, где объясняют эффект внезапного увеличения интенсивности и характерные размеры локализации импульсов модуляции ВЧ-поля.

Приведены условия соответствия между реальными параметрами технических систем и параметрами математической модели, что позволяет обеспечить адекватность описания моделью реальных процессов.

Автор выражает благодарность профессору Куклину В.М. и профессору Азаренкову Н.А. за конструктивные замечания и внимание к работе.

### Список литературы

1. Белкин Е.В. Моделирование развития модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде / Е.В. Белкин, В.М. Куклин // *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна*. – Сер. «Ядра, частинки, поля.» – 2008. – № 794, вип. 1(37). – С. 51-56.
2. Белкин Е.В. Анализ численной модели модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде / Е.В. Белкин, И.В. Гуцин // *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна*. – Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2008 – № 809(9). – С. 20-31.
3. Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system / M.J. Lighthill // *J.Inst. Math. Appl.* – 1965. – V.1, N.2. – P.269-306.
4. Гуревич А.Г. Спиновые волны / А.Г. Гуревич // *Соросовский Образовательный Журнал*. – 1997. – № 9. – С. 100-108.
5. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны / В.С. Львов – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 272 с.
6. Suhl H. Effective Nuclear Spin Interactions in Ferromagnets / H. Suhl // *Phys Rev.* – 1958. – V. 109, N.2. – P. 606.
7. Schlomann E.L. Band Ferromagnetic Resonance Experiments at High Peak Power Levels / E. L. Schlomann, J.H. Saunderson, M.H. Sirvets // *J. Appl. Phys.* – 1960. – V. 31, Suppl. – P. 386S-395S.
8. Белкин Е.В. Об интерференции в многомодовых режимах модуляционных неустойчивостей / Е.В. Белкин, А.В. Киричок, В.М. Куклин // *Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ) Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения*. – 2008. – №4(6) – С. 222-227.
9. Белкин Е.В. Построение и анализ усложненной модели неустойчивости волны конечной амплитуды с использованием модели волновых возмущений Лайтхилла / Белкин Е.В. // *Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. – 2009 – № 847. – С. 3-15.
10. Кондратенко А.Н. Основы плазменной электроники / А.Н. Кондратенко, В.М. Куклин. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
11. Загинайлов Г.И. Нелинейная теория параметрического возбуждения поверхностных волн в сильнонеизотермической плазме / Загинайлов Г.И., Куклин В.М. // *Физика плазмы* – 1986 – том 12, вып. 9. – С. 1051-1056.
12. О пробое в коаксиальном волноводе атомарного газа низкого давления со стохастически прыгающей фазой. / В.И. Карась и др // *Світлотехніка та електроенергетика*. – 2009 – №4, – С.12-18

Надійшла до редколегії 21.01.2010

**Рецензент:** д.ф.-м.н., проф. Н.А. Азаренков, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків.

### ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ РОЗВИТКУ МОДУЛЯЦІЙНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ХВИЛЬ ВЕЛИКОЇ АМПЛІТУДИ У ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

Е.В. Белкін

У статті розглядається застосування математичних моделей, які описують нелінійні явища нестійкості хвиль великої амплітуди у антиферромагнетних фільтрах та плазмових хвилеводах. Показано умови застосовності розглянутих математичних моделей, наведено вирази для перерахунку безрозмірних параметрів моделей у розмірні величини для реальних технічних систем. Знайдено характерний час розвитку процесу модуляційної нестійкості для плазмових хвилеводів.

**Ключові слова:** нелінійність, модуляційна нестійкість, плазмові хвилеводи, антиферромагнетика.

### APPLICATION OF THE MATHEMATICAL MODELS OF HIGH AMPLITUDE WAVES MODULATION INSTABILITY IN THE TECHNICAL SYSTEMS.

E. V. Belkin

Technical application of the mathematical models of the high-amplitude wave's instability in antiferromagnetic power filters and in the plasma waveguide is considered. The conditions of the models applicability are shown. The expressions of conversions of dimensionless model parameters to denominated quantity for real technical system are suggested. The characteristic time of modulation instability exciting in plasma waveguide is calculated.

**Keywords:** nonlinearity, modulation instability, plasma waveguides, antiferromagnetics.