

УДК 621.391

К.С. Васюта

*Харьковский университет Воздушных Сил им. І. Кожедуба, Харьков*

## ОЦЕНКА ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ R/S-СТАТИСТИКИ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ИСКАЖЕННЫХ АДДИТИВНЫМ БЕЛЫМ ГАУССОВСКИМ ШУМОМ

*В работе приведен алгоритм оценки показателя Херста (коэффициента самоподобия) с использованием нелинейной R/S – статистики (метода нормированного размаха). Проиллюстрирована возможность классификации различных классов процессов с использованием R/S – статистики. Приведена оценка границ возможного применения R/S нелинейного (фрактального) анализа хаотических процессов, наблюдаемых на фоне аддитивного гауссовского шума, для их классификации. Показано, что возможности данного метода анализа процессов существенно ограничиваются с увеличением вклада шума в аддитивной смеси наблюдения.*

**Ключевые слова:** R/S – статистика, показатель Херста, отношение сигнал/шум.

### Введение

Набор традиционных (линейных) методов анализа процессов в информационных системах существенно расширен нелинейными методами (статистиками), полученными за последние пятнадцать лет в теории нелинейной динамики [1 – 3]. Эти методы позволяют выявлять закономерности в поведении (зависимости в значениях) процессов там, где ранее считалось, что их не существует. Нелинейные (непараметрические) методы анализа процессов позволяют отличать хаотические колебания от случайных процессов [4, 5], различать «цвет шума» [6], различать мультифрактальные и монофрактальные процессы, классифицировать процессы по степени и характеру зависимостей в их значениях [7].

Однако большинство из известных методов нелинейного анализа получены и применимы для идеализированных условий помеховой обстановки (процесс наблюдается без шума). Такое упрощение реальной помеховой обстановки может значительно ограничивать возможности таких методов. Поэтому важно оценить границы возможного применения

методов нелинейного анализа процессов для их классификации при наличии шума.

Одним из методов фрактального анализа данных является метод нормированного размаха (R/S-статистика), который позволяет выявлять характер зависимостей в значениях наблюдаемого процесса (оценивать параметр  $0 < H < 1$  – Херста или коэффициент самоподобия). И принимать решение о том, что наблюдаемый процесс имеет независимые идентично распределенные случайные значения (IID – independent and identical distributed) или имеет зависимости в значениях (процесс может быть рукотворным, например, хаотическим).

**Целью данной работы** является оценка границ применимости R/S –статистики для фрактального анализа процессов, искаженных аддитивным белым гауссовским шумом в информационных системах.

### Оценка показателя Херста с использованием R/S –статистики

Зависимость параметра (R/S) от времени наблюдения, построенная в двойном логарифмиче-

ском масштабе, представляет исследуемый процесс в виде фрактальной функции. При аппроксимации фрактальной функции прямой линией определяется угловой коэффициент  $H$ . Показатель Херста используют для вычисления основного фрактального параметра процесса – размерности Хаусдорфа-Безиковича:  $D=2-H$ . Размерность Хаусдорфа-Безиковича или фрактальная размерность является интегральной характеристикой объекта или процесса. Она обобщает понятие евклидовой геометрической размерности и, в отличие от последней, может принимать нецелочисленные значения.

Познавательная сила понятия фрактальной размерности состоит в том, что с его помощью можно упорядочивать исследуемые процессы по свойствам хаотичности или сложности и, таким образом, классифицировать (разделять) их.

Фрактальный R/S анализ [3] основан на оценке показателя Херста  $H$  для проверки статистических гипотез: гипотеза  $H_0$  предполагает, что наблюдаемые данные  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  независимы и одинаково распределены  $F_{\bar{x}} = F_1(x_1) \cdot F_1(x_2) \cdot \dots \cdot F_1(x_n)$  при  $H \approx 0,5$ , а при  $0 < H < 0,5$  или  $0,5 < H < 1$  верна альтернативная гипотеза  $H_1$  – т.е. наблюдаемые данные  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  нефактаризуются, а вид распределения неизвестен  $F_{\bar{x}} = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Оценка показателя Херста с использованием R/S –статистики, согласно [3], производится следующим образом:

Временной ряд  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  длины  $n$  преобразуется во временной ряд длины  $n = m - 1$  через логарифмическое отношение:

$$n_i = \log(m_{i+1}/m_i), \quad i = 1, 2, \dots, m - 1. \quad (1)$$

Этот период далее делится на  $A$  смежных подпериодов длины  $N$  так, что  $AN = n$ . Каждый подпериод обозначается  $I_a$  с учетом того, что  $a = 1, 2, \dots, A$ . Каждый элемент в  $I_a$  помечается  $n_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Для каждого  $I_a$  длины  $N$  определяется среднее значение:

$$d_a = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_{k,a}, \quad (2)$$

где  $d_a$  – среднее значение  $n_k$ , содержащегося в периоде  $I_a$  длины  $N$ .

Временной ряд накопленных отклонений  $X_{k,a}$  от среднего значения для каждого подпериода  $I_a$  определяется как

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (n_{i,a} - d_a), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Диапазон размаха среднего значения определяется как разность между максимальным и мини-

мальным значением  $X_{k,a}$  в пределах каждого подпериода  $I_a$ :

$$R_{1,a} = \max(X_{k,a}) - \min(X_{k,a}), \quad (4)$$

где  $1 \leq k \leq N$ .

Для каждого подпериода  $I_a$  рассчитывается стандартное отклонение:

$$S_{1,a} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (n_{k,a} - d_a^2) \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Каждый диапазон  $R_{1,a}$  далее нормализуется путем деления на соответствующий  $S_{1,a}$ , т.е. среднее значение R/S определяется как:

$$(R/S)_N = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \left( \frac{R_1}{S_{1,a}} \right). \quad (6)$$

Длина  $N$  увеличивается до следующего более высокого значения, а  $(m - a) / N$  является целочисленным значением. Наклон решения уравнения (6), является оценкой показателя Херста  $\hat{H}$ .

Процессы, фрактальные линии которых расположены в области, где  $0 < H < 0,5$ , называются антиперсистентными и для них характерна знакопеременная тенденция в сочетании с относительно высоким уровнем зашумленности. Процессы, фрактальные линии которых расположены в области, где  $0,5 < H < 1$ , называются персистентными и для них характерно сохранение наблюдаемой тенденции в сочетании с относительно низким уровнем зашумленности. При  $H=0,5$  имеют место процессы, в которых тренд отсутствует, а степень зашумленности определяется факторами, которые нельзя учесть в методе Херста-Мандельброта. В частности, фрактальные линии всех стационарных сигналов вырождаются в прямую с  $H=0,5$  и, таким образом, никак не разделяются.

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования оценки показателя Херста (6) для белого гауссовского шума (процесса IID). Из рисунка видно, что для такого процесса значения R/S – статистики формируются вдоль оси  $\hat{H} = 0,5$  и с вероятностью 96% можно принять гипотезу  $H_0$ . Штриховыми линиями обозначены фиксированные значения  $H = 1$ ,  $H = 0,5$  и  $H = 0$ . Смещение значений R/S – статистики наблюдаемого процесса относительно оси  $H = 0,5$  позволяет принять гипотезу  $H_1$ .

На рис. 2 представлена оценка показателя Херста для персистентного процесса («черного шума») [3, 6], которая принимает значение  $\hat{H} = 0,8$ .

Как показано в работе [3] R/S – статистика позволяет выявлять как долговременные зависимости в значениях наблюдаемого процесса, так и его нестационарность. На рис. 3 приведены результаты

моделирования R/S – статистика для стохастического процесса скользящего среднего (МА) с линейной зависимостью в значениях [3], а на рис. 4 стохастического процесса GARCH с нелинейной зависимостью в значениях [6].

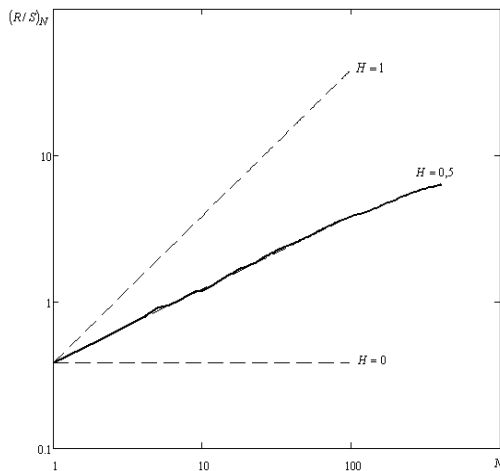


Рис. 1. Оценка показателя Херста для белого гауссовского шума ( $\hat{H} = 0,5$ )

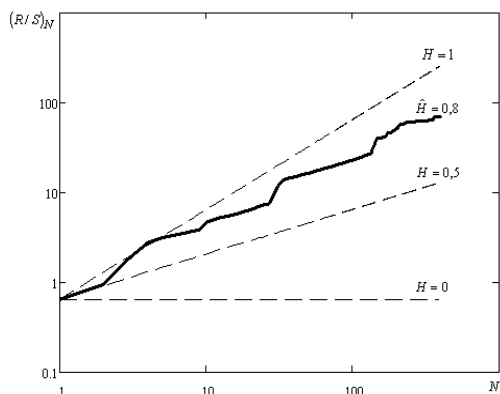


Рис. 2. Оценка показателя Херста персистентного процесса («черного шума»)

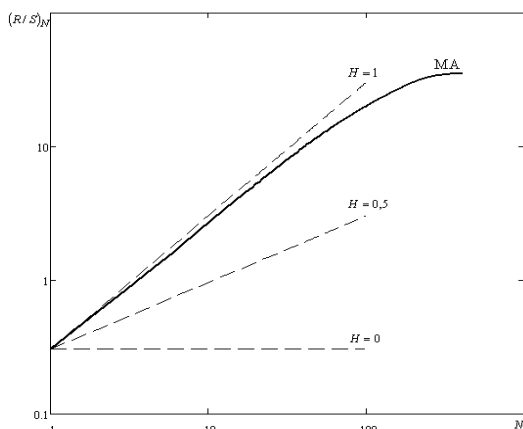


Рис. 3. R/S – статистика стохастического процесса скользящего среднего (МА)

Из рис. 3 видно, что процесс МА имеет долгосрочную зависимость в значениях. И его R/S – статистика позволяет легко принять гипотезу  $H_1$ .

Из рис. 4 видно, что R/S – статистика для процесса GARCH проявляет такие же свойства, как и для «цветного шума» (персистентного процесса), позволяет так же легко принять гипотезу  $H_1$ .

Поскольку детерминированные хаотические процессы также обладают зависимостями в значениях [1], их R/S – статистика отлична от R/S – статистики белого шума и позволяет принимать гипотезу  $H_1$ .

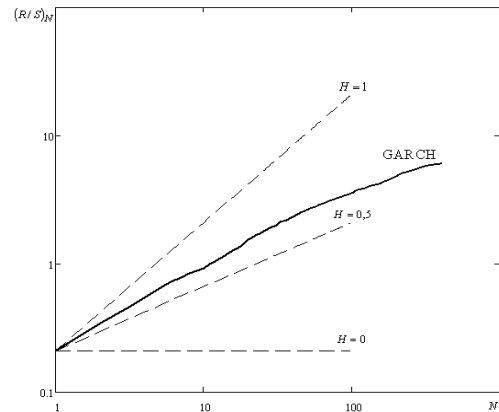


Рис. 4. R/S – статистика нелинейного стохастического процесса GARCH

На рис. 5 приведены результаты моделирования R/S – статистики для хаотического процесса с кусочно-линейным (tent) отображением. Приведенные выше результаты моделирования R/S – статистики получены для идеализированных условий отсутствия шума в наблюдении.

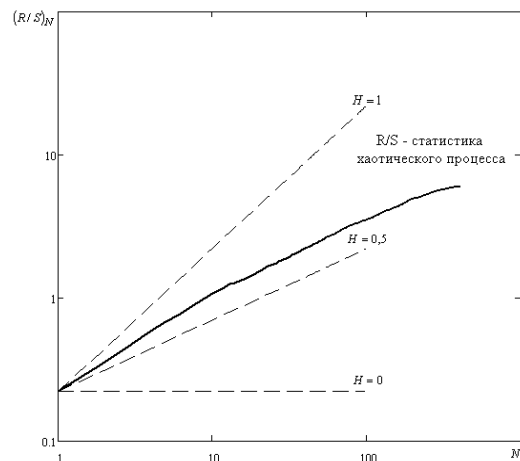


Рис. 5. R/S – статистика детерминированного хаотического процесса

### Оценка границ применимости R/S – статистики

Справедливо ожидать, что наличие аддитивного белого шума в наблюдении будет существенно ограничить возможности R/S – анализа процессов. На рис. 6 показано, как видоизменяются значения R/S – статистики аддитивной смеси хаотического процесса и белого шума для отношения сигнал/шум  $q = 1$ .

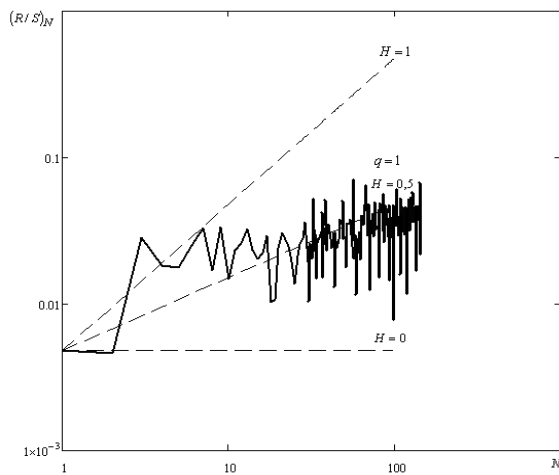


Рис. 6. R/S – статистика аддитивной смеси хаотического процесса и белого шума ( $q = 1$ )

Из рис. 6 видно, что увеличение вклада шума в наблюдении увеличивает разброс значений R/S – статистики и затрудняет решение задачи классификации процессов с использованием значений показателя Херста (коэффициента самоподобия).

На рис. 7 иллюстрируется видоизменение фазового портрета кусочно-линейного хаотического отображения с уменьшением отношения сигнал/шум  $q$  (увеличения вклада шума в аддитивную смесь хаотического процесса и белого гауссовского шума).

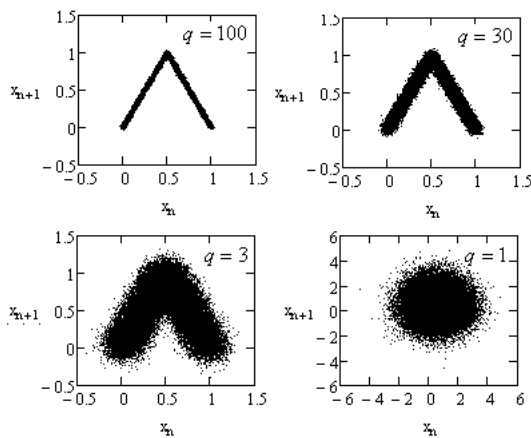


Рис. 7. Видоизменение фазового портрета кусочно-линейного хаотического отображения с уменьшением отношения сигнал/шум  $q$

Используя, приведенные в работе [3] функции правдоподобия для  $H$ , можно получить выражение для дисперсии оценки  $H$ , зависящее от отношения сигнал/шум:

$$\sigma^2(\hat{H}, q) = -1 / \left. \frac{\partial^2 \log L_{\max}(H, q)}{\partial H^2} \right|_{H=\hat{H}}, \quad (7)$$

где

$$\log L_{\max}(H, q) = -\frac{1}{2} \log |R_N(H, q)| - \left( \frac{N}{2} \right) \log \left( \frac{S(H, q)}{N} \right) -$$

функция правдоподобия для  $H$ . На рис. 8 представлены результаты численного моделирования зависимости дисперсии оценки  $H$  от отношения сигнал/шум  $q$ , выраженной в единицах дисперсии шума  $\sigma_{\text{ш}}^2$ , полученные для кусочно-линейного хаотического отображения (прямая линия) и хаотического отображения полиномом Чебышева третьего порядка (пунктирная линия).

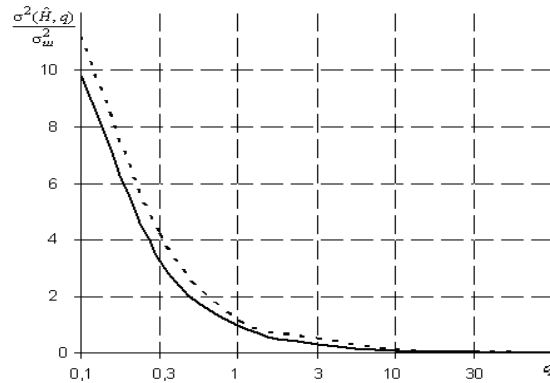


Рис. 8. Зависимости дисперсии оценки  $H$  от отношения сигнал/шум

Из рисунка видно, что наличие шума в наблюдении существенно влияет на качество оценки  $H$ . При  $q < 3$  дисперсия оценки  $H$  резко возрастает с уменьшением  $q$  и возможности его оценки резко снижаются (снижаются возможности классификации процессов с использованием R/S – статистики).

### Выводы

Таким образом, в данной работе была получена оценка границ возможного применения R/S нелинейного (фрактального) анализа процессов, наблюдаемых на фоне аддитивного гауссовского шума, для их классификации. Результаты численного моделирования показали, что R/S – статистика позволяет с заданной вероятностью классифицировать процессы при отношениях сигнал/шум  $q > 3$ . Ее эффективность ограничена тем, что она не учитывает информацию о структуре процесса, которая сохраняется в значениях корреляционных размерностей, его образа в псевдофазовом пространстве вложения.

Проведенное исследование указывает на возможные пути практического применения R/S – статистики для классификации процессов, наблюдаемых на фоне аддитивного шума.

### Список литературы

1. Дмитриев А.С. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / А.С. Дмитриев, А.И. Панас. – М.: Издательство физ.-мат. литературы, 2002. – 252 с.
2. Kennedy M.P. Chaotic Modulation for Robust Digital Communications over Multipass Channels / M.P. Kennedy, G. Kolumban, G. Kis. Jnt. J. Bifurcation and Chaos. 2000. –

V. 10. N 4. – P. 695.

3. Шелухин О.И. Фрактальные процессы в телекоммуникациях / .О.И. Шелухин, А.М. Тенякишев, А.В. Осин. – М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.

4. Kanzler Ludwig Very Fast and Correctly Sized Estimation of the BDS Statistic / Ludwig Kanzler // Christ Church and Department of Economics University of Oxford. – 1999. – 95 с.

5. Schreiber T. Discrimination power of measures for nonlinearity in a time series / A. Schmitz // Physical Review E . – 1997. – V.55, № 5. – P. 5443-5447.

6. Vasiuta K.S. Recognition of colored noise in pseudo-phase space by using BDS statistics / K.S. Vasiuta // Radio-electronics and Communications Systems. – 2009 – Vol. 52,

№12, – С. 667-672.

7. Васюта К.С. Оценка “метризуемости” классов процессов, искаженных аддитивным белым шумом, с использованием квантификации рекуррентных диаграмм / К.С. Васюта // Спеціальні телекомунікаційні системи та захист інформації. – К., 2010. – № 1. – С. 106-116.

Поступила в редколлегию 8.12.2009

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. О.В. Лемешко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники ХНУРЕ, Харьков.

#### ОЦІНКА МЕЖ ЗАСТОСУВАННЯ R/S-СТАТИСТИКИ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ХАОТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ЯКІ СПОТВОРЕНІ АДДИТИВНИМ БІЛИМ ГАУСОВСКИМ ШУМОМ

К.С. Васюта

У роботі приведено алгоритм оцінки показника Херста (коефіцієнта самоподібності) з використанням нелінійної R/S-статистики (методу нормованого розмаху). Проілюстровано можливість класифікації різних класів процесів з використанням R/S - статистики. Приведено оцінку меж можливого застосування R/S нелінійного (фрактального) аналізу хаотичних процесів, спостережуваних на фоні адитивного гаусівського шуму, для їх класифікації. Показано, що можливості даного методу аналізу процесів істотно обмежуються із збільшенням внеску шуму в адитивній суміші спостереження.

**Ключові слова:** R/S - статистика, показник Херста, відношення сигнал/шум.

#### ESTIMATION OF SCOPES APPLICABILITY R/S-STATISTIC FOR THE FRACTAL ANALYSIS OF THE CHAOS PROCESSES DISTORTED BY ADDITIVE WHITE GAUSSIAN NOISE

K.S. Vasuta

The algorithm of estimation index of Xersta (coefficient of self similarity) is in-process resulted with the use of nonlinear R/S are statisticians (method of the rationed scope). Possibility of classification of different classes of processes is illustrated with the use of R/S are statisticians. Estimation of scopes possible application of the R/S nonlinear (fractal) analysis the chaotic processes looked after on a background additive Gaussian noise is resulted, for their classification. It is rotined that possibilities of this method of analysis of processes are substantially limited with the increase of deposit of noise in the additive mixture of supervision.

**Keywords:** R/S is statistics, index of Hearst, relation signal-to-noise.