УДК 004.421.6

М.С. Львов

Херсонський державний університет, Херсон

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ В МАТЕМАТИЧНИХ СИСТЕМАХ НАВЧАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

Розроблення алгоритмів алгебраїчних обчислень є однією з основних задач, що виникають при реалізації математичних систем, основаних на символьних перетвореннях. У даній роботі розглянуто алгоритми тригонометричних обчислень, основані на побудовах канонічних форм тригонометричних виразів, що застосовуються, зокрема, при програмуванні стандартних задач шкільного курсу тригонометрії: задачі спрощення тригонометричного виразу, доведення тригонометричної тотожності, розв'язання тригонометричного рівняння та нерівності.

Ключові слова: *математичні системи навчального призначення, комп'ютерна алгебра, тригонометричні обчислення, канонічні форми.*

Вступ

Розроблення алгоритмів алгебраїчних обчислень є однією з основних задач, що виникають при реалізації математичних систем, основаних на символьних перетвореннях. Математичною моделлю цієї задачі є багатосортні алгебраїчні системи (надалі БАС). Практика розроблення навіть достатньо простих математичних систем навчального призначення [1 – 3] показала, що реалізація алгебраїчних обчислень потребує попереднього проектування БАС та специфікацій інтерпретаторів багатосортних алгебраїчних операцій [4], що використовують ефективні алгоритми комп'ютерної алгебри побудови канонічних форм. Тригонометрія як математична дисципліна займає особливе місце. Тригонометрію вивчають як окремий розділ шкільної алгебри і широко використовують в інших математичних, фізичних та інженерних дисциплінах. Тому і математичні системи навчального призначення мають підтримувати тригонометричні обчислення. Дану роботу присвячено задачам побудови канонічних форм цілих та раціональних тригонометричних виразів.

Для реалізації обчислень, основаних на символьних перетвореннях, ми використовуємо систему алгебраїчного програмування APS [5 – 8]. APS використовує технології алгебраїчного програмування, основані на використанні систем правил переписувань та стратегій переписувань.

1. Цілі тригонометричні вирази

Означення 1. Зафіксуємо множину змінних $\mathrm{Variable}$ і будемо вважати, що на $\mathrm{Variable}$ введено лінійний порядок. Цілими тригонометричними атомами (Т-атомами) будемо називати вирази виду $\mathrm{Sin}(X), \mathrm{Cos}(Y)$, де X, Y – лінійні комбінації змінних та константи Pi з раціональними коефіцієнтами (аргументи Т-атомів). Векторний простір аргументів Т-атомів позначимо через TArg. Векторний простір лінійних комбінацій змінних з раціональними коефіцієнтами позначимо через TArg0.

Тригонометричним мономом (Т-мономом) будемо називати добуток декількох Т-атомів. Півгрупу Т-мономів позначимо через TMon. Цілим тригонометричним виразом (Т-поліномом) будемо називати лінійну комбінацію Т-мономів з коефіцієнтами з деякого розширення TCoef поля раціональних чисел Rat. На множині Т-поліномів визначені операції кільця та операція множення на константу, тобто операції лінійної алгебри. Цю алгебру позначимо через TPol.

Зауваження. Точне визначення Т-поліному в термінах алгебраїчного програмування задається специфікаціями алгебр аргументів, тригонометричних функцій, поля коефіцієнтів та власно алгебри Т-поліномів як членів ієрархії БАС [4]. Ми, однак, зосередимо увагу на алгоритмах комп'ютерної алгебри, не деталізуючи їх в специфікаціях сортів БАС. Алгебраїчні поняття, які використовуються далі, можна знайти у [9].

Реалізація алгебри Т-поліномів

Розглянемо атом $\mathrm{Fi}(a,b,X)$, який визначається формулою

$$\mathrm{Fi}(a,b,X) = a\mathrm{Cos}(X) + b\mathrm{Sin}(X),\quad a,b \in \mathrm{TCoef}, X \in \mathrm{TArg0}. \tag{1}$$

Для $X \in \mathrm{TArg}$ нехай

$$X = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_0\pi,\ c_i \in \mathrm{Rat},\quad x_i \in \mathrm{Variable},\ x_1 > \ldots > x_n. \tag{2}$$

Введемо такі позначення:

$$\mathrm{LeadCf}(X) = c_1, \mathrm{FreeCf} = c_0 .$$

Теорема 1. Будь-який Т-поліном $P(X)$ над полем TCoef можна представити у вигляді суми Fi-атомів

$$P(X) = \mathrm{Fi}(a_1,b_1,X_1) + \ldots + \mathrm{Fi}(a_m,b_m,X_m), \tag{3}$$

де a_j, b_j належать деякому алгебраїчному розширенню поля TCoef, причому, якщо $LeadCf(X_j) > 0, FreeCf(X_j) = 0$, таке представлення одиничне з точністю до перестановки Fi-атомів $Fi(a_j, b_j, X_j),\ j = 1,...m$.

Доведення ми опускаємо. Зауважимо лише, що (3) є скороченою формою запису полінома Фур'є

$$Fi(a_1, b_1, X_1) + ... + Fi(a_m, b_m, X_m) = \\ = \sum_{j=1}^{m} a_j Cos(X_j) + b_j Sin(X_j).$$

Одиничність запису (3) випливає з лінійної незалежності векторів

$$Cos(x), ..., Cos(mx), Sin(x), ..., Sin(mx),$$

яка є відомим фактом математичного аналізу.

Таким чином,

$$Sin(X) = Fi(0,1,X), Cos(X) = Fi(1,0,X). \quad (4)$$

Розширення поля TCoef полягає у приєднанні алгебраїчних чисел $Cos(k\pi/n), Sin(k\pi/n)$. Обчислення у цих розширеннях ми розглянемо нижче.

Множину виразів виду (3) (поліномів Фур'є) позначимо FiPol. Ця лінійна алгебра ізоморфна лінійній алгебрі TPol.

Отже, основна ідея тригонометричних обчислень у кільці Т-поліномів полягає у ізоморфному переході від тригонометричного виразу в TPol до виразу в сигнатурі FiPol, побудові канонічної форми цього виразу як елемента FiPol, та зворотному переході (1) у сигнатуру TPol.

2. Канонічні форми Т-виразів

Означення 2. Нехай F, G – Т-поліноми однієї змінної x. Раціональний вираз $Y = F/G$ будемо називати раціональним тригонометричним виразом (Т – виразом).

Привівши F, G до канонічної форми з використанням функції $Fi(a,b,x)$, отримаємо:

$$H(x) = \frac{Fi(a_k, b_k, kx) + ... + Fi(a_1, b_1, x) + a_0}{Fi(c_m, d_m, mx) + ... + Fi(c_1, d_1, x) + c_0}$$

Основна ідея побудови канонічної форми $H(x)$ – пошук найбільшого спільного дільника чисельника й знаменника цього представлення й скорочення на нього – у точності повторює алгоритм спрощення раціонального алгебраїчного виразу однієї змінної, у якому $Fi(a_j, b_j, jx)$, $Fi(c_j, d_j, jx)$ відіграють роль мономів.

Однак, Т-поліноми розкладаються у добуток неоднозначно. Дійсно,

$$Sin(x) \cdot Sin(x) = (1 - Cos(x))(1 + Cos(x)).$$

Таким чином, має місце рівність Т-виразів

$$\frac{Sin(x)}{1 + Cos(x)} = \frac{1 - Cos(x)}{Sin(x)},$$

кожне з яких є нескоротним в кільці Т-поліномів. Істотним є також вибір поля коефіцієнтів: допустивши комплексні коефіцієнти, цю рівність можна продовжити:

$$\frac{sin(x)}{1 + cos(x)} = \frac{1 - cos(x)}{sin(x)} = \frac{i - i\cos(x) + sin(x)}{1 + cos(x) + i\sin(x)}.$$

Для усунення цих неоднозначностей зафіксуємо, по-перше, поле коефіцієнтів TCoef поля Т-виразів. Нехай TCoef = Rat або його алгебраїчне розширення $Rad = Rat(\sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{p_j}, ...)$). Тим самим, ми виключили можливість використання комплексних коефіцієнтів. Тоді полем Т-виразів є поле $Rat(Fi(a,b,kx)), a, b \in TCoef, k \in N$. По-друге, оберемо й зафіксуємо таку послідовність розширень

$$TCoef \subset TCoef(Cos(x)) \subset \\ TCoef(Cos(x))(Sin(x)), \quad (5)$$

приєднавши до TCoef послідовно елементи $Cos(x),\ Sin(x)$. Позначимо

$$TCoef = F_0, F_0(cos(x)) = F_1, F_1(sin(x)) = F_2.$$

Тоді розширення $F_0 \subset F_1$ є трансцендентним, а розширення $F_1 \subset F_2$ – алгебраїчним. Тому елемент H поля F_2 можна представити у вигляді $H = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f, g \in F_1[Sin(x)]$. Поліноми f, g записані у вигляді суми мономів від ступенів $cos^j(x)$, формулами пониження ступеня можуть бути переписані у поліноми від $Cos(jx)$.

$$f(x) = a_0 Cos(kx) + ... + a_{k-1} Cos(x) + a_k;$$
$$g(x) = b_0 Cos(mx) + ... + b_{m-1} Cos(x) + b_m.$$

Елемент $H \in F_1$ можна представити у вигляді:

$$H = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 Cos(kx) + ... + a_{k-1} Cos(x) + a_k}{b_0 Cos(mx) + ... + b_{m-1} Cos(x) + b_m}. \quad (6)$$

При цьому Т-поліноми f, g взаємно прості: $gcd(f, g) \in F_0$. Це представлення не є однозначним: для канонічності дріб (6) треба нормалізувати, розділивши чисельник і знаменник на $lc(g) = b_0$:

$$H = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a'_0 Cos(kx) + ... + a'_{k-1} Cos(x) + a'_k}{Cos(mx) + ... + b'_{m-1} Cos(x) + b'_m}; \\ a'_j = \frac{a_j}{b_0},\ b'_l = \frac{b_l}{b_0}. \quad (7)$$

Таке представлення є канонічним. Далі, оскільки $\mathrm{Cos}^2(x) + \mathrm{Sin}^2(x) = 1$, ступінь розширення $F_1 \subset F_2$ дорівнює 2. Тому елемент поля F_2 можна представити у вигляді лінійного двочлена:

$$H \in F_2 \Rightarrow H = G_0 \mathrm{Sin}(x) + G_1, G_0, G_1 \in F_1. \quad (8)$$

Таким чином, ми довели

Теорема 2. Канонічною формою Т-виразу є його представлення у вигляді

$$\begin{aligned} & H = \frac{f_0(x)}{g_0(x)}\sin(x) + \frac{f_1(x)}{g_1(x)}; \\ & f_0, g_0, f_1, g_1 \in F_1 = F_0(\cos(x));\ . \\ & \gcd(f_0, g_0) = 1,\ \gcd(f_1, g_1) = 1; \\ & \mathrm{lc}(g_0) = 1,\ \mathrm{lc}(g_1) = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Для розв'язання задачі залишилося вказати алгоритм обернення цілого Т-виразу, тобто алгоритм побудови канонічної форми виразу виду

$$H(x) = \frac{1}{\sin(x)f(x) + g(x)}, f(x),\ g(x) \in F_1. \quad (10)$$

Покладемо

$A = f(x),\ B = g(x),\ u = \mathrm{Cos}(x),\ v = \mathrm{Sin}(x)$. Тоді

$$\frac{1}{vA + B} = vP + Q,\ P, Q \in F_1. \quad (11)$$

Рівняння (11) відносно P, Q розв'яжемо у полі $F_2 = F_0(u, v)/\{v^2 + u^2 = 1\}$, помноживши обидві частини на сполучену величину $-vA + B$:

$$\frac{B - vA}{B^2 - v^2A^2} = \frac{B - vA}{B^2 - (1 - u^2)A^2} = \frac{B - vA}{B^2 - A^2 + u^2A^2} = \frac{B}{B^2 - A^2 + u^2A^2} + v\frac{-A}{B^2 - A^2 + u^2A^2}.$$

Звідси

$$P = \frac{B}{B^2 - A^2 + u^2A^2},\ Q = \frac{-A}{B^2 - A^2 + u^2A^2}. \quad (12)$$

Формули (12) представляють правило обернення виразу (10).

Канонічна форма (9) використовує обчислення з дійсними числами. Якщо в цій формі використовувати представлення f_0, f_1, g_0, g_1 у вигляді алгебраїчних поліномів (тобто здійснити ізоморфне перетворення $y = \mathrm{Cos}(x)$), також можна використовувати ефективні реалізації обчислень у кільці поліномів однієї змінної. Однак, для деяких шкільних тригонометричних задач таке представлення є неефективним. Справді, у задачі на рівняння виду $\mathrm{Sin}(1000x) = \mathrm{Sin}(x)$ канонічною формою буде поліном 1000-ого ступеня, у якому всі коефіцієнти відмінні від нуля. Тому f_0, f_1, g_0, g_1 краще представляти у формі (3).

Канонічні форми Т-виразів багатьох змінних можна побудувати, використовуючи рекурсивні представлення. Нехай $X = \{x_1, ..., x_k\} \subset \mathrm{Variable}$ і $x_1 < ... < x_k$. Через F_0 позначимо поле TCoef, а через $F_{tr}(x)$ – поле Т-виразів змінної x над F. Тоді зростаюча послідовність полів

$$F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_j \subset F_{j+1} \subset ... \subset F_k,$$

в якій $F_{j+1} = F_{tr}(x_{j+1})$ визначає алгоритм побудови канонічних форм у полі Т-виразів багатьох змінних.

3. Поле коефіцієнтів Т-поліномів

Вище ми визначили поле TCoef як поле коефіцієнтів Т-поліномів. У найпростішому випадку цим полем є Rat. Однак, навіть у простих прикладах тригонометричних задач шкільного типу коефіцієнтами можуть бути квадратні радикали.

$$\mathrm{Sin}(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ \mathrm{Sin}(\pi/3) = \sqrt{3}/2.$$

Тому використання поля Rad дозволяє розширити клас тригонометричних задач, які підтримуються програмною системою. Однак, як ми установили у теоремі 1, найбільш прийнятним є розширення поля Rad тригонометричними функціями від аргументів виду $k\pi/n, k, n \in N$.

Нехай $\mathrm{TCoef} = \mathrm{Rad}(\mathrm{Sin}(k\pi/n), \mathrm{Cos}(k\pi/n)), k, n \in N$.

Оскільки $\mathrm{Sin}(\alpha) = \mathrm{Cos}(\pi/2 - \alpha)$,

$$\mathrm{TCoef} = \mathrm{Rad}(\mathrm{Cos}(k\pi/n, k, n \in N). \quad (14)$$

Числа $\mathrm{Cos}(k\pi/n)$ є алгебраїчними. Тому для $\mathrm{Cos}(\pi/n)$ над Rat існує мінімальний поліном – поліном $P_c(x) \in \mathrm{Rat}[x]$ мінімального ступеня такий, що $P_c(\mathrm{Cos}(\pi/n)) = 0$. Перетвореннями виду

$$\begin{aligned} & \mathrm{Cos}^k(x) = c_0\mathrm{Cos}(kx) + c_1\mathrm{Cos}((k-1)x) + \\ & ... + c_{k-1}\mathrm{Cos}(x) + c_k \end{aligned} \quad (15)$$

поліному $P_c(x)$ можна поставити у відповідність Т-поліном, який природно називати мінімальним Т-поліномом числа $\mathrm{Cos}(\pi/n)$.

Означення 3. Мінімальним Т-поліномом числа $a = \mathrm{Cos}(\pi/n), n \in N$ над Rat називається Т-поліном мінімального ступеня m виду

$$\begin{aligned} & T(x) = \mathrm{Cos}(mx) + ... + c_{m-1}\mathrm{Cos}(x) + c_m, \\ & c_j \in \mathrm{Rat} \end{aligned} \quad (16)$$

такий, що $T(a) = 0$

Наступна теорема установлює співвідношення між мінімальним поліномом алгебраїчного числа $e_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ та мінімальним Т-поліномом дійсної частини $\mathrm{Re}(e_n) = \mathrm{Cos}(\pi/2n)$.

Теорема 3. Нехай $e_n = \mathrm{Cos}(2\pi/n) + i\mathrm{Sin}(2\pi/n)$ – первісний корінь ступеня n з одиниці $P_n(z) \in \mathrm{Rat}[z]$ – мінімальний поліном e_n над Rat, $T_n(x)$ – мінімальний Т-поліном $\mathrm{re}(e_n) = \mathrm{Cos}(2\pi/n)$ над Rat та $m = \deg(P_n)$. Тоді для будь-якого $z, |z| = 1$, має місце співвідношення

$$P_n(z) = z^{m/2} \cdot T_n(\mathrm{re}(z)). \qquad (17)$$

Доведення ми опускаємо.

Наслідок. Якщо $P_e(z) = z^m + ... + c_{m-1}z + 1$ – мінімальний поліном первісного кореня $e_n = \mathrm{Cos}(2\pi/n) + i\mathrm{Sin}(2\pi/n)$, $m = 2l$, мінімальний Т-поліном числа $\mathrm{Cos}(2\pi/n)$ має вид

$$T(x) = 2(\mathrm{Cos}(lx) + c_1\mathrm{Cos}((l-1)x) + ... + c_{l-1}\mathrm{Cos}(x)) + c_l.$$

Таким чином, для значення $x = 2\pi/n$ має місце співвідношення

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cos}(2l\pi/n) = -c_1\mathrm{Cos}(2(l-1)\pi/n - \\ &... - c_{l-1}\mathrm{Cos}(2\pi/n) - c_l/2.\end{aligned} \qquad (19)$$

Формула (19) використовується при побудові канонічної форми числового Т-поліному.

Означення 4. Числовим Т-поліномом називається вираз виду

$$\begin{aligned}&F(\mathrm{Cos}(k_1\pi/n_1), ..., \mathrm{Cos}(k_m\pi/n_m)); \\ &F(x_1, ..., x_m) \in Q[x_1, ..., x_m].\end{aligned} \qquad (20)$$

Означення 5. Канонічною формою виразу (20) називається лінійна комбінація виду

$$L(F) = \sum_{j=0}^{M} c_j \cos(j\pi/n),\ M < n/2.$$

Алгоритм побудови канонічних форм, тобто алгоритм обчислень у полі TCoef по суті здійснює редукцію числових Т-поліномів до канонічної форми за допомогою правила (19).

Алгоритм побудови мінімального Т-поліному числа $\cos(2\pi/n)$ по суті є алгоритмом побудови мінімального полінома первісного кореня $e_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. Далі ми наводимо одну з ефективних версій цього відомого теоретико-числового алгоритму.

Теорема 4. Нехай $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_l^{k_l}$ - представлення числа n у вигляді добутку ненульових степенів простих чисел і $m = p_1 p_2 ... p_k$, $d = n/m$. Нехай, далі $\Phi_n(x), \Phi_m(x)$ – мінімальні поліноми первісних коренів e_n, e_m. Тоді

$$\Phi_n(x) = \Phi_m(x^d). \qquad (21)$$

Доведення ми опускаємо.

Теорема 5. Нехай $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... p_r, k = l \cdot s$, де l – число, взаємно просте з m, а $s = p_1^{w_1} p_2^{w_2} ... p_l^{w_l}$, $t \le r$. Якщо $\{e_1, e_2, ..., e_{\varphi(m)}\}$ – множина всіх первісних коренів ступеня m з 1, то

$$P_k = \sum_{j=1}^{\varphi(m)} e_j^k = (p_1 - 1) \cdot ... \cdot (p_l - 1) \cdot (-1)^{r-l}.$$

Доведення ми опускаємо.

Коефіцієнти $S_k(x_1, ..., x_n)$ мінімального поліному $\Phi_m(x)$ обчислюються через суми степенів $P_k(x_1, ..., x_n)$ за формулами Ньютона.

Введемо позначення: $P_k = x_1^k + ... + x_n^k$. Тоді співвідношення Ньютона має вид

$$\begin{aligned}&P_k - P_{k-1}S_1 + P_{k-2}S_2 + ... + \\ &(-1)^{k-1}P_1S_{k-1} + (-1)^k \cdot k \cdot S_k = 0,\ 1 \le k \le n.\end{aligned}$$

Основний алгоритм {Побудова мінімального полінома первісного кореня ступеня n з 1.}

Вхід: натуральне n;

Вихід: m, d; $a_0, ..., a_{\varphi(m)}$;

$$\left\{\begin{aligned}&f(x) = S_{\phi(m)} + S_{\phi(m)-1}x^d + \\ &... + S_1 x^{(\varphi(m)-1)d} + x^{\varphi(m)d.}\end{aligned}\right\}$$

1. Для $n = p_1^{\alpha_{1l}} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$ обчислити r, $p_1, ..., p_r$; $m = p_1 \cdot ... \cdot p_r$ **;** $d = n \text{ div } m$;
2. Обчислити $S_1 = \mu(m)$; $P_1 = S_1$;
3. Для j від 2 до $\varphi(m)$ обчислити

3.1. Обчислити

$$P_k = (p_{j1} - 1)(p_{j2} - 1)...(p_{jt} - 1) \cdot (-1)^{r-t}.$$

Обчислити S_k зі співвідношення

$$\begin{aligned}&P_k - P_{k-1}S_1 + P_{k-2}S_2 + \\ &... + (-1)^{k-1}P_1S_{k-1} + (-1)^k \cdot k \cdot S_k = 0,\ 1 \le k \le n.\end{aligned}$$

Крок 1 можна реалізувати методом пробних ділень на послідовні прості числа. На виході – послідовність простих дільників n, їхній добуток m і число d – ступінь змінної x у (21).

Крок 2 полягає в обчисленні $\mu(m)$ – парності числа r. Цей крок ініціює цикл 3.1-3.2.

Крок 3.1 обчислює суму k-тих ступенів первісних коренів. Відповідно до теореми 5 ця сума дорівнює добутку чисел $p_j - 1$ для всіх таких j, що p_j ділить k. Ці обчислення можна реалізувати методом пробних ділень числа k на p_j. Число t дорівнює числу успіхів у циклі пробних ділень.

Крок 3.2. реалізується циклом від 1 до k, у якому обчислюються S_k.

4. Операція ділення у полі TCoef

Вище ми визначили алгоритми операцій додавання, віднімання та множення елементів поля TCoef. Залишилося визначити алгоритм операції ділення двох елементів TCoef, тобто надати алгоритм обчислення коефіцієнтів полінома $T(x) = T_1(x)/T_2(x)$. Оскільки поле TCoef є алгебраїчним розширенням поля Q, можна застосовувати стандартний алгоритм, який полягає у наступному:

Знаходимо елемент TCoef, обернений до $T_2(x)$. Для цього застосовуємо розширений алгоритм Евкліда до пари поліномів $M(y), T_2(y)$, де $M(y)$ – мінімальний поліном числа $Cos(2\pi/n)$. Розширений алгоритм Евкліда разом з $gcd(M(y), T_2(y))$ знаходить такі поліноми $D_1(y), D_2(y)$, що

$$D_1(y)M(y) + D_2(y)T_2(y) = gcd(M(y), T_2(y)).$$

Оскільки $M(y)$ неприводимий над Q і $deg(T_2(y)) < deg(M(y))$, маємо $gcd(M(y), T_2(y)) = 1$. Отже, $D_1(y)M(y) + D_2(y)T_2(y) = 1$. Оскільки $M(x) = 0$, $D_2(x)T_2(x) = 1$ або $D_2(x) = \frac{1}{T_2(x)}$.

Цей метод можна модифікувати для Т-поліномів. Розглянемо тригонометричну тотожність

$$\begin{aligned} Cos(nx) = (2Cos(n-m)x) \cdot Cos(mx) - \\ - cos((2m-n)x). \end{aligned} \tag{22}$$

Рівність (22) використовується у розширеному алгоритмі Евкліда для вирівнювання степенів тригонометричних поліномів, старші члени яких ми позначаємо через $Cos(nx), Cos(mx), m < n$.

Висновки

Методи побудови канонічних форм Т-виразів можна використовувати при реалізації алгоритмів розв'язання стандартних шкільних тригонометричних задач в математичних системах, основаних на символьних перетвореннях та методах комп'ютерної алгебри. Це задачі на спрощення, доведення тотожностей, розв'язання рівнянь та нерівностей. Канонічна форма Т-виразу по суті зводить тригонометричні обчислення до обчислень у полі раціональних функцій. Таким чином, в тригонометричних обчисленнях можна застосовувати ефективні алгоритми алгебри поліномів. Окремо відзначимо алгоритм обчислень в алгебраїчних розширеннях $Rat(Cos(k\pi/n))$, який, зокрема, дозволяє побудувати ефективні алгоритми розв'язання шкільних геометричних задач «з використанням тригонометрії».

Список літератури

1. *Lvov M., Kuprienko A., Volkov V. Applied Computer Support of Mathematical Training Proc. of Internal Work Shop in Computer Algebra Applications, Kiev. – 1993. – Pp. 25-26.*
2. *Lvov M. AIST: Applied Computer Algebra System Proc. of ICCTE'93. Kiev. – Pp. 25-26.*
3. *Песчаненко В.С. Розширення стандартних модулів системи алгебраїчного програмування APS для використання у системах навчального призначення / В.С. Песчаненко // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: зб. наук. пр. – К.: НПУ, 2005. – № 3(10). – С. 206-215.*
4. *Львов М.С. Синтез інтерпретаторів алгебраїчних операцій в розширеннях багатосортних алгебр / М.С. Львов // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2009. – № 847. – С. 221-238.*
5. *Letichevsky A., Kapitonova J., Volkov V., Chugajenko A., Chomenko V. Algebraic programming system APS (user manual) Glushkov Institute of Cybernetics, National Acad. of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine, 1998.*
6. *Капитонова Ю.В. Дедуктивные средства системы алгебраического программирования / Ю.В. Капитонова, А.А. Летичевский, В.А. Волков // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 1. – С. 17-35.*
7. *Kapitonova J., Letichevsky A., Lvov M., Volkov V. Tools for solving problems in the scope of algebraic programming. Lectures Notes in Computer Sciences. – № 958. – 1995. – Pp. 31-46.*
8. *Песчаненко В.С. Использование системы алгебраического программирования APS для построения систем поддержки изучения алгебры в школе / В.С. Песчаненко // Управляющие системы и машины. –2006. – №4. – С. 86-94.*
9. *Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. Изд. 2-ое. – М.: ГРФМЛ, 1979. – 624 с.*

Надійшла до редколегії 8.02.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.М. Жолткевич, Харківський національнийуніверситет ім. В.Н. Каразіа, Харків.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УЧЕБНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

М.С. Львов

Разработка алгоритмов алгебраических вычислений – одна из основных задач, которые возникают при реализации математических систем, основанных на символьных преобразованиях. В настоящей работе рассмотрены алгоритмы тригонометрических вычислений, основанные на построении канонических форм тригонометрических выражений, которые применяются, в частности, при программировании стандартных задач школьного курса тригонометрии: упрощения выражения, доказательства тождества, решения уравнения и неравенства.

Ключевые слова: *математические системы учебного назначения, компьютерная алгебра, тригонометрические вычисления, канонические формы.*

TRIGONOMETRIC COMPUTATIONS IN MATHEMATICAL EDUCATIONAL SOFTWARE

M.S. Lvov

Development of algorithms of algebraic computations is one of basic tasks, which arise up during the realization of the mathematical systems, based on symbol transformations. The algorithms of trigonometric computations, based on the construction of canonical forms of trigonometric expressions which are used, in particular, at programming of standard tasks of trigonometry school course: simplifications of expression, proving of identity, solving of equation and inequality are considered in the work.

Keywords: *Mathematical systems of educational purpose, methods of computer algebra, symbol transformations, trigonometry.*