

УДК 531/534:001.8

О.О. Юрченко

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З НЕЛІНІЙНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Стаття присвячена питанням розвитку методів вивчення руху нелінійних коливань дискретних механічних систем за допомогою диференціальних рівнянь руху на основі теорії загальних теорем динаміки. Розглянуті причини виникнення нелінійних явищ і методика складання диференціальних рівнянь руху, які визначаються структурою системи.

Ключові слова: дискретні системи, рівняння руху, концентрація напруг.

Вступ

На основі аналізу отриманих рішень [1] було показано, що при умові відсутності нелінійних сил коливання механічних систем достатньо точно описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Досить часто при розрахунках деяких силових конструкцій літальних апаратів та елементів механізмів і машин виникають задачі, в яких лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами не у змозі достатньо точно описати їх дійсні рухи. Так, наприклад, установлено [2], що руйнування в турбінних дисках не можна пояснити тільки дефектами матеріалу або надмірними напруженнями від дії інерційних сил. Їх можна віднести на рахунок згінних коливань валів та самих дисків.

Слід відмітити, що такі коливання при певних кутових швидкостях турбіни виявляються дуже помітними і викликають значні додаткові напруги, які є причиною появи місць концентрації напруг. Тому в деяких випадках дослідження коливань механічних систем потребують складання нелінійних диференціальних рівнянь. Такі системи в механіці називають системами з нелінійними характеристиками.

Існує багато причин виникнення нелінійних явищ в механічних системах, які обумовлені як діючими силами, так і параметрами самої системи. Дійсно, до рівнянь руху будь-якої коливальної системи входять її інерційні характеристики у вигляді мас або моментів інерції тіл, жорсткості пружин, валів, балок і пружних елементів, характеристики сил опору і вимушених сил. Чисельні значення всіх цих параметрів повинні бути визначені з достатньою точністю, що можна зробити аналітично або за допомогою розрахунків.

Очевидно, що розрахунковий шлях є одним з можливих, якщо система ще не утворена і відсутні деталі та вузли. Навіть при наявності системи цей шлях більш доцільний, бо є найбільш економічним і дозволяє забезпечити необхідну точність.

Однією з головних причин виникнення нелінійних явищ в механічних системах може стати

наявність нелінійних пружних характеристик окремих її елементів. В цих випадках можна вважати, що модуль сили пружності змінюється за законом Гука лише у визначених межах. Для деяких матеріалів (бетон, гума) сила тертя зростає швидше, ніж за лінійним законом. Тоді відповідна характеристика пружності буде «жорсткою».

При дослідженні коливань, які відбуваються поблизу рівноважного стану системи, нелінійні пружні характеристики можуть бути лінеаризовані. Однак, лінеаризація нелінійних диференціальних рівнянь руху може впливати не тільки на кількісні результати, але й суттєво перекидати якісну сторону фізичних явищ, які розглядаються.

Основна частина

Для дослідження руху нелінійних систем можна користуватися рівняннями Лагранжа другого ряду, тоді нелінійні члени в системі диференціальних рівнянь отримуються автоматично.

Вони можуть мати фізичний зміст нелінійних пружних сил, мас або моментів інерції, які залежать від вибору узагальнених координат або нелінійних сил опору.

Розглянемо метод складання диференціальних рівнянь руху не лінійних систем, який заснований на теорії загальних теорем динаміки.

З математичної точки зору принципове значення має не число ступенів вільності системи, а число нелінійних параметрів, які входять до неї. Тому виникає потреба замінити систему меншою кількістю рівнянь, але більш високого порядку. З існуючих напрямків дослідження такого типу задач зупинимось на ідеї, в основі якої лежить використання інтегрального рівняння для систем з одним нелінійним пружним з'єднанням.

Для прикладу розглянемо розрахункову модель чотирьохступінчастого валу редуктора вертольота, для якого моменти діючих сил на ділянках 1 та 4 відповідно дорівнюють $M_1 \sin pt$ та $M_4 \sin pt$, а момент сил на ділянці 2 – 3 має нелінійну характерис-

тику $M_{23} = f(\phi_2 - \phi_3)$, причому тертя в системі не враховується.

Так як головними є крутильні коливання, то будемо розглядати модель дисків, в якій пружинні властивості частин валу будуть C_1, C_2, C_3, C_4 і зберігаються такими, як і у початковому валу. Моменти інерції кожного диску I_1, I_2, I_3, I_4 дорівнюють моментам інерції кожного з чотирьох ступенів валу, а центр мас кожного диску співпадає з центром мас відповідної ступені.

Така розрахункова модель має практичну цінність, бо вона досить часто зустрічається в конструкціях машин. Це вали редукторів різних класів та призначень, вали повітряного або гребного гвинтів, на одному кінці якого двигун, а на іншому гвинт [3].

Приймаючи за узагальнені координати кути ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 та ϕ_4 , систему диференціальних рівнянь обертального руху для кожного диска отримаємо на основі теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи

$$\phi(t) = \int_0^t \Phi_{23}(t-s)F[\phi(s)ds] + M_1 \int_0^t \Phi_1(t-s)\sin(ps)ds + M_4 \int_0^t \Phi_4(t-s)\sin(ps)ds, \quad (3)$$

де P – частота вимушених коливань; τ – період вимушених коливань; $\Phi_{23}(t)$ – рівняння руху ділянки 2–3; $\Phi_1(t), \Phi_4(t)$ – рівняння руху відносно мас 1 та 4.

Треба відмітити, що $\Phi_1(t)$ та $\Phi_4(t)$ визначаються із розрахунку чисто лінійної системи, матриця коефіцієнтів якої відображена в лівих частинах рівнянь; зовнішня дія являється системою періодичних миттєвих одиничних імпульсів, які прикладені до з'єднання 2–3, а також до кожної із мас 1 та 4.

Співвідношення (3) – інтегральне рівняння відносно невідомої функції $\phi(t)$. Розв'язати його можна будь-яким відомим приблизним або чисельним способом і в результаті визначити залежності від часу решти узагальнених координат.

ВИСНОВОК

Таким чином, використовуючи для інженерних розрахунків обчислювальну техніку, можна автома-

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\phi}_1 &= C_1 \phi_1 - C_2 (\phi_1 - \phi_2) + M_1 \cdot \sin p t, \\ I_2 \ddot{\phi}_2 &= C_2 (\phi_1 - \phi_2) - f(\phi_2 - \phi_3), \\ I_3 \ddot{\phi}_3 &= f(\phi_2 - \phi_3) - C_4 (\phi_3 - \phi_4), \\ I_4 \ddot{\phi}_4 &= C_4 (\phi_3 - \phi_4) + M_4 \cdot \sin p t. \end{aligned} \quad (1)$$

Нелінійну функцію представимо у вигляді

$$f(\phi_2 - \phi_3) = C_3 (\phi_2 - \phi_3) + F(\phi_2 - \phi_3),$$

де C_3 – будь-яке число.

Перенесемо всі лінійні члени в ліву частину рівнянь, а нелінійні приєднаємо до зовнішніх сил:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\phi}_1 + C_1 \phi_1 + C_2 (\phi_1 - \phi_2) &= M_1 \cdot \sin p t, \\ I_2 \ddot{\phi}_2 - C_2 (\phi_1 - \phi_2) + C_3 (\phi_2 - \phi_3) &= -F(\phi_2 - \phi_3), \\ I_3 \ddot{\phi}_3 - C_3 (\phi_2 - \phi_3) + C_4 (\phi_3 - \phi_4) &= F(\phi_2 - \phi_3), \\ I_4 \ddot{\phi}_4 - C_4 (\phi_3 - \phi_4) &= M_4 \cdot \sin p t. \end{aligned} \quad (2)$$

Користуючись принципом суперпозиції, кут закручування нелінійної ділянки $\phi = (\phi_2 - \phi_3)$ при встановлених вимушених коливаннях можна записати у вигляді:

тизувати усі операції, які пов'язані із складанням рівнянь руху. Для цього потрібно задати початкові дані, які стосуються як самої механічної системи, так і початкових умов руху. Ці дані визначають структуру системи, вид узагальнених координат та характеристики нелінійної системи.

Список літератури

1. Юрченко О.О. Розрахунок лінійних коливань систем з малим числом ступенів свободи / О.О. Юрченко // Збірник наукових праць XI ВПС, 2004. – С. 9-14.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М., 1959. – 349 с.
3. Михеев Р.А. Прочность вертолета / Р.А. Михеев. – М.: Машиностроение, 1984. – 250 с.

Надійшла до редколегії 23.12.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Х.В. Раковський, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

О.О. Юрченко

Статья посвящена вопросам развития методов изучения движения нелинейных колебаний дискретных механических систем с помощью дифференциальных уравнений движения на основе теории общих теорем динамики. Рассмотрены причины возникновения нелинейных явлений и методика составления дифференциальных уравнений движения, которые определяются структурой системы.

Ключевые слова: дискретные системы, уравнения движения, концентрация напряжений.

RESEARCH OF THE FORCED VIBRATIONS OF DISCRETE SYSTEMS WITH NONLINEAR DESCRIPTIONS

O.A Yurchenko

The article is devoted the questions of development of methods of study of motion of nonlinear vibrations of the discrete mechanical systems by differential equalizations of motion on the basis of theory of general theorems of dynamics. Reasons of origin of the nonlinear phenomena and method of drafting of differential equalizations are considered motions which are determined the structure of the system.

Keywords: discrete systems, equalizations of motion, concentration of tension.