УДК 519.85

И.В. Гребенник, А.В. Баранов

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

В работе рассматривается многокритериальная задача размещения элементов, имеющих форму параллелепипеда в области, также имеющей форму параллелепипеда. Рассмотрены особенности задачи, построены математические модели. Описан метод решения на основе схемы ветвей и границ. Проведены вычислительные эксперименты.

Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация, метод ветвей и границ, математическое моделирование, Ф-функция, упаковка.*

Введение

Задачи раскроя и размещения (Cut and Cutting problems [1]) элементов в некоторой области возникают во многих областях человеческой деятельности. Примерами таких задач могут быть размещение контейнеров в трюме корабля, размещение товара на складах, формирование карт раскроя при подготовке полиграфической продукции или проектирование и размещение элементов на электронных платах [2]. Во многих работах такие задачи рассматриваются как однокритериальные оптимизационные задачи. Примерами критериев оптимизации могут служить: заполнение области размещения, остаток материала, плотность размещения и другие. Однако, структура многих практических задач такова, что требует учета нескольких критериев одновременно. Так в [3] рассматривается задача доставки грузов в различные пункты. Для решения задачи необходимо не только максимально заполнить грузовой отсек, а также, в зависимости от выбранного маршрута, обеспечить удобство выгрузки груза в пунктах разгрузки.

Целью настоящей работы является математическое моделирование и решение многокритериальных задач размещения элементов, имеющих форму параллелепипеда в области размещения, также имеющей форму параллелепипеда.

Общая постановка задачи

Рассмотрим задачу упаковки n-мерных параллелепипедов в параллелепипеде, которая является обобщением и развитием задач упаковки, исследованной в [4, 5], и состоит в следующем. Имеется N прямоугольных *n*-мерных параллелепипедов (n-параллелепипедов) $P_i \subset R^n$ вида

$$P_i = \{x \in R^n : x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid 0 \le x_k \le a_{ik},\ k \in J_n = \{1, 2, ..., n\}\}, \quad (1)$$

где $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ – вектор метрических характеристик (линейных размеров) n-параллелепипеда P_i, $i \in J_N$, $J_N = \{1, 2, ..., N\}$. Каждый n-параллелепипед P_i характеризуется векторами параметров размещения и числовых параметров $\theta_i \in R^s$, $i \in J_N$, среди которых могут быть координаты его центра тяжести, ценность, вес и т. д. Полагаем, что n-параллелепипеды P_i могут поворачиваться на углы $\pi/2$ относительно координатных плоскостей пространства R^n. Задана область размещения в виде *n*-параллелепипеда D_0, который определяется как

$$D_0 = \{x \in R^n, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid 0 \le x_k \le b_{0k}, k \in J_n\}, \quad (2)$$

где $b_{01} = d$ – переменная величина, $b_0 = (b_{01}, ..., b_{0n})$ – вектор метрических характеристик n-параллелепипеда D_0. При этом грани n-параллелепипедов P_i, $i \in J_N$, параллельны соответствующим граням n-параллелепипеда D_0. Размещение n-параллелепипедов P_i, $i \in J_N$, в области D_0 характеризуется векторным критерием $F = (F_1, F_2, ..., F_m)$.

Необходимо упаковать n-параллелепипеды P_i из множества $\{P_1, P_2, ..., P_N\}$ с учетом возможности их поворотов на углы $\pi/2$ в n-параллелепипеде D_0 так, чтобы параллелепипеды попарно не пересекались, выполнялись заданные ограничения на значения параметров θ_i, и векторный критерий F достигал экстремального значения.

Особенности решения общей задачи

Для решения задачи в приведенной постановке могут быть использованы различные комбинации методов многокритериальной оптимизации и схем перебора локальных экстремумов скалярных задач оптимизации. Сложность сформулированной задачи, большое количество вариантов размещения параллелепипедов не позволяют использовать точные методы оптимизации, ориентируя на применение приближенных и эвристических методов.

В частности, анализ многокритериальных задач можно проводить следующими способами [6, 7]:

1. Выделение Парето-оптимальных решений – различных вариантов размещения параллелепипедов.

2. Формирование многофакторных скалярных оценок различных вариантов размещения *n*-параллелепипедов на основе свертки критериев с последующей оптимизацией скалярного обобщенного критерия.

3. Схема последовательно применяемых критериев.

Решение скалярных задач оптимизации локальных критериев или обобщенного критерия можно проводить на основе метода сужающихся окрестностей (МСО) [8].

Рассмотрим некоторые реализации общей задачи размещения параллелепипедов.

Задача 1. Имеется N прямоугольных *n*-параллелепипедов $P_i \subset R^n$ вида (1) и область размещения D_0 вида (2). Грани *n*-параллелепипедов P_i, $i \in J_N$, параллельны соответствующим граням *n*-параллелепипеда D_0. Для каждого параллелепипеда P_i известны координаты его центра тяжести в собственной системе координат $m_{0i} = (m_1^{0i}, m_2^{0i}, ..., m_n^{0i}) \in P_i$, соответствующие его начальной ориентации, и масса $M_i, i \in J_N$. Полагаем, что:

1. Кроме поворотов параллелепипедов P_i на углы $\pi/2$ допустимы их зеркальные отражения относительно координатных плоскостей.

2. Линейные размеры области D_0 позволяют разместить все *n*-параллелепипеды P_i, $i \in J_N$. Для этого полагаем, что $b_{0k} \geq \max\limits_{i \in J_N, j \in J_n}$, $k = 2, 3, ..., n$.

3. Размещение *n*-параллелепипедов P_i, $i \in J_N$, в области D_0 характеризуется векторным критерием $F = (F_1, F_2)$, где F_1 – длина d ребра b_{01}, характеризующая занятую часть области D_0, F_2 – характеристика отклонения центра тяжести размещенных параллелепипедов от заданной точки области D_0.

Необходимо упаковать *n*-параллелепипеды P_i, $i \in J_N$, с учетом возможности их поворотов на угол $\pi/2$ и зеркальных отражений в *n*-параллелепипеде D_0 так, чтобы параллелепипеды попарно не пересекались и критерии F_1 и F_2 достигали минимального значения.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи необходимо так упаковать *n*-параллелепипеды P_i, $i \in J_N$, чтобы центр тяжести размещенных параллелепипедов находился в некоторой окрестности заданной точки области D_0, описываемой системой линейных неравенств.

Построение математических моделей задач

Для построения математических моделей задач 1,2 используем математический аппарат Φ-функций [4,9,10].

С каждым *n*-параллелепипедом P_i, $i \in J_N$, свяжем ортогональную подвижную систему координат $O_i x_{i1} x_{i2} ... x_{in}$, а с областью D_0 – неподвижную систему координат $Ox_1 x_2 ... x_n$. Начало собственной (подвижной) системы координат *n*-параллелепипеда P_i – точку O_i, находящуюся в геометрическом центре параллелепипеда, – примем в качестве его полюса, $i \in J_N$. Координаты $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$ полюса *n*-параллелепипеда P_i, $i \in J_N$, относительно неподвижной системы координат $Ox_1 x_2 ... x_n$ являются его параметрами размещения и определяют положение *n*-параллелепипеда в пространстве R^n. Тогда вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_N) \in R^{Nn}$ определяет размещение параллелепипедов P_1, P_2, …, P_N в пространстве R^n.

Для математического моделирования поворотов *n*-параллелепипедов P_i, $i \in J_N$, на угол $\pi/2$ относительно координатных плоскостей пространства R^n каждому *n*-параллелепипеду P_i поставим в соответствие вектор его линейных размеров $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, $i \in J_N$. Различные повороты каждого *n*-параллелепипеда P_i на угол $\pi/2$ опишем с помощью упорядочения линейных размеров P_i. Перестановка элементов вектора $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ вида

$$a_{it} = (a_{ik_{i1}}, a_{ik_{i2}}, ..., a_{ik_{in}}), \qquad (3)$$

где $v_i = (k_{i1}, k_{i2}, ..., k_{in})$ – перестановка элементов индексного множества J_n, $t \in J_M$, $M = n!$, соответствует всевозможным поворотам *n*-параллелепипеда P_i на угол $\pi/2$, $i \in J_N$. Перестановка вида (3) может быть получена из вектора $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, соответствующего начальной ориентации *n*-параллелепипеда P_i, как $a_{it} = a_i \cdot Q_t$, где Q_t – перестановочная матрица. При этом поворот *n*-параллелепипеда P_i, задаваемый преобразованием Q_t, влечет за собой изменение его центра тяжести следующим образом: $m_i = m_{0i} \cdot Q_t$, $t \in J_M$, $M = n!$.

Центр тяжести *n*-параллелепипеда P_i – точка $m_i = (m_1^i, m_2^i, ..., m_n^i)$ – с учетом всевозможных поворотов на угол $\pi/2$ и зеркальных отражений находится в одной из 2^n вершин *n*-параллелепипеда

$H_i \subseteq P_i$, у которого геометрический центр совпадает с геометрическим центром P_i, а одной из вершин является точка $m_{0i} = (m_1^{0i}, m_2^{0i}, ..., m_n^{0i}) \in P_i$, $i \in J_N$. Все вершины *n*-параллелепипеда $H_i \subseteq P_i$ могут быть получены по формуле

$$m_j^i = m_j^{0i} + 2\mu_j^i y_j^i,\ \mu_j^i = u_{ij} - m_j^{0i}, \quad (4)$$

где $y_j^i \in \{0,1\}$, $j \in J_n$, $i \in J_N$.

Таким образом, положение *n*-параллелепипеда P_i определяется его параметрами размещения $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$, ориентацией, задаваемой поворотом на угол $\pi / 2$ с помощью вектора $v_i = (k_{i1}, k_{i2}, ..., k_{in})$, и положением центра тяжести, который задается вектором булевых переменных $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{in})$, $i \in J_N$. Тогда соответствующий ориентированный параллелепипед обозначим как $P_i(u_i, v_i, y_i)$, $i \in J_N$.

Математические модели задач 1, 2 представим в следующем виде.

Модель задачи 1

В качестве характеристики отклонения центра тяжести размещенных параллелепипедов от заданной точки области D_0 – критерия F_2 – примем квадрат расстояния между центром тяжести размещенных параллелепипедов $X_c = (x_1^c, x_2^c, ..., x_n^c)$ и геометрическим центром C_d области размещения при фиксированной длине ребра b_{01}. Имеем

$$X_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i \cdot m_i(y_i)}{M},\ M = \sum_{i=1}^{N} M_i,$$

$$C_d = (c_1^d, c_2^d, ..., c_n^d),\ c_1^d = \frac{d}{2},\ c_j^d = \frac{b_{0j}}{2},\ j = 2,3,...,n,$$

$$F_2(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^c(y) - c_i^d)^2, \quad (5)$$

$$x_i^c(y) = \frac{1}{M} \sum_{j}^{N} M_j \cdot (m_i^{0j} + 2(U_{ji} - m_i^{0j}) \cdot y_i^j),$$

$$X^* = \underset{X \in W \subset R^{3Nn+1}}{\arg\min} (F_1(X), F_2(X)), \quad (6)$$

где $F_1(X) = d$, , $X = (u, v, y, d)$, $u = (u_1, u_2, ..., u_N)$, $d = b_{01}$ $v = (v_1, v_2, ..., v_N)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_N)$, W – область допустимых решений, которая описывается системой неравенств [4]:

$$\begin{cases} \Phi_{ij}(u_i, u_j, v_i, v_j) \ge 0,\ i, j \in J_N,\ i < j, \\ \Phi_{0j}(u_0, u_j, v_j) \ge 0,\ j \in J_N. \end{cases} \quad (7)$$

Для решения задачи (6) может быть использована схема последовательной оптимизации критериев. В этом случае необходимо решить последовательно две однокритериальные задачи:

$$X_1^* = \underset{X \in W \subset R^{3Nn+1}}{\arg\min} (F_1(X)), \quad (8)$$

$$X_2^* = \underset{X \in W \subset R^{3Nn+1}}{\arg\min} (F_2(X)), \quad (9)$$

Задача (8) заключается в упаковке параллелепипедов P_i в заданной области D_0 таким образом, чтобы длина d ребра b_{01}, характеризующая занятую область, была минимальной. Для решения данной задачи может быть использован метод, предложенный в [4].

Задача (9) состоит в нахождении такой последовательности значений булевых переменных $y = (y_j, ..., y_{Nn})$, характеризующей размещение центров тяжести всех прямоугольников, которая бы минимизировала критерий $F_2(X)$.

Модель задачи 2

В терминах модели задачи 1 запишем математическую модель задачи 2:

$$X^* = \underset{X \in W \subset R^{3Nn+1}}{\arg\min} (F_1(X), F_2(X)), \quad (10)$$

$$X_1^* = \underset{X \in W \subset R^{3Nn+1}}{\arg\min} (F_1(X)), \quad (11)$$

$$X_2^* = \underset{X \in W \subset R^{3Nn+1}}{\arg\min} (F_2(X)), \quad (12)$$

$$L \cdot X \le h \quad (13)$$

где $L = [L_{ij}]_{m \times (n \cdot N)}$, m – количество линейных ограничений, описывающих некоторую окрестность заданной точки области C_d, в пределах которой может находиться искомый центр тяжести размещенных параллелепипедов.

Для решения задачи (10) используем схему последовательного применения критериев. При этом решение скалярной задачи (11) выполним по схеме, предложенной в [4]. Для решения задачи (12) используем схему метода ветвей и границ, описанную ниже.

Метод ветвей и границ

Решение задачи (12) заключается в нахождении такой последовательности значений булевых переменных $y = (y_j, ..., y_k)$ длины $k = (n \cdot N)$, с учетом системы линейных ограничений (13), которая бы минимизировала критерий $F_2(X)$. Отметим, что множество всех значений булевых переменных $y = (y_j, ..., y_k)$ представляет собой множество B_k k – мерных булевых векторов – вершин k – мерного гиперкуба, исследованного, например в [11]. В [11] приведена схема метода ветвей и границ для решения задач оптимизации квадратичной функции на множестве B_k без дополнительных ограничений. Распространим указанный подход для решения задачи (12).

Опишем основные шаги предлагаемой модификации метода ветвей и границ для случая, когда $F_2(X)$ представляет собой квадратичную функцию.

Шаг 1. Используя известные методы [12,13], построим выпуклое (сильно выпуклое с параметром ρ) продолжение $\varphi(z)$ функции цели $F_2(X)$ на выпуклое множество $Z \supseteq \mathrm{conv}B_k$, где $\mathrm{conv}B_k$ – выпуклая оболочка множества B_k. В результате такого построения получим выпуклую или сильно выпуклую функцию $\varphi(z)$, которая в точках комбинаторного множества B_k принимает те же значения, что и исходная функция $F_2(X)$, т.е. $\varphi(z) = F_2(x)$ для $\forall z \in B_k$. Тогда $\varphi(z) = (Az, z) + Bz$, $A = [a_{ij}]_{k\times k}$, $a_{ij} \in R$, $b \in R^k$

Перейдем к эквивалентной задаче:

$$\varphi(z) \to \min, \qquad (14)$$
$$L \cdot z \le h \;\; z \in B_k$$

Шаг 2. Ветвление – выделение некоторого подмножества допустимых решений. Для этого зафиксируем $x_1 = 0$. Эффективность метода зависит во многом от выбора фиксируемой переменной, поэтому выбор такой переменной можно проводить, исходя из дополнительных соображений и особенностей задачи. Таким образом, преобразуем матрицы A и B, а также систему линейных неравенств:

$$\varphi_0^1(\tilde{z}) = (A_0^1\tilde{z}, \tilde{z}) + B_0^1\tilde{z}\;\;, A_0^1 = [a_{0ij}^1]_{k-1\times k-1},$$
$$B_0^1 = [b_i]_{k-1},\; L_0^1 \cdot \tilde{z} \le h_0^1,$$
$$\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, ..., \tilde{z}_{k-1}),\; \tilde{z}_i = z_{i+1},\; i = 1, ..., k-1.$$

Функция $\varphi_0^1(\tilde{z})$ также является квадратичной. Для оценки минимума полученной функции $\varphi_0^1(\tilde{x})$ на выделенном подмножестве воспользуемся нижними оценками минимума выпуклых и сильновыпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах, полученных в [14,15,16]:

$$\min\varphi(\tilde{z}) \ge \overline{e_1}(\tilde{z}) = = \varphi(\tilde{z}) - (\nabla\varphi(\tilde{z}), \tilde{z}) + \min_{y\in P}(\nabla\varphi(\tilde{z}), y); \qquad (15)$$

$$\min\varphi(\tilde{z}) \ge \overline{e_2}(\rho) = \varphi(y^*) + \rho \cdot \min_{y\in P}\left\|y - y^*\right\|^2; \qquad (16)$$

$$\min\varphi(\tilde{z}) \ge \overline{e_3}(\tilde{z}, \rho) = \varphi(\tilde{z}) - \frac{1}{4\rho}\left\|\nabla\varphi(\tilde{z})\right\|^2 + +\rho\min_{y\in P}\left\|y - \tilde{z} + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(\tilde{z})\right\|^2, \qquad (17)$$

где $y^* = \arg\min_{y\in B_k}\varphi(y)$, $P = \{\tilde{z} \mid \tilde{z} \in B_k \subset R^n, L_0^1\tilde{x} \le h_0^1\}$.

Таким образом, посчитав одно из значений (14) – (16) определим оценку минимума Λ_0^1 функции $\varphi_0^1(\tilde{z})$.

Шаг 3. Аналогично шагу 2 зафиксируем $x_1 = 1$ и посчитаем нижнюю оценку минимума Λ_1^1 функции $\varphi_1^1(\tilde{z})$.

Шаг 4. Сравним значения оценок в полученных на шагах 2 и 3 ветвлениях. Если значение $\Lambda_0^1 \le \Lambda_1^1$, то в качестве новой исходной вершины выберем вершину с фиксированным значением $z_1 = 0$. Иначе новая исходная вершина – вершина с фиксированным значением $z_1 = 1$.

Шаг 4. В зависимости от выбора новой исходной вершины фиксируем значение z_1 и значение z_2. Аналогично шагам 2 – 4 построим оценки минимума и произведем новые ветвления при фиксированном значении $z_2 = 0$ и $z_2 = 1$.

Шаг 5. Ветвления продолжаются до тех пор, пока значения всех переменных не будут зафиксированы.

Шаг 6. В качестве начального решения выбирается вектор всех зафиксированных значений переменных.

Шаг 7. Поиск решения продолжения продолжается в тех вершинах, где значение оценки меньше или равно полученному начальному решению. Для таких вершин строятся новые ветвления согласно описанному алгоритму. В результате выбирается наименьшее из всех найденных решений.

Кроме того, следует отметить, что значения оценок (15) – (17) можно улучшить [12], решив дополнительные оптимизационные задачи вида:

$$\overline{e_1}(\tilde{z}) \to \max,$$
$$\overline{e_2}(\rho) \to \max,\; \rho > \rho_0 \qquad (18)$$
$$\overline{e_3}(\tilde{z}, \rho) \to \max,\; \rho > \rho_0$$

Рассмотрим пример решение задачи 2. Пусть заданы 20 параллелепипедов:

Таблица 1

Исходные данные

№	Размеры		№	Размеры
2	[6, 1, 4]		12	[7, 7, 5]
3	[3, 4, 5]		13	[9, 1, 7]
4	[6, 4, 2]		14	[6, 3, 2]
5	[5, 2, 8]		15	[4, 6, 9]
6	[1, 2, 2]		16	[4, 3, 1]
7	[6, 4, 9]		17	[2, 8, 9]
8	[2, 9, 6]		18	[1, 1, 3]
9	[8, 9, 5]		19	[7, 8, 3]
10	[4, 7, 8]		20	[1, 2, 2]
11	[3, 3, 1]		21	[7, 1, 6]

Также задана область размещения (контейнер), в которую необходимо упаковать параллелепипеды (табл. 2).

Таблица 2

Область размещения

№	Размеры
1	[15, 15, 15]

Решение. На первом этапе разместим заданные параллелепипеды в область, используя метод, предложенный в [4]. В результате получим параметры размещения, приведенные в табл. 3. Зададим массы центры тяжести для каждого параллелепипеда:

Таблица 3

Результаты размещения параллелепипедов и значения центров тяжестей

№	Полюс	Размеры	Масса	Центр тяжести
12	[0, 0, 0]	[7, 7, 5]	36	[1.75, 1.75, 1.25]
19	[0, 0, 5]	[7, 8, 3]	75	[1.75, 2, 5.75]
18	[0, 0, 8]	[1, 1, 3]	77	[0.25, 0.25, 8.75]
15	[0, 8, 0]	[4, 6, 9]	22	[1, 9.5, 2.25]
21	[0, 1, 8]	[7, 1, 6]	24	[1.75, 1.25, 9.5]
8	[0, 2, 9]	[2, 9, 6]	20	[0.5, 4.25, 10.5]
4	[0, 11, 9]	[6, 4, 2]	4	[1.5, 12, 9.5]
9	[2, 2, 9]	[8, 9, 5]	17	[4, 4.25, 10.25]
20	[0, 11, 11]	[1, 2, 2]	55	[0.25, 11.5, 11.5]
7	[4, 8, 0]	[6, 4, 9]	51	[5.5, 9, 2.25]
3	[6, 11, 9]	[3, 4, 5]	47	[6.75, 12, 10.25]
2	[0, 0, 11]	[6, 1, 4]	63	[1.5, 0.25, 12]
5	[4, 12, 0]	[5, 2, 8]	29	[5.25, 12.5, 2]
14	[0, 11, 13]	[6, 3, 2]	49	[1.5, 11.75, 13.5]
16	[0, 2, 8]	[4, 3, 1]	4	[1, 2.75, 8.25]
13	[0, 14, 0]	[9, 1, 7]	7	[2.25, 14.25, 1.75]
11	[0, 5, 8]	[3, 3, 1]	78	[0.75, 5.75, 8.25]
6	[0, 13, 11]	[1, 2, 2]	42	[0.25, 13.5, 11.5]
10	[7, 0, 0]	[4, 7, 8]	15	[8, 1.75, 2]
17	[10, 7, 0]	[2, 8, 9]	86	[10.5, 9, 2.25]

Значение функции цели $F_1(X)$ = 12. Полюс каждого параллелепипеда и центр тяжести задан в системах координат контейнера, в который он размещен.

Пусть на координаты центров тяжести (4) наложены следующие $t = 2$ ограничения вида:

$$\sum_{j}^{N}\sum_{i}^{n}\alpha_{ti}^{j}m_i^j \le \beta_t \ ,$$

где N - количество параллелепипедов (20), n - размерность задачи (3). Коэффициенты α_t и β_t приведены в табл. 4.

Таблица 4

Ограничения на центры тяжести параллелепипедов

	α_{ti}^{j}	β_t
$t = 1$	-2, -9, 4, 4, 7, 0, 0. 3, -4, -4, 9, -8, 5, 5, -2, 1, 1, -6, -3, -3, 10, 3, 3, 6, -1, -1, -8, -5, 8, 8, -9, 4, 4, -3, 0, 0, -7, 6, 6, 9, 2, 2, 5, 2, -9, -9, -6, 7, 7, 0, 3, 3, -4, -1, -1, -8, 5, 5, 8, 1	-7
$t = 1$	6, 6, 3, -10, -10, 7, -6, -6, 1, -2, -2, 5, -8, -8, 9, -4, -7, -7, 0, 7, 7, 4, -9, -9, -2, -5, -5, 2, -1, -1, 6, -7, -10, -10, -3, 4, 4, 1, 8, 8, 5, -8, -8, -1, -4, -4, 3, -9, 7, 7, -6, -9, -9, -2, 6, 6, 2, 9, 9, -3	7

Тогда на втором этапе решения произведем оптимизацию по критерию $F_2(X)$ (распределение весов), используя описанный в настоящей работе метод ветвей и границ и оценку вида (14). Для сравнения результатов на данном этапе решим две задачи:

1. Распределение весов с решением задач (18).
2. Распределение весов без решения задач (18).

В табл. 5 приведены решение задачи 1.

Таблица 5

Результаты решения задачи распределения весов с улучшением оценок

№	Масса	Центр тяжести
12	36	[1.75, 1.75, 1.25]
19	75	[1.75, 2, 5.75]
18	77	[0.25, 0.25, 8.75]
15	22	[1, 9.5, 2.25]
21	24	[1.75, 1.25, 9.5]
8	20	[0.5, 8.75, 10.5]
4	4	[4.5, 14, 10.5]
9	17	[8, 8.75, 12.75]
20	55	[0.75, 12.5, 12.5]
7	51	[8.5, 11, 6.75]
3	47	[8.25, 14, 12.75]
2	63	[4.5, 0.75, 12]
5	29	[7.75, 13.5, 6]
14	49	[4.5, 11.75, 14.5]
16	4	[3, 2.75, 8.25]
13	7	[6.75, 14.75, 5.25]
11	78	[2.25, 5.75, 8.25]
6	42	[0.75, 14.5, 11.5]
10	15	[8, 1.75, 2]
17	86	[10.5, 9, 2.25]
Значение функции цели:	31.87	
Вектор булевых переменных:	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	

Решение задачи 2 оказалось хуже. Результаты решения приведены в табл. 6.

Таблица 6

Результаты решения задачи распределения весов без улучшения оценок

Значение функции цели:	37.25
Вектор булевых переменных:	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)

Графическое представление полученного решения представлено на рис. 1. На рисунке точками отмечены полученные центры тяжести каждого из параллелепипедов и области размещения.

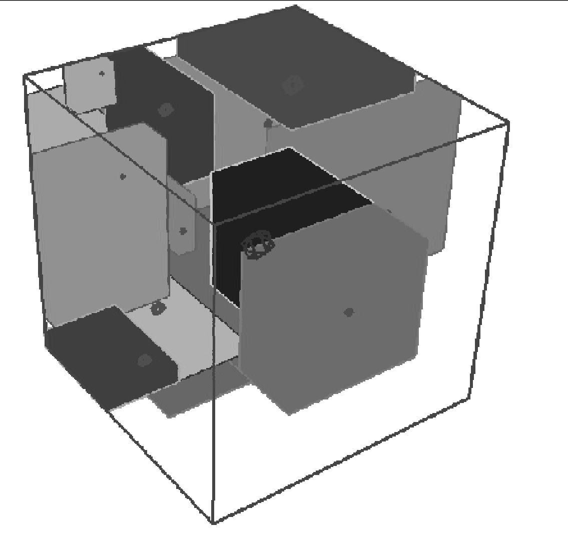

Рис. 1. Результаты решения задачи

Для иллюстрации построения дерева решений предлагаемым методом, рассмотрим пример 2. Пусть задана функция вида $\varphi(x) = (Ax, x) + Bx$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}343 & 0{,}199 & 0{,}071 & 0{,}571 & 0{,}069 & 0{,}227 \\ 0{,}199 & 1{,}797 & 0{,}173 & 0{,}226 & 0{,}056 & 0{,}218 \\ 0{,}071 & 0{,}173 & 1{,}199 & 0{,}192 & 0{,}406 & 0{,}471 \\ 0{,}571 & 0{,}226 & 0{,}192 & 1{,}392 & 0{,}187 & 0{,}544 \\ 0{,}069 & 0{,}056 & 0{,}406 & 0{,}187 & 1{,}908 & 0{,}83 \\ 0{,}227 & 0{,}218 & 0{,}471 & 0{,}544 & 0{,}83 & 1{,}957 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}736 \\ 0{,}962 \\ 1{,}066 \\ 1{,}559 \\ 1{,}95 \\ 3{,}323 \end{pmatrix}.$$

Пусть система линейных ограничений на булевы переменные *x* имеет вид:

$$\begin{cases} 5x_1 - 10x_2 - 6x_3 - 1x_4 + 3x_5 + 8x_6 \le -6 \\ x_1 + 6x_2 - 10x_3 - 5x_4 - x_5 + 8x_6 \ge 5 \end{cases}$$

В качестве оценки выберем выражение (14). Используя предложенный алгоритм, построим дерево решений (рис. 2).

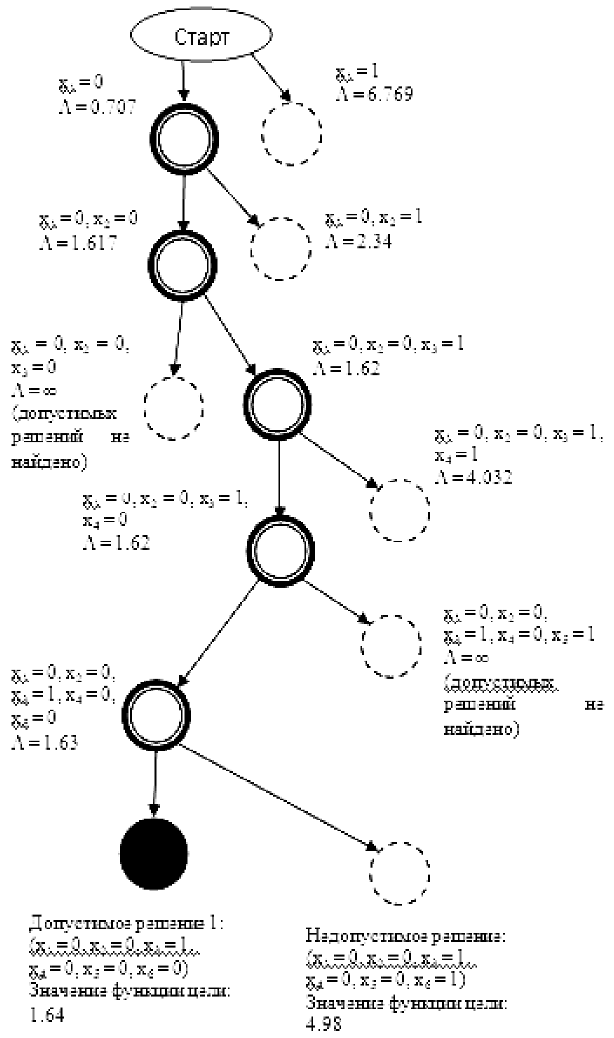

Рис. 2. Дерево решений

Таким образом, было получено решение, которое совпадает с решением, полученным путем полного перебора. Для получения эффективных оценок решались дополнительные задачи оптимизации вида (18).

Выводы

В работе описаны многокритериальные задачи размещения n-параллелепипедов, построены математические модели, рассмотрены их особенности. Предложен подход к решению поставленных задач на основе схемы последовательной оптимизации критериев. Для решения задачи минимизации отклонения центра тяжести размещенных параллелепипедов от заданной точки области размещения предложен метод на основе метода ветвей и границ. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что метод позволяет получить решение задачи с учетом или без учета линейных ограничений. Также эксперименты показали, что значения оценок на подмножестве могут быть значительно улучшены, путем решения дополнительных задач оптимизации. Однако решение таких задач может потребовать достаточно много времени, в особенности для задач большой размерности.

Список литературы

1. Dyckhoff H. Cutting and Packing in Production and Distribution / H. Dyckhoff, U. Finke. – Berlin: Physica. Verlag, 1992. – 205 p.

2. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев.. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.

3. Christensen S.G. Container loading with multi-drop constraints / S.G. Christensen, D.M. Rousøe // International Transactions on Operational research. – 2009. – № 16 (6). – P. 727-743.

4. Гребенник И.В. Упаковка n-мерных параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации в n-мерном параллелепипеде / И.В. Гребенник, А.В. Панкратов, А.М. Чугай, А.В. Баранов // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 5. – С. 122-131.

5. Гиль Н.И. Решение задач упаковки n-мерных параллелепипедов для оптимизации выполнения работ на машиностроительных предприятиях / Н.И. Гиль, М.С. Софронова // Проблемы машиностроения. – 2005. – Т. 8, N 4. – С. 55-66.

6. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 256 с.

7. Подиновский В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. – М.: Сов. радио, 1975. – 192 с.

8. Стоян Ю.Г. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей / Ю.Г. Стоян, В.З. Соколовский.– К.: Наук. думка, 1980. – 208 с.

9. Стоян Ю.Г. Об одном обобщении функции плотного размещения / Ю.Г. Стоян // Доклады АН УССР. – 1980. – N 8. – С. 70-74.

10. Стоян Ю.Г. Ф-функция n-мерных параллелепипедов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль, М.С. Муравьева // Доповіді НАН України. – 2005. – N 3. – С. 22-27.

11. Яковлев С.В. О некоторых классах задач оптимизации на множествах размещений и их свойствах / С.В. Яковлев, И.В. Гребенник // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 11. – С. 74-86.

12. Яковлев С.В. Теория выпуклых продолжений функции на вершинах выпуклых многогранников / С.В. Яковлев // ЖВМ и МФ. – 1994. – Т. 34, № 7. – С. 1112-1119.

13. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике// ДАН УССР, Сер А / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – 1988. – № 5. – С. 68-70.

14. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К.: ІСДО, 1993. – 188 с.

15. Гребенник И.В. Оценки минимума выпуклых функций на классах комбинаторных множеств перестановок / И.В. Гребенник, А.В. Баранов // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2009. – № 1. – С. 81-86.

16. Гребенник И.В. Оптимизация линейных функций с линейными ограничениями на комбинаторных множествах на основе случайного поиска / И.В. Гребенник, А.В. Баранов // Искусственный интеллект. 2007. – № 1. – С. 132-137.

Поступила в редколлегию 11.05.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Т.Е. Романова, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков,

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДІВ

І.В. Гребеннік, А.В. Баранов

Розглядається багатокритеріальна задача розміщення паралелепіпедів. У якості критеріїв використовуються: мінімізація заповненої частини області розміщення та забезпечення стійкості області – відхилення центра тяжіння системи від заданої точки області. Розглянуті методи вирішення задачі, проведені обчислювальні експерименти.

Ключові слова: *багатокритерійна оптимізація, метод гілок і меж, математичне моделювання, Ф-функція, упаковка.*

MATHEMATICAL MODELING AND SOLVING OF SOME MULTICRITERIA PARALLELEPIPED PACKING PROBLEMS

I.V. Grebennik, A.V. Baranov

The work is devoted to the multicriteria problem of parallelepiped packing. The next criteria are used: minimization of the occupied part of the staging area and the sustainability of the area - the deviation of the weight center of the system from the predetermined point in the area. The methods of solving of the problem are proposed. Computing experiments are performed.

Keywords: *multicriterion optimization, method of branches and scopes, mathematical design, Ф-function, packing.*