

УДК 681.5. 015: 378

О.М. Савінов

Національний авіаційний університет, Київ

**МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСУ НАВЧАННЯ**

У статті розглядається актуальне завдання автоматизації навчання – побудова адекватних моделей процесу навчання. Приводиться методика дослідження нелінійних логістичних моделей процесу навчання.

**Ключові слова:** процес навчання, моделювання, нелінійність, адекватність.

**Вступ**

Прагнення підвищити ефективність і якість навчання є основним мотивом проведення досліджень у галузі автоматизації навчання. При цьому під ефективністю найчастіше розуміється рівень матеріальних і часових витрат, які необхідні для навчання із заданою якістю [1].

Ключовим етапом досліджень у даному напрямку є вироблення адекватних математичних моделей процесу навчання. В [2] обґрунтована диференціальна нелінійна математична модель процесу навчання, що дозволяє описати його основні властивості і особливості. Хоча адекватність даної моделі підтверджується збіжністю результатів її використання з експериментальними даними, відкритим залишилося питання її аналізу, виявлення механізму виникнення багатой розмаїтості можливих ситуацій, що з'являються в процесі навчання. Тому **метою даної статті** є математичний аналіз можливостей моделей, запропонованих в [2].

**Основний матеріал**

У цій роботі обґрунтовується можливість опису процесу навчання у рамках однієї педагогічної "технології" нелінійною моделлю виду

$$\dot{x}(t) = ax - bx^2, \quad (1)$$

де  $x$  – це деякий об'єктивний показник ступеня підготовленості учнів, який можна визначити, наприклад, за результатами тестування. Параметр  $x$  змінюється у часі, діапазон його зміни включає крім позитивних значень (прогрес у підготовці), нульове значення (відсутність поліпшення підготовки), так і негативні значення (це відповідає регресу ступеня підготовленості, коли у результаті підготовки учні втрачають вже накопичені навички й знання). Таким чином, у загальному випадку значення  $x$  належить множині дійсних чисел  $R$ . Надалі будемо розглядати тільки скалярний варіант (одномірний варіант) показника ступеня підготовленості учнів  $x$ ;  $b$  – одномірний параметр, що характеризує властивість забування й насичення учнів у процесі навчання. Його збільшення відповідає більшому прояву даних якостей, зменшення – меншому прояву. Діапазон

зміни значення параметра  $b$  – це діапазон позитивних дійсних чисел  $R_+$ . Надалі будемо вважати, що на часовому відрізку дослідження моделі (1) параметр  $b$  не змінює свого значення, і тому, буде представлятися деякою константою  $b = \text{const}$ ;

$a(t) = a_u(t) - a_\xi(t)$  – параметр, що характеризує зміну ступеня підготовки учнів у результаті дії системи навчання  $a_u(t)$  і випадкових факторів, фізіологічних особливостей і інших випадкових і неконтрольованих факторів  $a_\xi(t)$ . Залежно від співвідношення  $a_u(t)$  і  $a_\xi(t)$  значення  $a(t)$  може перебувати як в області позитивних чисел (що буде відповідати прогресу в підготовці учнів), так і в області негативних чисел, що буде відповідати регресу в зміні ступеня підготовленості. Нульове значення  $a(t)$  відповідає нейтральному результату процесу навчання.

При всій зовнішній простоті моделі (1), її нелінійний характер дозволяє досить точно описати основні, найбільш важливі властивості функціонування системи автоматизованого навчання. Нелінійна залежність  $\dot{x}(t)$  від двох аргументів  $a(t)$  та  $x(t)$  дозволяє описати всю розмаїтість можливих варіантів процесу функціонування системи навчання.

Диференціальне рівняння (1) може бути інтерпретоване як деякий автономний потік у фазовому просторі  $R_x$ , який залежить від деякої множини параметрів. Стационарний режим потоку (1) визначається рішенням алгебраїчного рівняння

$$ax - bx^2 = 0, \quad (2)$$

яке відповідає умові  $\dot{x}(t) = 0$ . Рішення цього рівняння визначає нерухомі стационарні крапки потоку.

Найбільш ілюстративним інструментом відображення нелінійних особливостей диференціальних рівнянь із розмірністю не вище трьох є біфуркаційні діаграми, що представляють собою "портрет" якісних властивостей нелінійної системи.

Рівняння (2) має два стационарних рішення  $x_1 = 0$  і  $x_2 = a/b$ , а біфуркаційна діаграма має такий вигляд (рис. 1).

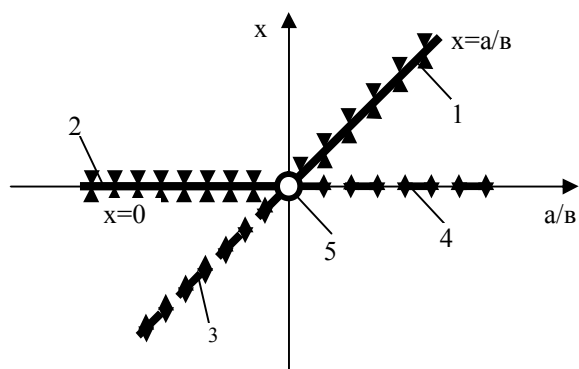


Рис. 1. Біфуркаційна діаграма рівняння (1)

Гілки 2 і 4 біфуркаційної діаграми відповідають стаціонарному потоку  $x_1 = 0$ , гілки 1 і 3 – стаціонарному потоку  $x_2 = a/b$ . Для дослідження стійкості даних режимів функціонування системи навчання існує два можливих підходи. По-перше, стійкість можна визначити, задавши у області даного режиму обурений рух  $x(t) = x_0 + \Delta x$  у рівняння (1). Виділення з цього рівняння складової  $\Delta \dot{x}(t) = f(\Delta x, a, x)$  і її аналіз дозволяє визначити рівень стійкості в даному випадку.

Інший спосіб, доцільний в даному випадку, – це вирішення рівняння (1) з врахуванням умов режиму, що розглядається. Для режиму, що відповідає гілці 1 діаграми ( $x > 0, a/b > 0$ ) у результаті інтегрування (1) маємо:

$$\frac{b}{a} \ln \frac{x}{a/b - x} = bt + C. \quad (3)$$

Введення позначень  $A = e^{(a/b)C}$ , де  $C$  – постійна інтегрування, дозволяє отримати залежність:

$$x/(a/b - x) = Ae^{at}. \quad (4)$$

Введення у чисельник і знаменник (4) експоненти  $e^{at}$  дозволяє отримати рішення у вигляді логістичної кривої:

$$x(t) = \frac{a}{(1 + e^{-(a/b)C} e^{-at})b}. \quad (5)$$

Врахування початкової умови  $x(0) = x_0$  в (5) дозволяє визначити залежність  $C(x_0)$ :

$$C = \frac{b}{a} \ln \frac{x_0 \cdot b}{a - x_0 \cdot b}, \quad (6)$$

і з врахуванням цього представити рішення  $x(t)$  як

$$x(t) = \frac{a}{(1 - (bx_0/a - bx_0) \cdot e^{-at})b}. \quad (7)$$

Аналіз цього виразу показує, що в області  $x > 0, a/b > 0$ , яка відповідає гілці 1 діаграми (рис. 1) спостерігається стійкий рух, причому при  $t \rightarrow \infty$  показник підготовленості  $x(t) \rightarrow a/b$ . Це асимптота функції (7).

Графік залежності (7) для випадку коли початкове значення  $x_0 < a/b$  (природно, для умов  $x > 0, a/b > 0$ ) представлений на рис. 2, і для випадку  $x_0 > a/b$ , відповідно, на рис. 3.

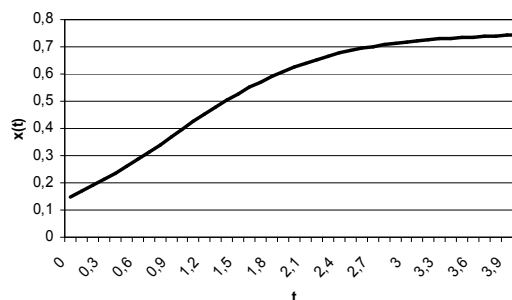


Рис. 2. Графік залежності (7) при  $a = 1,5$ ;  $b = 2$ ;  $x_0 = 1$

Варто відзначити, що в цьому випадку рівняння залежності (5) необхідно розглядати у вигляді:

$$x(t) = \frac{a}{(1 - e^{-(a/b)C} e^{-at})b}, \quad (8)$$

а рівняння  $x(t)$  для  $x_0 < a/b$  можна записати як

$$x(t) = \frac{a^2 - abx_0}{ab - b^2x_0 - b^2x_0e^{-at}}. \quad (9)$$

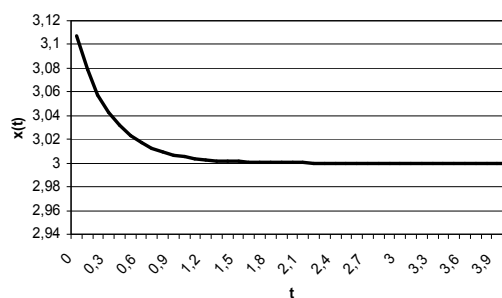


Рис. 3. Графік залежності (7) при  $a = 3$ ;  $b = 1$ ;  $x_0 = 0,1$

Графік залежності  $x(t)$  (рис. 2) характеризує бажаний процес вчення, коли зусилля, витрачені на навчання, приводять, врешті-решт, до збільшення показника підготовленості до граничного (але недосяжного) значення  $a/b$ . Графік (рис. 3) відповідає процесу, коли початковий рівень підготовленості учнів виявляється вищим, ніж рівень підготовленості, який здатна забезпечити дана система навчання. Тому цей графік ілюструє процес деградації рівня учнів до рівня, який забезпечує система навчання у даному випадку:  $a/b < x_0$ .

Практично важливою особливістю залежностей (7) і (9) є жорсткий зв'язок часу мінімального необхідного для досягнення бажаного рівня підготовки і значення самого рівня. Для того, щоб забезпечити мінімум часу досягнення заданого рівня підготовки  $x(t) = x_{max}$ , необхідно збільшувати значення  $a_u(t)$ . Це наочно видно із залежності  $t(x, a)$ , яка слідує із (7) і (9):

$$t = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{b^2 x_0 x}{ab(x+x_0) - a^2 - b^2 x_0 x} \right), \quad (10)$$

$$t = \frac{1}{(a_u - a_\xi)} \times \ln \left( \frac{b^2 x_0 x}{(a_u - a_\xi)b(x+x_0) - (a_u - a_\xi)^2 - b^2 x_0 x} \right). \quad (11)$$

Але збільшення  $a_u(t)$  приводить до збільшення значення  $a/b$ , яке є асимптотою для  $x(t)$ . Це характеризує важливу практичною властивість систем вчення: для кардинального зменшення часу навчання (ресурсів) необхідно змінювати саму «технологію» навчання, яка характеризується в даній моделі граничним значенням  $a/b$ .

Для випадку, коли  $a < 0$ , залежність  $x(t)$  можна отримати аналогічно (3) – (7). У випадку, коли  $a = 0$ , спостерігається нестійкий процес зміни  $x(t)$  (за умови, що  $x(t) \neq 0$ ). Це можна показати після інтегрування рівняння (1), враховуючи умову  $A = e^{(a/b)C}$ :

$$1/(x \cdot b) = t + C. \quad (12)$$

В результаті можна отримати залежність

$$x(t) = 1/((t+C) \cdot b). \quad (13)$$

Ця залежність відображує процес, що розходиться, нестійкий  $x(t)$  в умовах, коли система навчання не функціонує ( $a = 0$ ). Графік гіперболічної залежності для цього випадку представлений на рис. 4.

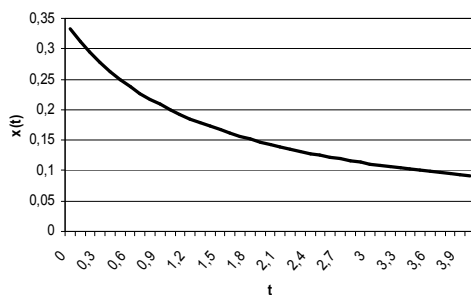


Рис. 4. Графік залежності (13) при  $b = 3$ ;  $C = 1$

Найцікавіший випадок функціонування системи навчання, представлений моделлю (1), відповідає точці біфуркації, яка на біфуркаційній діаграмі (рис. 1) представлена поміткою 5. У разі, коли  $a = 0$  і  $x = 0$  спостерігається нестійкий режим функціонування, у якому будь-яка, щонайменша флуктуаційна дія приведе або до стійкої, або до нестійкої поведінки

#### МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССА УЧЕБЫ

А.Н. Савинов

*В статье рассматривается актуальное задание автоматизации учебы – построение адекватных моделей процесса учебы. Приводится методика исследования нелинейных логистических моделей процесса учебы.*

**Ключевые слова:** процесс учебы, моделирование, нелинейность, адекватность.

#### METHOD OF RESEARCH OF NONLINEAR MODELS OF PROCESS OF STUDIES

O.M. Savinov

*Actual'noe is examined in the article a task automation of studies is a construction of adequate models of process of studies. A method over of research of nonlinear logistic models of process of studies is brought.*

**Keywords:** process of studies, design, non-linearity, adequacy.

системи. У точці біфуркації система обмінюється даними режимами, при цьому апріорі неможливо сказати, в якому режимі система залишиться після виходу з режиму біфуркації.

#### Висновок

В результаті проведеного дослідження можна відзначити існування у моделей (1) таких характерних властивостей складних нелінійних неконсервативних (дисипативних) динамічних систем [3]:

- можливості виділення серед фазових координат, що описують стан системи, невеликого числа «параметрів порядку» – координат, які визначають основні особливості динаміки системи, та дія на які дозволяє здійснити погоджену зміну всіх інших фазових станів;

- самовільного прагнення траєкторій фазового стану системи в результаті її самоорганізації до визначених інваріантних різноманіть у просторі станів (атракторів), розмірність яких виявляється набагато менше розмірності вихідної системи;

- наявність кордонів, що розділяють області тяжіння атракторів у фазовому просторі, які дозволяють, прикладаючи до системи досить малі дії, якісно змінити її поведінку вдалі від положення рівноваги;

- можливості штучного формування бажаних інваріантних різноманіть в керованих нелінійних неконсервативних (дисипативних) системах, що забезпечують необхідні властивості управління введенням місцевих позитивних і негативних зворотних зв'язків засобами автоматики.

#### Список літератури

1. Савинов О.М. Методичний підхід до систематизації результатів досліджень в області вдосконалення засобів навчання / О.М. Савинов // Зб. наук. пр. військ. інст. КНУ ім. Т. Шевченка. – К.: ВІКНУ, 2009. – Вип. № 24. – С. 138-143.
2. Савинов О.М. Моделі оперативного прогнозування якості навчання фахівців технічного профілю / О.М. Савинов, Бобрович // Зб. наук. праць ЦВСД НУОУ. – К.: НУОУ, 2009. – Вип. 1(39). – С. 75-79.
3. Колесников А.А. Современная прикладная теория управления, часть II. Синергетический подход в теории управления / А.А. Колесников. – М.: ФЦ «Интеграция», 2000. – 559 с.

Надійшла до редколегії 9.06.2010

**Рецензент:** канд. техн. наук, проф. Ю.І. Миргород, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.