УДК 519.832.3+519.6

В.В. Романюк

Хмельницький національний університет, Хмельницький

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШУКІВ ОБ'ЄКТА В УМОВАХ ЧАСТКОВОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЩОДО ІМОВІРНОСТЕЙ ЙОГО ПОЗИЦІЮВАННЯ У ТРЬОХ ЗОНАХ ПОШУКОВИХ СМУГ

Складено антагоністичну модель оптимальних пошуків об'єкта, котрий рухається через смуги прямокутної області. Доведено твердження в усуненні часткової невизначеності щодо оцінених імовірностей позиціювання об'єкта у трьох зонах кожної смуги.

Ключові слова: *моделювання пошуків, антагоністична гра, імовірність позиціювання, часткова невизначеність.*

Вступ

Опис проблеми. Однією із проблем математичного моделювання є усунення невизначеностей, котрі безперервно виникають при оцінюванні параметрів процесів, що моделюються [1, 2]. Якщо невизначеність деякого параметра представляє собою певний інтервал (або сегмент) усіх можливих значень цього параметра, то за умови існування відомої імовірнісної міри на інтервалі (щодо цих значень досліджуваного параметра) невизначеність може вважатись усуненою (в імовірнісному сенсі). Тоді у модель підставляється математичне сподівання досліджуваного параметра або значення, близькі до нього, або ж окіл значень параметра з математичним сподіванням як внутрішньою точкою. У широкому смислі, говорячи більш загально, у модель підставляється випадкова величина з відповідною імовірнісною мірою (імовірнісним розподілом).

В організації пошукових процесів об'єктів фізичної природи визначну роль відіграє оцінювання імовірностей перебування у тій чи іншій зоні пошуків, котре допомагає у подальшому вірно визначити (сформувати) напрям пошуку [3]. Проте точкова оцінка таких імовірностей практично не може вважатись коректною [4]. Тому у моделях пошукових процесів попередньо визначені імовірності перебування об'єкта пошуків у різних зонах області пошуків представляються у вигляді сегментів імовірностей ненульової міри на числовій прямій. Однак ніяких імовірнісних мір на цих сегментах не задається, тобто проблема усунення невизначеностей залишається відкритою.

Принцип оптимального здійснення пошукових заходів опирається на коректно оцінені імовірності позиціювання об'єкта пошуків, але їх доцільно вважати такими, що є відомими об'єктові. Тому при формулюванні такого принципу організатор пошукового процесу має враховувати усі можливі зміни позиціювання об'єкта, включаючи його найбільш вдалі дії.

Аналіз досліджень. Питання моделювання або прийняття рішень в умовах невизначеності розглядаються в [1, 2, 5]. За відсутності даних про які-небудь імовірнісні міри на інтервалі T можливих значень досліджуваного параметра головна ідея усунення такої невизначеності полягає у використанні розв'язку відповідної континуальної антагоністичної гри [6], ядро якої визначається на квадраті $\mathrm{T} \times \mathrm{T}$. Щоправда, слід зауважити, інтервал T є тільки оцінкою ненульової лебегівської міри значення досліджуваного параметра, оскільки завжди ці значення теоретично знаходяться у межах більшого інтервалу T_0, тобто $\sup \mathrm{T}_0 > \sup \mathrm{T}$ й $\inf \mathrm{T}_0 < \inf \mathrm{T}$. Крім того, повинен існувати дуально зв'язаний з цим параметром невизначений параметр, і сума їх значень повинна бути фіксованою.

Перш за все, слід чітко відокремлювати проблеми комп'ютерного пошуку від проблем побудови моделей пошукових процесів фізичних об'єктів. Комп'ютерний пошук стосується лише процесів пошуку й обробки інформації, контроль яких може здійснювати один користувач. Коли ж мова йде про пошук фізичного й активного об'єкта, то необхідно враховувати його здатність до свідомого переховування і маскування або, якщо шукають зниклу чи заблукалу дитину, до найбільш несприятливих вчинків [4, 7]. Проблемою ж у моделюванні пошукових заходів щодо активного об'єкта є формулювання принципу оптимального ведення пошукового процесу з урахуванням потенційних переховування і маскування.

У найпростішому випадку область ведення пошуків вважається прямокутною, розбивається на однакові горизонтальні смуги (лінії або рубежі), кожна з яких додатково розбивається на однакові зони. Передбачається, що активний об'єкт рухається через горизонтальні смуги області, тобто має намір увійти в область через першу смугу і вийти з області через останню смугу, послідовно пересікши кожну зі смуг області. Для тривіального випадку розбиття смуги на дві зони використовується згаданий принцип усунення часткової невизначеності, коли у першій зоні задається сегмент $T \subset [0;1] = T_0$ імовірностей позиціювання об'єкта, а у другій зоні ці імовірності визначаються автоматично, оскільки об'єкт на даній смузі перебуває в одній з двох її зон. Така задача є відомою і розв'язується у [6], де знаходиться внутрішня точка t_* сегмента $T \subset [0;1] = T_0$ як оптимальне значення для його подальшого використання. Тоді, якщо у першій зоні імовірність позиціювання об'єкта дорівнює t_*, то у другій зоні ця імовірність дорівнює $1 - t_*$. Як наслідок, у задачі моделювання пошуків у першу зону слід направляти $1 - t_*$ пошукового ресурсу, а у другу – направляти t_* пошукового ресурсу. Але при цьому на поточній смузі розподіл пошукового ресурсу повинен коригуватися з урахуванням такого розподілу на попередній смузі [3]. У нетривіальному випадку розбиття смуги на зони, зокрема, у найпростішому варіанті, коли кожна смуга розбиватиметься на три зони, для усунення невизначеностей має будуватись подібна до описаної континуальної антагоністичної гри на квадраті $T \times T$ гра, ядро якої задаватиметься на паралелепіпеді простору $\mathbb{R}^4$ [8, 9]. Така задача є дещо новою, а її розв'язування у перетині зі задачею оптимального розподілу пошукових сил (ресурсів) дозволить закласти теоретичні основи для вирішення проблеми моделювання пошукових процесів в умовах часткової невизначеності.

Мета статті. Будемо рахувати, що прямокутна область пошуків поділена на S смуг, де $S \in \mathbb{N}$, кожна з яких розбита на три ідентичні зони. Хоча й на будь-якому ландшафті місцевості зробити це практично неможливо, така ідеалізація допустима, оскільки не може погіршити суттєвим чином точність моделі пошуків. У кожній виділеній смузі імовірності позиціювання об'єкта у її зонах точно невідомі, але відомі їх оцінки у формі сегментів можливих імовірностей. Необхідно скласти модель оптимального розподілу пошукових ресурсів для організації пошукових заходів щодо активного об'єкта з урахуванням часткової невизначеності в імовірностях позиціювання об'єкта. Для цього слід розв'язати відповідну континуальну антагоністичну гру як модель усунення часткової невизначеності з трьома пунктами (у трьох зонах), а також врахувати найнесприятливіші обставини при проведенні пошуків.

Основний розділ

Усунення невизначеностей

Нехай в s-й смузі області пошуків відомі три оцінки імовірностей позиціювання об'єкта по зонах цієї смуги, $s = \overline{1, S}$. Для складання і розв'язування моделі усунення часткової невизначеності у трьох зонах достатньо знати тільки дві з трьох оцінок (тобто на одну менше), адже об'єкт обов'язково позиціонується в одній з цих трьох зон. Без втрати загальності можна приймати, що даються оцінки імовірностей позиціювання у перших двох зонах. Отже, нехай в s-й смузі області пошуків оцінкою імовірності позиціювання у першій зоні є відрізок $\left[p_1^{\langle s\rangle}; p_2^{\langle s\rangle}\right]$, а оцінкою імовірності позиціювання у другій зоні буде відрізок $\left[q_1^{\langle s\rangle}; q_2^{\langle s\rangle}\right]$. На кожну із множин $\left\{\left[p_1^{\langle s\rangle}; p_2^{\langle s\rangle}\right]\right\}_{s=1}^{S}$ і $\left\{\left[q_1^{\langle s\rangle}; q_2^{\langle s\rangle}\right]\right\}_{s=1}^{S}$ накладемо умови

$$p_1^{\langle s\rangle} > 0,\ q_1^{\langle s\rangle} > 0; \tag{1}$$

$$p_2^{\langle s\rangle} < 1,\ q_2^{\langle s\rangle} < 1; \tag{2}$$

$$p_2^{\langle s\rangle} + q_2^{\langle s\rangle} < 1 \tag{3}$$

при $s = \overline{1, S}$. Окрім (1) – (3), кожен елемент множин $\left\{\left[p_1^{\langle s\rangle}; p_2^{\langle s\rangle}\right]\right\}_{s=1}^{S}$ та $\left\{\left[q_1^{\langle s\rangle}; q_2^{\langle s\rangle}\right]\right\}_{s=1}^{S}$ повинен мати ненульову міру, тобто

$$p_1^{\langle s\rangle} < p_2^{\langle s\rangle},\ q_1^{\langle s\rangle} < q_2^{\langle s\rangle} \quad \forall\ s = \overline{1, S}. \tag{4}$$

Умова (1) означає те, що в області пошуків немає тих зон, де об'єкт не міг би перебувати. Умова (2) означає те, що в області пошуків немає тих зон, де однозначно можна б було локалізувати об'єкт. Третя умова (3) говорить про те, що будь-яка імовірність з оцінки імовірності позиціювання у третій зоні не є нульовою; вона не може бути й одиничною, що безпосередньо випливає з умов (1) — (3).

Нехай $y(s)$ є припущенням про імовірність позиціювання об'єкта у першій зоні s-ї смуги, а $x(s)$ є реальною (і невідомою) імовірністю позиціювання у цій зоні; також нехай $z(s)$ є припущенням про імовірність позиціювання об'єкта у другій зоні s-ї смуги, а $u(s)$ є реальною імовірністю позиціювання у цій зоні. Відношення $\dfrac{x(s)}{y(s)}$ є дисбалансом точкової оцінки (або припущення) імовірності позиціювання у першій зоні, а відношення $\dfrac{u(s)}{z(s)}$ є дисбалансом точкової оцінки імовірності позиціювання у другій зоні. У третій зоні цей дисбаланс дорівнює

$$\frac{1-\left[x(s)+u(s)\right]}{1-\left[y(s)+z(s)\right]}.$$

Організатор, моделюючи оптимальний розподіл пошукового ресурсу, має мінімізовувати максимальний дисбаланс. Тоді моделлю усунення часткової невизначеності у трьох зонах s -ї смуги є континуальна антагоністична гра з ядром

$$K\left[x(s),\, u(s);\, y(s),\, z(s)\right] = \\ = \max\left\{\frac{x(s)}{y(s)},\, \frac{u(s)}{z(s)},\, \frac{1-\left[x(s)+u(s)\right]}{1-\left[y(s)+z(s)\right]}\right\} \quad (5)$$

на паралелепіпеді

$$X(s)\times U(s)\times Y(s)\times Z(s) = \\ = \left[p_1^{\langle s\rangle};\, p_2^{\langle s\rangle}\right]\times\left[q_1^{\langle s\rangle};\, q_2^{\langle s\rangle}\right]\times \\ \times\left[p_1^{\langle s\rangle};\, p_2^{\langle s\rangle}\right]\times\left[q_1^{\langle s\rangle};\, q_2^{\langle s\rangle}\right] \quad (6)$$

при $x(s)\in X(s)$, $u(s)\in U(s)$, $y(s)\in Y(s)$, $z(s)\in Z(s)$. У грі з ядром (5) на паралелепіпеді (6) організатор, виступаючи на боці другого гравця, буде мінімізовувати максимальний дисбаланс в оцінюванні імовірностей позиціювання об'єкта. Легко пересвідчитись, що гра з ядром (5) на паралелепіпеді (6) є опуклою, і навіть строго опуклою. Справді,

$$\frac{\partial}{\partial y(s)}K\left[x(s),\, u(s);\, y(s),\, z(s)\right] = \\ = \max\left\{-\frac{x(s)}{\left[y(s)\right]^2},\, 0,\, \frac{1-\left[x(s)+u(s)\right]}{\left(1-\left[y(s)+z(s)\right]\right)^2}\right\} = \\ = \max\left\{-\frac{x(s)}{\left[y(s)\right]^2},\, \frac{1-\left[x(s)+u(s)\right]}{\left(1-\left[y(s)+z(s)\right]\right)^2}\right\};$$

$$\frac{\partial}{\partial z(s)}K\left[x(s),\, u(s);\, y(s),\, z(s)\right] = \\ = \max\left\{0,\, -\frac{u(s)}{\left[z(s)\right]^2},\, \frac{1-\left[x(s)+u(s)\right]}{\left(1-\left[y(s)+z(s)\right]\right)^2}\right\} = \\ = \max\left\{-\frac{u(s)}{\left[z(s)\right]^2},\, \frac{1-\left[x(s)+u(s)\right]}{\left(1-\left[y(s)+z(s)\right]\right)^2}\right\};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\left[y(s)\right]^2}K\left[x(s),\, u(s);\, y(s),\, z(s)\right] = \\ = \max\left\{\frac{2x(s)}{\left[y(s)\right]^3},\, \frac{2\left(1-\left[x(s)+u(s)\right]\right)}{\left(1-\left[y(s)+z(s)\right]\right)^3}\right\}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\left[z(s)\right]^2}K\left[x(s),\, u(s);\, y(s),\, z(s)\right] = \\ = \max\left\{\frac{2u(s)}{\left[z(s)\right]^3},\, \frac{2\left(1-\left[x(s)+u(s)\right]\right)}{\left(1-\left[y(s)+z(s)\right]\right)^3}\right\}. \quad (8)$$

З (7) і (8) випливають такі умови строгої опуклості:

$$\frac{\partial^2}{\partial\left[y(s)\right]^2}K\left[x(s),\, u(s);\, y(s),\, z(s)\right] > 0$$

$$\forall\; x(s)\in X(s) \;\text{ та }\; \forall\; u(s)\in U(s)$$

при $$y(s)\in Y(s),\; z(s)\in Z(s) \quad (9)$$

та

$$\frac{\partial^2}{\partial\left[z(s)\right]^2}K\left[x(s),\, u(s);\, y(s),\, z(s)\right] > 0$$

$$\forall\; x(s)\in X(s) \;\text{ та }\; \forall\; u(s)\in U(s)$$

при $$y(s)\in Y(s),\; z(s)\in Z(s) \quad (10)$$

з ядром (5) на паралелепіпеді (6). Отже, у цій грі другий гравець (організатор) має єдину оптимальну стратегію, яка, до того ж, є чистою [6, 10]. Для її знаходження можна використати мінімаксний принцип, викладений у [6, 7, 10].

Максимумом ядра (5) на прямокутнику $X(s)\times U(s)$ як функції від змінних $x(s)$ та $u(s)$ є

$$\max_{\substack{x(s)\in X(s)\\ u(s)\in U(s)}} K\left[x(s),\, u(s);\, y(s),\, z(s)\right] = \\ = \max\left\{\max_{x(s)\in X(s)}\frac{x(s)}{y(s)},\, \max_{u(s)\in U(s)}\frac{u(s)}{z(s)},\, \max_{\substack{x(s)\in X(s)\\ u(s)\in U(s)}}\frac{1-\left[x(s)+u(s)\right]}{1-\left[y(s)+z(s)\right]}\right\} = \quad (11)$$

$$= \max\left\{\max_{x(s)\in X(s)}\frac{x(s)}{y(s)},\, \max_{u(s)\in U(s)}\frac{u(s)}{z(s)},\, \max_{\substack{x(s)\in X(s)\\ u(s)\in U(s)}}\frac{1-\left[x(s)+u(s)\right]}{1-\left[y(s)+z(s)\right]}\right\} = \max\left\{\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y(s)},\, \frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z(s)},\, \frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y(s)+z(s)\right]}\right\}.$$

Мінімум функції (11) змінних $y(s)$ та $z(s)$, складеної із частин гіперболічних поверхонь, на прямокутнику $Y(s)\times Z(s)$ досягається тоді, коли три внутрішні вирази під знаком максимуму в (11) є рівними.

Тому

$$\min_{\substack{y(s)\in Y(s)\\ z(s)\in Z(s)}}\max_{\substack{x(s)\in X(s)\\ u(s)\in U(s)}} K\left[x(s),\,u(s);\,y(s),\,z(s)\right]=\min_{\substack{y(s)\in Y(s)\\ z(s)\in Z(s)}}\max\left\{\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y(s)},\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z(s)},\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y(s)+z(s)\right]}\right\}=$$

$$=\max\left\{\min_{y(s)\in Y(s)}\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y(s)},\ \min_{z(s)\in Z(s)}\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z(s)},\ \min_{\substack{y(s)\in Y(s)\\ z(s)\in Z(s)}}\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y(s)+z(s)\right]}\right\}=$$

$$=\max\left\{\min_{y(s)\in Y(s)}\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y(s)},\ \min_{z(s)\in Z(s)}\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z(s)},\ \min_{\substack{y(s)\in Y(s)\\ z(s)\in Z(s)}}\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y(s)+z(s)\right]}\right\}= \qquad (12)$$

$$=\max\left\{\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y_*(s)},\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z_*(s)},\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]}\right\}=\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y_*(s)}=\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z_*(s)}=\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]},$$

де $y_*(s)$ та $z_*(s)$ є коренями рівнянь

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y_*(s)}=\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z_*(s)} \qquad (13)$$

і

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y_*(s)}=\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]} \qquad (14)$$

відповідно. Розв'язуємо рівняння (13) і (14) сумісно:

$$z_*(s)=y_*(s)\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{p_2^{\langle s\rangle}};$$

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y_*(s)}=\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y_*(s)+y_*(s)\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{p_2^{\langle s\rangle}}\right]};$$

$$p_2^{\langle s\rangle}-y_*(s)p_2^{\langle s\rangle}\left(1+\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{p_2^{\langle s\rangle}}\right)=y_*(s)-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)y_*(s);$$

$$\left(1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}\right)y_*(s)=p_2^{\langle s\rangle},$$

звідки
$$y_*(s)=\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}; \qquad (15)$$

$$z_*(s)=\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}, \qquad (16)$$

а оптимальним значенням припущеної імовірності позиціювання об'єкта у третій зоні s-ї смуги є

$$w_*(s)=1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]=$$
$$=\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}. \qquad (17)$$

Зауваження 1. Компоненти оптимальної стратегії організатора (15) і (16) мають місце лише тоді, коли

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}\in\left[p_1^{\langle s\rangle};\,p_2^{\langle s\rangle}\right] \qquad (18)$$

і

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}\in\left[q_1^{\langle s\rangle};\,q_2^{\langle s\rangle}\right] \qquad (19)$$

відповідно.

Якщо навіть (18) і (19) виконувались би за будь-яких $p_1^{\langle s\rangle}$, $p_2^{\langle s\rangle}$, $q_1^{\langle s\rangle}$ та $q_2^{\langle s\rangle}$, то однаково зроблене зауваження формально є коректним і аж ніяк не порушує загальність.

Але легко підібрати такі значення $p_1^{\langle s\rangle}$, $p_2^{\langle s\rangle}$, $q_1^{\langle s\rangle}$ та $q_2^{\langle s\rangle}$, за яких одна з умов (18) і (19) не виконається. Далі, очевидно, необхідно окреслити множину випадків, коли (18) і (19) є справедливими.

Теорема 1. В антагоністичній грі з ядром (5) на паралелепіпеді (6) першою компонентою оптимальної стратегії

$$\mathbf{Q}_*(s)=\left[y_*(s)\quad z_*(s)\right] \qquad (20)$$

другого гравця може бути (15) тільки тоді, коли виконана нерівність

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}}{q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}}\geq\frac{p_1^{\langle s\rangle}}{1-p_1^{\langle s\rangle}}, \qquad (21)$$

а другою компонентою оптимальної стратегії (20) може бути (16) тільки тоді, коли виконана нерівність

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}}{p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}}\geq\frac{q_1^{\langle s\rangle}}{1-q_1^{\langle s\rangle}}, \qquad (22)$$

Доведення. Для того, щоб точка (15) могла бути першою компонентою в оптимальній стратегії (20) другого гравця, необхідно і достатньо, щоб виконувалось (18), тобто одночасно були виконані нерівності

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \geq p_1^{\langle s\rangle} \tag{23}$$

і

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \leq p_2^{\langle s\rangle} \tag{24}$$

Із (23) послідовно маємо нерівності

$$p_2^{\langle s\rangle} \geq p_1^{\langle s\rangle}+p_1^{\langle s\rangle}p_2^{\langle s\rangle}+p_1^{\langle s\rangle}q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}\right)-p_1^{\langle s\rangle}q_1^{\langle s\rangle};$$

$$p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle} \geq p_1^{\langle s\rangle}\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right)+p_1^{\langle s\rangle}\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right);$$

$$\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right)\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right) \geq p_1^{\langle s\rangle}\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right),$$

звідки отримуємо (21). Із (24) маємо

$$1 \leq 1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right), \tag{25}$$

звідки отримуємо

$$p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right) \geq 0. \tag{26}$$

Але за умовою (4) нерівність (26) виконується завжди. Це означає, що справедливості умови (21) достатньо для того, щоб були виконані (23) і (24) або, інакше кажучи, (18).

Для того, щоб точка (16) могла бути другою компонентою в оптимальній стратегії (20), необхідно і достатньо, щоб виконувалось (19), тобто одночасно були виконані нерівності

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \geq q_1^{\langle s\rangle} \tag{27}$$

і

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \leq q_2^{\langle s\rangle}. \tag{28}$$

Із (27) послідовно маємо нерівності

$$q_2^{\langle s\rangle} \geq q_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}p_2^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}p_1^{\langle s\rangle}-\left(q_1^{\langle s\rangle}\right)^2;$$

$$q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle} \geq q_1^{\langle s\rangle}\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right)+q_1^{\langle s\rangle}\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right);$$

$$\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right)\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right) \geq q_1^{\langle s\rangle}\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right),$$

звідки отримуємо (22). Із (28) маємо (25) і (26), котрі виконуються завжди, звідки випливає, що справедливості умови (22) достатньо для того, щоб були виконані (27) і (28) або, інакше кажучи, (19).

Теорему доведено.

Наслідок 1. В антагоністичній грі з ядром (5) на паралелепіпеді (6) за умови однакових імовірнісних оцінок у перших двох зонах s-ї смуги оптимальною стратегією організатора є

$$\mathbf{Q}_*(s)=\left[\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+2p_2^{\langle s\rangle}-2p_1^{\langle s\rangle}} \quad \frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+2p_2^{\langle s\rangle}-2p_1^{\langle s\rangle}}\right]. \tag{29}$$

Доведення. Якщо оцінки імовірностей позиціювання об’єкта у перших двох зонах s-ї смуги є однаковими, то

$$p_1^{\langle s\rangle}=q_1^{\langle s\rangle},\ p_2^{\langle s\rangle}=q_2^{\langle s\rangle}. \tag{30}$$

Очевидно, що (29) є оптимальною стратегією організатора, якщо виконані (18) і (19), або (23), (24) і (27), (28). Нерівності (24) і (28) виконуються завжди. Для перевірки справедливості (23) і (27) достатньо перевірити тільки одну з цих нерівностей в силу (30). Із (23) із урахованим (30) маємо

$$p_2^{\langle s\rangle} \geq p_1^{\langle s\rangle}+2p_1^{\langle s\rangle}p_2^{\langle s\rangle}-2\left(p_1^{\langle s\rangle}\right)^2,$$

звідки

$$p_2^{\langle s\rangle}\left(1-2p_1^{\langle s\rangle}\right) \geq p_1^{\langle s\rangle}\left(1-2p_1^{\langle s\rangle}\right). \tag{31}$$

Але завдяки умовам (3) і (4) виходить, що $p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}<1$, тобто з урахуванням (30) буде $2p_1^{\langle s\rangle}<1$, а це дає можливість спростити нерівність (31) до нерівності $p_2^{\langle s\rangle} \geq p_1^{\langle s\rangle}$ Остання не суперечить вихідним умовам у (4), тому (23) і (27) при (30) виконуються завжди. Наслідок доведено.

Зауваження 2. Твердження у наслідку 1 може бути доведено й іншим шляхом, починаючи з нерівностей (21) і (22), де можна розглядати лише одну з них. Справді, за умови (30) у нерівності (21) маємо $1 \geq \frac{p_1^{\langle s\rangle}}{1-p_1^{\langle s\rangle}}$, а це дає $1-p_1^{\langle s\rangle} \geq p_1^{\langle s\rangle}$, $p_1^{\langle s\rangle} \leq \frac{1}{2}$, що випливає з (3) і (4).

Тепер, маючи умови (21) і (22), за яких

$$\mathbf{Q}_*(s)=\left[\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \quad \frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}\right] \tag{32}$$

є оптимальною стратегією організатора в антагоністичній грі з ядром (5) на паралелепіпеді (6), необхідно виокремити множини випадків, коли хоча б одна з цих умов не виконується і, як наслідок, (32) не може бути оптимальною стратегією організатора.

Теорема 2. В антагоністичній грі з ядром (5) на паралелепіпеді (6) за умови невиконання (21) і виконання (22)

$$\mathbf{Q}_*(s) = \left[p_1^{\langle s\rangle} \quad \frac{q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \right] \quad (33)$$

є оптимальною стратегією організатора. У цій же грі оптимальною стратегією організатора є

$$\mathbf{Q}_*(s) = \left[\frac{p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \quad q_1^{\langle s\rangle} \right] \quad (34)$$

за умови виконання (21) і невиконання (22).

Доведення. Розглянемо рівняння (13). Нехай не виконується (21) і виконується (22). Значення $y_*(s)$ не може дорівнювати

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)},$$

оскільки невиконання (21) означає

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} < p_1^{\langle s\rangle}, \quad (35)$$

а точка $y_*(s)$ має бути з відрізка $\left[p_1^{\langle s\rangle};\, p_2^{\langle s\rangle}\right]$. Найближчою точкою до

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}$$

є $p_1^{\langle s\rangle}$. Припустимо, що саме це значення і є першою компонентою оптимальної стратегії (20). Якщо так, то отримуємо подвійну нерівність

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y_*(s)} < \frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z_*(s)} < \frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]}, \quad (36)$$

де поки що прийнято (16), оскільки знаменник першого дробу збільшився, а третього – зменшився, завдячуючи підвищенню $y_*(s)$ від

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}$$

до значення $p_1^{\langle s\rangle}$. Але із (36) випливає, що при використанні організатором стратегії

$$\left[p_1^{\langle s\rangle} \quad \frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \right]$$

значенням гри (виграшем першого гравця) буде

$$\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[p_1^{\langle s\rangle}+\dfrac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}\right]}.$$

Цей свій програш організатор не може зменшити за рахунок збільшення $y_*(s)$ від $p_1^{\langle s\rangle}$, а ось зменшення значення (16) збільшить знаменник в останньому дробові подвійної нерівності (36) і зменшить програш організатора. Нове значення $z_*(s)$ знайдемо з рівняння

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z_*(s)} = \frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[p_1^{\langle s\rangle}+z_*(s)\right]}, \quad (37)$$

з якого послідовно отримуємо

$$q_2^{\langle s\rangle}-q_2^{\langle s\rangle}\left[p_1^{\langle s\rangle}+z_*(s)\right] = z_*(s)-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)z_*(s);$$

$$q_2^{\langle s\rangle}-q_2^{\langle s\rangle}p_1^{\langle s\rangle} = \left[1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)+q_2^{\langle s\rangle}\right]z_*(s);$$

$$z_*(s) = \frac{q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}. \quad (38)$$

При цьому мають виконуватись нерівності

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \geq q_1^{\langle s\rangle} \quad (39)$$

і

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \leq q_2^{\langle s\rangle}. \quad (40)$$

Із (40) маємо послідовно нерівності

$$\frac{1-p_1^{\langle s\rangle}}{1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \leq 1;$$

$$1-p_1^{\langle s\rangle} \leq 1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right);$$

$$0 \leq q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle},$$

де використані умови (1) – (4). Отже, (40) виконується завжди, чого і слід було очікувати, адже точка (38) розташовується ліворуч від точки (16). Із (39) маємо послідовно нерівності

$$q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)\ge q_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}p_1^{\langle s\rangle}-\left(q_1^{\langle s\rangle}\right)^2;$$

$$q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)\ge q_1^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)+q_1^{\langle s\rangle}\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right);$$

$$\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right)\cdot\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)\ge q_1^{\langle s\rangle}\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right);$$

$$1-p_1^{\langle s\rangle}\ge q_1^{\langle s\rangle},$$

де використані умови (1) – (4). Отже, (39) виконується завжди. Тобто (38) є другою компонентою оптимальної стратегії організатора (20) за умови (35).

Зауважимо, що зменшувати дріб

$$\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y(s)+z_*(s)\right]}$$

все ж можна при $y(s)>p_1^{\langle s\rangle}$, але тоді доведеться ще далі зсувати ліворуч точку $z_*(s)$, що додатково збільшуватиме дріб $\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z_*(s)}$. Тому (33) є єдиною оптимальною стратегією організатора (20) за умови (35).

Знову звернемося до рівняння (13), але тепер нехай виконується (21) і не виконується (22). Значення $z_*(s)$ не може дорівнювати

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)},$$

оскільки невиконання (22) означає

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}<q_1^{\langle s\rangle}, \qquad (41)$$

а точка $z_*(s)$ має бути з відрізка $\left[q_1^{\langle s\rangle};\, q_2^{\langle s\rangle}\right]$. Найближчою точкою до

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}$$

є $q_1^{\langle s\rangle}$. Припустимо, що саме це значення і є другою компонентою оптимальної стратегії (20). Якщо так, то отримуємо подвійну нерівність

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{z_*(s)}<\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y_*(s)}<\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]}, \qquad (42)$$

де поки що прийнято (15), оскільки знаменник першого дробу збільшився, а третього – зменшився, завдячуючи підвищенню $z_*(s)$ від

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}$$

до значення $q_1^{\langle s\rangle}$. Але із (42) випливає, що при використанні організатором стратегії

$$\left[\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}\quad q_1^{\langle s\rangle}\right]$$

значенням гри (виграшем першого гравця) буде

$$\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}+q_1^{\langle s\rangle}\right]}.$$

Цей свій програш організатор не може зменшити за рахунок збільшення $z_*(s)$ від $q_1^{\langle s\rangle}$, а ось зменшення значення (15) збільшить знаменник в останньому дробові подвійної нерівності (42) і зменшить програш організатора.

Нове значення $y_*(s)$ знайдемо з рівняння

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{y_*(s)}=\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y_*(s)+q_1^{\langle s\rangle}\right]}, \qquad (43)$$

з якого послідовно отримуємо

$$p_2^{\langle s\rangle}-p_2^{\langle s\rangle}\left[y_*(s)+q_1^{\langle s\rangle}\right]= \\ =y_*(s)-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)y_*(s);$$

$$p_2^{\langle s\rangle}-p_2^{\langle s\rangle}q_1^{\langle s\rangle}= \\ =\left[1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)+p_2^{\langle s\rangle}\right]y_*(s);$$

$$y_*(s)=\frac{p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}. \qquad (44)$$

При цьому мають виконуватись нерівності

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}\ge p_1^{\langle s\rangle} \qquad (45)$$

і

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \le p_2^{\langle s\rangle}. \qquad (46)$$

Із (46) маємо послідовно нерівності

$$\frac{1-q_1^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \le 1;$$

$$1-q_1^{\langle s\rangle} \le 1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right);$$

$$0 \le p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle},$$

де використані умови (1) – (4).

Отже, (46) виконується завжди, чого і слід було очікувати, адже точка (44) розташовується ліворуч від точки (15).

Із (45) маємо послідовно нерівності

$$p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right) \ge p_1^{\langle s\rangle}+p_1^{\langle s\rangle}p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}\right)^2-p_1^{\langle s\rangle}q_1^{\langle s\rangle};$$

$$p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right) \ge p_1^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)+p_1^{\langle s\rangle}\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right);$$

$$\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right)\cdot\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right) \ge p_1^{\langle s\rangle}\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right);$$

$$1-q_1^{\langle s\rangle} \ge p_1^{\langle s\rangle},$$

де використані умови (1) – (4). Отже, (45) виконується завжди. Тобто (44) є першою компонентою оптимальної стратегії організатора (20) за умови (41). Зауважимо, що зменшувати дріб

$$\frac{1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1-\left[y_*(s)+z(s)\right]}$$

все ж можна при $z(s) > q_1^{\langle s\rangle}$, але тоді доведеться ще далі зсувати ліворуч точку $y_*(s)$, що додатково збільшуватиме дріб $\dfrac{p_2^{\langle s\rangle}}{y_*(s)}$. Тому (34) є єдиною оптимальною стратегією організатора (20) за умови (41).

Теорему доведено.

Наслідок 2. Якщо не виконується нерівність (21), то обов'язково виконується нерівність (22). І навпаки, якщо не виконується нерівність (22), то обов'язково виконується нерівність (21).

Доведення. Припустимо, що умови (21) і (22) не виконані одночасно. Це є тим самим, що й одночасне виконання нерівностей (35) і (41). Тоді складемо дроби у (35) і (41), що дасть нерівність

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} < p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}. \qquad (47)$$

Далі із (47) отримуємо

$$p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle} < p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}+$$
$$+\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\left(p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}\right)-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)^2,$$

$$\left(p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}\right)\left[1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right] <$$
$$< \left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\left[1-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right],$$

$$p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle} < p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle},$$

що неможливо. Протиріччя з одночасним виконанням умов (21) і (22) означає те, що лише одна з цих двох умов може бути не виконаною. Наслідок доведено.

Наслідок 3. Якщо не виконується нерівність (21), то нерівність (22) виконується строго. І навпаки, якщо не виконується нерівність (22), то нерівність (21) виконується строго.

Доведення. Справді, якщо не виконується нерівність (21), то виконані нерівності (39) і (40), звідки

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} >$$
$$> \frac{q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)} \ge q_1^{\langle s\rangle}, \qquad (48)$$

адже

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}-\frac{q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}=$$

$$=q_2^{\langle s\rangle}\frac{1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)-\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)-\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)\left(p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}\right)+\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{\left[1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]\left[1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]}=$$

$$=q_2^{\langle s\rangle}\frac{-p_2^{\langle s\rangle}+p_1^{\langle s\rangle}\left[1+\left(p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}\right)-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]}{\left[1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]\left[1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]}>0$$

в силу додатного знаменника і додатного за (35) чисельника, тобто точка (38) розташовується ліворуч від точки (16). Тому нерівність (48) показує, що

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}>q_1^{\langle s\rangle} \tag{49}$$

або

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}}{p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}}>\frac{q_1^{\langle s\rangle}}{1-q_1^{\langle s\rangle}}. \tag{50}$$

І навпаки, якщо не виконується нерівність (22), то виконані нерівності (45) і (46), звідки

$$\begin{gathered}\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}> \\ >\frac{p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}\ge p_1^{\langle s\rangle},\end{gathered} \tag{51}$$

адже

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}-\frac{p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}=$$

$$=p_2^{\langle s\rangle}\frac{1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)-\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)-\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)\left(p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}\right)+\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}{\left[1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]\left[1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]}=$$

$$=p_2^{\langle s\rangle}\frac{-q_2^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\left[1+\left(p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}\right)-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]}{\left[1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]\left[1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)\right]}>0$$

в силу додатного знаменника і додатного за (41) чисельника, тобто точка (44) розташовується ліворуч від точки (15).

Тому нерівність (51) показує, що

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+p_2^{\langle s\rangle}+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}>p_1^{\langle s\rangle} \tag{52}$$

або

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}}{q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}}>\frac{p_1^{\langle s\rangle}}{1-p_1^{\langle s\rangle}}. \tag{53}$$

Наслідок доведено.

Наслідок 4. Якщо не виконується нерівність (21), то нерівність (39) виконується строго. І навпаки, якщо не виконується нерівність (22), то нерівність (45) виконується строго.

Доведення. Легко бачити, що зі строгої нерівності (39)

$$\frac{q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+q_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}>q_1^{\langle s\rangle} \tag{54}$$

послідовно випливає

$$q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)>q_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}p_1^{\langle s\rangle}-\left(q_1^{\langle s\rangle}\right)^2,$$

$$q_2^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)>q_1^{\langle s\rangle}\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)+q_1^{\langle s\rangle}\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right),$$

$$\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right)\left(1-p_1^{\langle s\rangle}\right)>q_1^{\langle s\rangle}\left(q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}\right),$$

$$1-p_1^{\langle s\rangle}>q_1^{\langle s\rangle},$$

що завдяки умовам (3), (4) виконано завжди. Так само зі строгої нерівності (45)

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)}{1+p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}+q_1^{\langle s\rangle}\right)}>p_1^{\langle s\rangle} \tag{55}$$

послідовно випливає

$$p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)>p_1^{\langle s\rangle}+p_1^{\langle s\rangle}p_2^{\langle s\rangle}-\left(p_1^{\langle s\rangle}\right)^2-p_1^{\langle s\rangle}q_1^{\langle s\rangle},$$

$$p_2^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)>p_1^{\langle s\rangle}\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)+p_1^{\langle s\rangle}\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right),$$

$$\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right)\left(1-q_1^{\langle s\rangle}\right)>p_1^{\langle s\rangle}\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right),$$

$$1-q_1^{\langle s\rangle}>p_1^{\langle s\rangle},$$

що завдяки умовам (3), (4) виконано завжди. Наслідок доведено.

Зауваження 3. Також за допомогою (26) легко побачити, що нерівності (24) і (28) виконуються строго. Так само нерівності (39), (40), (45) і (46) виконуються строго, що випливає з нерівностей $1-p_1^{\langle s\rangle}>q_1^{\langle s\rangle}$, $0<q_2^{\langle s\rangle}-q_1^{\langle s\rangle}$, $1-q_1^{\langle s\rangle}>p_1^{\langle s\rangle}$ та $0<p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}$ відповідно. Тому $y_*(s)<p_2^{\langle s\rangle}$ та

$z_*(s) < q_2^{\langle s \rangle}$ завжди, і $p_1^{\langle s \rangle} < y_*(s)$ та $q_1^{\langle s \rangle} < z_*(s)$ у (34) і (33) відповідно.

Оптимальний розподіл пошукових ресурсів

Тепер, усунувши часткові невизначеності в оцінюванні імовірностей позиціювання об'єкта у кожній з трьох зон s-ї смуги, імовірності $y_*(s)$, $z_*(s)$ та $1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]$ будуть використані для оптимального розподілу пошукових ресурсів у цій смузі. Для цього на s-й смузі складемо діагональну 3×3-гру, де j-ю чистою стратегією першого гравця (організатора) є рішення про пошук об'єкта у j-й зоні, а k-ю чистою стратегією другого гравця (активного об'єкта) є рішення про переховування (перебування) у k-й зоні цієї смуги, $j=\overline{1,3}$ та $k=\overline{1,3}$. Матрицю такої діагональної гри, у якій обидва гравці володіють ідентичними оптимальними стратегіями

$$\mathbf{L}_*(s)=\left[l_*^{\langle 1 \rangle}(s)\quad l_*^{\langle 2 \rangle}(s)\quad l_*^{\langle 3 \rangle}(s)\right]\in$$
$$\in\left\{\mathbf{L}_*(s)\in R^3 : l_*^{\langle j \rangle}(s)\geq 0,\ \sum_{j=1}^{3} l_*^{\langle j \rangle}(s)=1\right\} \tag{56}$$

позначимо через $\mathbf{W}(s)=\left[w_{jk}(s)\right]_{3\times 3}$, де, зрозуміло, $w_{jk}(s)=0$ при $j\neq k$. Елементи цієї матриці відповідають імовірностям позиціювання об'єкта. Зокрема, на першій смузі

$$w_{11}(1)=y_*(1),$$
$$w_{22}(1)=z_*(1),$$
$$w_{33}(1)=1-\left[y_*(1)+z_*(1)\right]. \tag{57}$$

А ось на наступних смугах в елементах матриць $\left\{\mathbf{W}(s)\right\}_{s=2}^{S}$ мають враховуватись оптимальні стратегії гравця на попередніх смугах. Таким чином, знаючи розв'язок діагональної гри [6], на першій смузі за відомою матрицею $\mathbf{W}(1)$ з елементами (57) маємо:

$$l_*^{\langle j \rangle}(1)=\frac{\left[w_{jj}(1)\right]^{-1}}{\sum_{k=1}^{3}\left[w_{kk}(1)\right]^{-1}},\quad j=\overline{1,3}. \tag{58}$$

На s-й смузі, де $s=\overline{2,S}$, розв'язок $\mathbf{L}_*(s-1)$ впливає на елементи матриці $\mathbf{W}(s)=\left[w_{jk}(s)\right]_{3\times 3}$ так, що j-й діагональний елемент цієї матриці зважується з вагою $l_*^{\langle j \rangle}(s-1)$. Але при цьому бажаним є виконання умови

$$\sum_{j=1}^{3} w_{jj}(s)=1\quad \forall\ s=\overline{2,S}, \tag{59}$$

яка для $s=1$ виконується автоматично.

Тому $\forall\ s=\overline{2,S}$

$$w_{11}(s)=\frac{l_*^{\langle 1 \rangle}(s-1)y_*(s)}{l_*^{\langle 1 \rangle}(s-1)y_*(s)+l_*^{\langle 2 \rangle}(s-1)z_*(s)+l_*^{\langle 3 \rangle}(s-1)\left(1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]\right)}; \tag{60}$$

$$w_{22}(s)=\frac{l_*^{\langle 2 \rangle}(s-1)z_*(s)}{l_*^{\langle 1 \rangle}(s-1)y_*(s)+l_*^{\langle 2 \rangle}(s-1)z_*(s)+l_*^{\langle 3 \rangle}(s-1)\left(1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]\right)}; \tag{61}$$

$$w_{33}(s)=\frac{l_*^{\langle 3 \rangle}(s-1)\left(1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]\right)}{l_*^{\langle 1 \rangle}(s-1)y_*(s)+l_*^{\langle 2 \rangle}(s-1)z_*(s)+l_*^{\langle 3 \rangle}(s-1)\left(1-\left[y_*(s)+z_*(s)\right]\right)}. \tag{62}$$

Для матриць $\left\{\mathbf{W}(s)\right\}_{s=1}^{S}$ з елементами (57) і (60) – (62) маємо такі компоненти розв'язку (56):

$$l_*^{\langle j \rangle}(s)=\frac{\left[w_{jj}(s)\right]^{-1}}{\sum_{k=1}^{3}\left[w_{kk}(s)\right]^{-1}}\quad \forall\ j=\overline{1,3}, \tag{63}$$

де для $s=1$ слід брати елементи (57), а для $s=\overline{2,S}$ необхідно підставляти (60) – (62), враховуючи (63).

Вектори $\left\{\mathbf{L}_*(s)\right\}_{s=1}^{S}$ як розв'язки S-етапної діагональної 3×3-гри з матрицями виграшів $\left\{\mathbf{W}(s)\right\}_{s=1}^{S}$ містять імовірності, з якими організатор направлятиме пошукові ресурси у відповідні зони смуг області пошуків. Але ці імовірності можна трактувати як відносні частки усіх пошукових ресурсів, що направлятимуться у фіксовану смугу. Пошуки доцільно вести по смугах послідовно, у напрямку зростання номера смуги, адже саме у цьому напрямі просуватиметься вглиб області активний об'єкт. Якщо на якійсь смузі об'єкта не локалізовано, то далі пошуки треба вести на наступній смузі. А на s-й смузі у j-ту зону необхідно спрямовувати $l_*^{\langle j \rangle}(s)$ частини пошукового ресурсу, $s=\overline{1,S}$ та $j=\overline{1,3}$.

Висновок та перспектива подальшого дослідження

Побудована модель оптимального розподілу пошукових ресурсів для організації пошуків активного об'єкта полягає у врахуванні оптимальних стратегій $\left\{\mathbf{L}_*(s)\right\}_{s=1}^{S}$ діагональної S-етапної 3×3-гри з матрицями $\left\{\mathbf{W}(s)\right\}_{s=1}^{S}$, елементами яких є оптимальні стратегії $\left\{\mathbf{Q}_*(s)\right\}_{s=1}^{S}$ континуальних антагоністичних ігор з ядрами (5) на паралелепіпеді (6), що використовуються для усунення часткових невизначеностей в оцінюванні імовірностей позиціювання об'єкта у трьох зонах кожної смуги. Кожна зі смуг області пошуків розділена на зони нетривіально, але у побудованій моделі цей нетривіальний поділ є найпростішим. Враховування оптимальних стратегій $\left\{\mathbf{L}_*(s)\right\}_{s=1}^{S}$ може здійснюватись декількома способами, але найбільш прагматичним є зональне розділення пошукового ресурсу на s-й смузі на відносні частки, що дорівнюють компонентам векторів $\left\{\mathbf{L}_*(s)\right\}_{s=1}^{S}$. Перспектива подальшого дослідження очевидним чином полягає у розгляді більш складних структур області пошуків, де першочерговим є завдання збільшення кількості зон у смугах.

Список літератури

1. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д.Б. Юдин. – М.: Сов. радио, 1974. – 400 с.: ил.

2. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р.И. Трухаев. – М.: Наука, 1981. – 258 с.

3. Катеринчук І.С. Математична модель визначення імовірних маршрутів руху порушників державного кордону / І.С. Катеринчук, С.М. Широбоков, М.Ю. Цибровський // Збірник наукових праць № 13. Ч. І. – Хмельницький: Видавництво Національної академії Державної прикордонної служби України ім. Б. Хмельницького, 2005. – С. 48-53.

4. Катеринчук І.С. Рекомендації щодо вибору раціональних режимів функціонування системи протидії незаконній міграції на державному кордоні / І.С. Катеринчук, А.Б. Мисик, М.Ю. Цибровський // Честь і закон. – № 1. – Х.: АВВ МВСУ, 2007. – С. 58-64.

5. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений / И.Г. Черноруцкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.: ил.

6. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н.Н.Воробьёв. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с.

7. Теория игр: [учеб. пособ. для ун-тов] / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. – 304 с.: ил.

8. Романюк В.В. Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок повздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В.В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 1. – С. 42-56.

9. Романюк В.В. Моделювання дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції і знаходження оптимальної площі кожної опори / В.В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 3. – С. 18-25.

10. Оуэн Г. Теория игр / Г. Оуэн: [пер. с англ.]. – 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.

Надійшла до редколегії 24.11.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.С. Катеринчук, Національна академія державної прикордонної служби України ім. Б. Хмельницького, Хмельницький.

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШУКІВ ОБ'ЄКТА В УМОВАХ ЧАСТКОВОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЩОДО ІМОВІРНОСТЕЙ ЙОГО ПОЗИЦІЮВАННЯ У ТРЬОХ ЗОНАХ ПОШУКОВИХ СМУГ

В.В. Романюк

Складено антагоністичну модель оптимальних пошуків об'єкта, котрий рухається через смуги прямокутної області. Доведено твердження в усуненні часткової невизначеності щодо оцінених імовірностей позиціювання об'єкта у трьох зонах кожної смуги.

Ключові слова: *моделювання пошуків, антагоністична гра, імовірність позиціювання, часткова невизначеність.*

MODELING THE OBJECT SEARCH WITHIN PARTIAL INDETERMINANCY CONDITIONS IN RELATION TO PROBABILITIES OF ITS POSITIONING IN THREE ZONES OF SEARCHING STRIPS

V.V. Romanuke

There has been constituted an antagonistic model of an object optimal search, which moves through strips of the rectangular area. There have been proved the claims in removing partial indeterminancy within evaluated probabilities of the object localization in three zones of each strip.

Keywords: *modeling searches, antagonistic game, positioning probability, partial indeterminancy.*