УДК 629.78

І.А. Кухарський

Військова частина А0515

ЗАСТОСУВАННЯ ЗМІЩЕНОЇ Т-СХЕМИ НА ОСНОВІ СТУПЕНЕВИХ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗКУ БАЛІСТИЧНИХ ЗАДАЧ

У статті приведений розрахунок балістичного руху космічного апарату зміщеними диференціальними перетвореннями нетейлорівського типу на основі степеневих функцій. Наведено формули, що враховують особливості диференційних рівнянь балістичного руху космічного апарату та дозволяють реалізувати числовий розв'язок цих рівнянь зазначеною Т-схемою.

Ключові слова: *космічний апарат, обчислювальний алгоритм інтегрування.*

Вступ

Для вирішення більшості балістичних задач необхідно проводити інтегрування диференційного рівняння руху космічного апарату (КА):

$$\frac{dx}{dt} = f(q,\ t) \text{ при } x_0 = x(t_0), \qquad (1)$$

де x – вектор параметрів балістичного руху КА; f – безперервна і безперервно-диференційова-на за t вектор-функція; t – незалежна змінна, за якою проводиться інтегрування; x_0 – вектор початкових умов балістичного руху КА; x_0 – початкове значення незалежної змінної.

Виходячи з того, що диференційні рівняння, які описують балістичний рух КА, є нелінійними, розв'язати їх із задовільною точністю у більшості практичних випадків можливо тільки із застосуванням числових методів [2].

Аналіз останніх досліджень. Найбільш розповсюдженими числовими методами для розв'язку балістичних задач на теперішній час є метод Адамса 7-го порядку та метод Рунге-Кутта 4-го порядку [2]. Обчислювальні алгоритми числового розв'язку під час реалізації цих методів, виходячи з їх основних математичних властивостей, мають комбіновану структуру, що знижує їх гнучкість під час розв'язку різнопланових задач [2, 6]. Так, для початку розрахунку методом Адамса необхідно задати значення параметрів руху КА у 7-ми початкових точках (вузлах обчислювальної сітки), що, як правило, проводиться методом Рунге-Кутта, а для реалізації методом Адамса обчислювального алгоритму з адаптивним кроком, чи отримання розв'язку у проміжних між вузлами обчислювальної сітки точках необхідно застосовувати процедури інтерполяції [6].

Позбутися вищенаведених недоліків традиційних числових методів під час розв'язку балістичних задач вдається за допомогою математичного апарату диференціальних перетворень [1, 3, 4]. Диференціальні перетворення вже застосовувалися до розв'язку задачі інтегрування (1), але із відомих Т-схем обиралась найпростіша – явна обчислювальна схема на основі диференціально-тейлорівських перетворень [3]. Натомість зараз розроблені й інші, більш ефективні з обчислювальної точки зору, обчислювальні схеми на основі диференціальних перетворень, наприклад, зміщена Т-схема на основі ступеневих функцій [5]. Зазначена Т-схема дозволяє досягти значного зменшення похибки апроксимації (нев'язкі) результуючого обчислювального алгоритму на дійсному розв'язку диференційного рівняння [5] у порівняні з іншими відомими Т-схемами. Так, із використанням традиційної, явної Т-схеми нев'язка виникає за рахунок відкидання (неврахування) відрізку з останніх членів ряду Тейлора, а з використанням Т-схеми з [5] її вдається суттєво знизити за рахунок вибору апроксимуючих коефіцієнтів у прямій і зміщеній моделях.

Формулювання цілей статті. До специфіки зміщеної Т-схеми на основі ступеневих функцій відноситься процедура визначення параметрів руху КА у наступній точці (вузлі обчислювальної сітки) із значення у попередній точці.

При складній правій частині рівняння балістичного руху КА (1) таке визначення можливо провести тільки шляхом розв'язання нелінійного рівняння. Таким чином, виникає завдання розрахунку у наступній точці початкового наближення значень параметрів руху КА та вибору ітераційного методу розв'язку нелінійних рівнянь для остаточного визначення цих параметрів.

Обґрунтований вибір ітераційного методу можливий тільки якщо врахувати математичні особливості балістичного руху КА.

Виходячи із вищевикладеного, **метою статті** є отримання обчислювального алгоритму інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціальними перетвореннями нетейлорівського типу на основі степеневих функцій, які враховують математичні особливості цих рівнянь.

Виклад основного матеріалу

Диференціально-тейлорівськи перетворення – це функціональні перетворення вигляду:

$$Z(k)_{t^*} = P\{z(t)\}_{t^*} = \frac{H^k}{k!}\frac{d^k[z(t)]}{dt^k}\bigg|_{t^*};$$
$$z(t) = P^{-1}\{Z(k)_{t^*}\} = \sum_{k=0}^{k_{max}}\frac{t-t^*}{H}Z(k), \qquad (2)$$

де $P\{\ \}$, $P^{-1}\{\ \}$ – оператор прямого та оберненого перетворень; $Z(k)$ – диференціальний спектр, набір дискрет чи зображення $z(t)$; k – цілочисловий аргумент (номер дискрети) диференціального спектра, $k = 0, 1, \ldots$; t^* – значення аргументу, при якому визначається диференціальний спектр; H – відрізок аргументу t, на якому розглядається функція $z(t)$ і який не може перевищувати значення радіуса збіжності ряду Тейлора для $z(t)$ у точці t^*; k_{max} – максимальний номер дискрети, що приймає участь у відновленні.

Явна Т-схема інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху КА диференціально-тейлорівськими перетвореннями записується наступним чином [4]:

$$\omega_n = (t_0,\ t_0 + H,\ \ldots,\ t_0 + nH, \ldots),\ H = t_{n+1} - t_n; \qquad (3)$$

$$X_n(0) = x_n,\ T_n(k) = P\{t\}_{t_n} = \begin{cases} t_0 + nH & \text{при } k = 0 \\ H & \text{при } k = 1 \\ 0 & \text{при } k \ge 1 \end{cases}; \qquad (4)$$

$$X_n(k+1) = \frac{H}{k+1}F[X_n(k), T_n(k)],$$
$$\text{äëÿ} \quad k = 0, \ldots, k_{max} - 1; \qquad (5)$$

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{k_{max}} X_n(k), \qquad (6)$$

де ω_n – обчислювальна сітка за незалежною змінною t, на якій проводиться числовий розв'язок (1); H – крок обчислювальної сітки ω_n; $x_n = x(t_n)$ – значення шуканого вектору параметрів руху КА; $T_n(k)$ – диференціальний спектр незалежної змінної t; $X_n(k)$ – диференціальний спектр вектора параметрів руху КА; $F[X_n(k),\ T_n(k)] = P\{f(q,\ t)\}_{t_n}$ – Т-зображеня правої частини (1) (переведення здійснюється однозначною заміною математичних операцій $(+,\ -,\ *,\ /,\ \partial,\ \int,\ \ldots)$ та функцій $(\sin,\ \cos,\ \exp, \ldots)$ в області оригіналів на відповідні їм залежності в області зображень [4]).

Формули (3) – (6) дозволяють отримати значення вектора параметрів балістичного руху КА – x у будь-який необхідній точці ω_n, починаючи з початкового значення x_0. При чому (5) являє собою рекурентну залежність, за якою визначається диференціальний спектр $X_n(k)$, починаючи з $X_n(0)$. Залежності (3) – (6) реалізують явний обчислювальний алгоритм, оскільки в (5) значення параметрів балістичного руху КА у вузлі $n+1$ – x_{n+1} визначається явно через значення параметрів руху КА у попередньому вузлі n – x_n.

Запишемо на сітці ω_n обчислювальну схему інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціальними перетвореннями нетейлорівського типу на основі степеневих функцій [5]:

$$\sum_{k=0}^{k_a}(-1)^k a_k X_{n+1}(k) = \sum_{k=0}^{k_b} b_k X_n(k); \qquad (7)$$

$$a_k = \frac{(k_a + k_b - k)!}{(k_a + k_b)!}\frac{k_a!}{(k_a - k)!} \text{ при } k = 0, \cdots, k_a,$$

$$b_k = \frac{(k_a + k_b - k)!}{(k_a + k_b)!}\frac{k_b!}{(k_b - k)!} \text{ при } k = 0, \cdots, k_b,$$

де a_k, b_k – сталі коефіцієнти; k_a, k_b – максимальні номери дискрети, що враховується при відновленні у зміщеному і прямому Т-спектрах, відповідно.

У (7) диференціальні спектри $X_{n+1}(k)$ та $X_{n+1}(k)$ розраховується за співвідношенням (4) – (5), а значення коефіцієнтів a_k, b_k визначається з вимоги максимізації порядку апроксимації Т-схеми.

Значення параметрів руху КА, яке обчислюється, входить до залежності (7) нелінійно, тобто (7) є нелінійним рівнянням відносно x_{n+1}. Таким чином, дана Т-схема задає неявний обчислювальний алгоритм і тому для його реалізації необхідно використовувати один із ітераційних методів розв'язку нелінійних рівнянь. Застосування будь-якого ітераційного методу розв'язку нелінійних рівнянь складається з двох етапів: визначення початкового наближення параметрів, що розшукуються, та безпосереднє застосування ітераційного методу.

Розглянемо як подібне завдання вирішене під час застосування, широко розповсюдженого при розв'язанні балістичних задач, неявного методу Адамса 7-го порядку. Обчислювальний алгоритм інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху КА вищезазначеним методом записується наступним чином (вважатимемо, що необхідна кількість початкових точок відома та обчислювальна сітка (3) є рівномірною) [2]:

$$x_{n+1} = x_n + h\sum_{k=0}^{7}\alpha_k f(x_{n-k},\ t_{n-k}); \qquad (8)$$

$$x_{n+1} = x_n + h\sum_{k=0}^{7}\beta_k f(x_{n+1-k},\ t_{n+1-k}), \qquad (9)$$

де α_k, β_k – сталі коефіцієнти; h – крок інтегрування.

Екстраполяційна формула (8) є явним методом Адамса, за якою визначається початкове наближення для (9). Інтерполяційна формула (9) є неявним методом Адамса, яка реалізує одну ітерацію за методом простої ітерації для розв'язку нелінійного рівняння відносно q_{n+1}. Більш повно метод простої ітерації для (9) записується наступним чином:

$$x_{n+1}^{(s+1)} = x_n + h\sum_{k=0}^{7}\beta_k f\left(x_{n+1-k}^{(s)},\ t_{n+1-k}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{n+1}^{(s+1)} = x_n + h\beta_0 f\left(x_{n+1}^{(s)},\ t_{n+1}\right) + \qquad (10)$$
$$+h\sum_{k=1}^{7}\beta_k f\left(x_{n+1-k},\ t_{n+1-k}\right),$$

де s – індекс за методом простої ітерації.

Метод простої ітерації (10) збігається, якщо із необхідною точністю визначене початкове наближення $x_{n+1}^{(0)}$ та виконується умова [6]:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left(x_n + h\left[\begin{array}{c}\beta_0 f\left(x_{n+1},\ t_{n+1}\right) + \\ +\sum_{k=1}^{7}\beta_k f\left(x_{n+1-k},\ t_{n+1-k}\right)\end{array}\right]\right)_{x_{n+1}^*}\right| < \qquad (11)$$
$$< 1 \quad \Rightarrow \quad \left|h\beta_0 \frac{\partial f\left(x_{n+1}^*,\ t_{n+1}\right)}{\partial x_{n+1}}\right| < 1,$$

де x_{n+1}^* – корінь рівняння (9).

Про виконання умови (11) для балістичних задач можна судити виходячи з широкої розповсюдженості і відповідно апробації обчислювального алгоритму (8) – (9) у практиці балістичних розрахунків, у наслідок чого можна стверджувати, що "нормальна робота" в (9), саме методу простої ітерації, спирається на математичні особливості балістичного руху КА, тобто математичні особливості (1), а саме значення – $\partial f\left(x_{n+1}^*,\ t_{n+1}\right)\big/\partial x_{n+1}$.

Скористаємось ознаками традиційного підходу (8) – (9) для отримання обчислювального алгоритму інтегрування (1) на основі (7).

По-перше, початкове наближення параметрів балістичного руху КА в точці t_{n+1} – $x_{n+1}^{(0)}$ можна визначити подібно до (8), за допомогою явного обчислювального алгоритму (3) – (6).

По-друге, застосуємо метод простої ітерації для розв'язку рівняння (7), для цього перетворимо (7) із врахуванням (4), та того, що $a_0 = 1$

$$x_{n+1} + \sum_{k=1}^{k_a}(-1)^k a_k X_{n+1}(k) = \sum_{k=0}^{k_b} b_k X_n(k) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{n+1}^{(s+1)} = \sum_{k=0}^{k_b} b_k X_n(k) - \sum_{k=1}^{k_a}(-1)^k a_k X_{n+1}^{(s)}(k). \qquad (12)$$

Залежність (12) буде збігатися, якщо із необхідною точністю визначене початкове наближення $x_{n+1}^{(0)}$ та виконується умова:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{k_b} b_k X_n(k) - \sum_{k=1}^{k_a}(-1)^k a_k X_{n+1}(k)\right]_{x_{n+1}^*}\right| < 1. \qquad (13)$$

Розпишемо (13) при врахуванні інтервалу розгляду $\left[t_n,\ t_{n+1}\right]$ із (3) та прямого перетворення з (2):

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left[\begin{array}{c}\sum_{k=0}^{k_b} b_k \frac{H^k}{k!}\frac{d^k\left[x\left(t_n\right)\right]}{dt^k} - \\ -\sum_{k=1}^{k_a}(-1)^k a_k \frac{H^k}{k!}\frac{d^k\left[x\left(t_{n+1}\right)\right]}{dt^k}\end{array}\right]_{x_{n+1}^*}\right| < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left[\begin{array}{c}\sum_{k=0}^{k_b} b_k \frac{H^k}{k!}\frac{d^k x_n}{dt^k} - \\ -\sum_{k=1}^{k_a}(-1)^k a_k \frac{H^k}{k!}\frac{d^k x_{n+1}}{dt^k}\end{array}\right]_{x_{n+1}^*}\right| < 1 \Rightarrow \qquad (14)$$
$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{k_a}(-1)^k a_k \frac{H^k}{k!}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left[\frac{d^k x_{n+1}^*}{dt^k}\right]\right| < 1.$$

Врахуємо в (14) залежність (1)

$$\left|\sum_{k=1}^{k_a}(-1)^k a_k \frac{H^k}{k!}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left[\frac{dx_{n+1}^*}{dt}\right]\right| < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{k_a}(-1)^k a_k \frac{H^k}{k!}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left[\frac{d^{k-1} f\left(x_{n+1}^*,\ t_{n+1}\right)}{dt^{k-1}}\right]\right| < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left| -a_1 H \frac{\partial f\left(x_{n+1}^*,\ t_{n+1}\right)}{\partial x_{n+1}} + \right. \qquad (15)$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{k_a}(-1)^k a_k \frac{H^k}{k!}\frac{\partial^k f\left(x_{n+1}^*,\ t_{n+1}\right)}{\partial x_{n+1}\partial t^{k-1}}\right| < 1.$$

Залежність (15) подібна до (11) і можна стверджувати, що для деякого інтервалу значень H вона буде виконуватися. Таке врахування математичних особливостей диференційного рівняння (1) дозволяє застосувати метод простої ітерації для розв'язку (12).

Після того як збіжність (12) доведено, запишемо повний обчислювальний алгоритм інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціальними перетвореннями перетвореннями нетейлорівського типу на основі степеневих функцій. У точці n за відомим значенням параметрів руху КА x_n проводяться операції (3) – (5) для визначення диференціального спектра $X_n(k)$:

$$X_n(0) = x_n, \quad T_n(k) = \begin{cases} nH & \text{при } k = 0 \\ H & \text{при } k = 1 \\ 0 & \text{при } k \ge 1 \end{cases}, \qquad (16)$$

$$X_n(k+1) = \frac{H}{k+1} F\left[X_n(k), t_n(k)\right] \qquad (17)$$

для $k = 0,\ \ldots,\ k_b - 1$.

На основі визначеного диференційного спектра (17) визначається початкове наближення параметрів балістичного руху КА у точці $n+1$

$$x_{n+1}^{(s=0)} = \sum_{k=0}^{k_b} X_n(k). \qquad (18)$$

Використовуючи отримане значення $x_{n+1}^{(s)}$, проводяться операції (3) – (5) для визначення диференціального спектра $X_{n+1}^{(s)}(k)$:

$$X_{n+1}^{(s)}(0) = x_{n+1}^{(s)}; \quad T_{n+1}(k) = \begin{cases} (n+1)H & \text{при } k=0 \\ H & \text{при } k=1 \\ 0 & \text{при } k \geq 1 \end{cases}, \qquad (19)$$

$$X_{n+1}^{(s)}(k+1) = \frac{H}{k+1} F\left[X_{n+1}^{(s)}(k), T_{n+1}(k)\right]. \qquad (20)$$

äëÿ $k = 0, ..., k_{max} - 1$.

Визначається за методом простої ітерації наступне наближення параметрів руху КА

$$x_{n+1}^{(s+1)} = \sum_{k=0}^{k_b} b_k X_{n+1}^{(s)}(k) - \sum_{k=1}^{k_a} (-1)^k a_k X_{n+1}^{(s)}(k). \qquad (21)$$

Після проведення необхідної кількості ітерацій по s відповідно до (19) – (21), останнє значення $x_{n+1}^{(s)}$ приймається за x_{n+1}^{*} і здійснюється перехід до наступного вузла ω_n.

Наведені формули (16) – (21) разом з (3), (7) складають обчислювальний алгоритм інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціальними перетвореннями перетвореннями нетейлорівського типу на основі степеневих функцій. При чому у залежності (21) враховані математичні особливості балістичного руху КА, що дало змогу для реалізації неявної обчислювальної схеми застосувати метод простої ітерації.

Було проведено моделювання прогнозування збуреного балістичного руху КА з врахуванням моделі гравітаційного поля Землі 8×8 та статичної атмосфери. В якості диференційних рівнянь руху КА (1) розглядались системи, записані в гринвіцький прямокутній системі координат та в системі оскулюючих елементів [2].

В обох варіантах подана обчислювальна схема дала задовільну точність під час використання одної ітерації за s.

Висновки

У статті наведено формули, які складають обчислювальний алгоритм числового інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху КА *апарату зміщеними диференціальними перетвореннями нетейлорівського типу на основі степеневих функцій*. У наведених формулах враховано математичні особливості диференційних рівнянь балістичного руху КА, що дозволило довести можливість використання методу простої ітерації для розв'язання нелінійного рівняння "неявної" обчислювальної схеми.

Список літератури

1. Диференціальні перетворення для комп'ютерного моделювання: навч. посіб. / Баранов Г.Л. Баранов, Баранов В.Л. Баранов, І.А. Жуков, Л.О. Алексєєва. – К.: Національний авіаційний університет, 2002. – 106 с.

2. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений / Б.Ф. Жданюк. – М.: Сов. радио, 1978. – 384 с., ил.

3. Ковбасюк С.В. Прогнозирование неуправляемого движения космического аппарата методом дифференциальных преобразований / С.В. Ковбасюк, М.Ю. Ракушев // Двойные технологии. – 2003. – № 4. – С. 16-20.

4. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г.Е. Пухов. – К.: Наукова думка, 1986. – 159 с.

5. Ракушев М.Ю. Зміщена Т-схема рішення задачі Коші на основі степеневих функцій / М.Ю. Ракушев // Зб. наук. пр. ЖВІ НАУ. – Житомир: ЖВІ НАУ, 2008. – № 1.– С. 169-177.

6. Самарский А.А. Численные методы: учеб. пособ. для вузов. / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

Надійшла до редколегії 23.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.В. Худов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І Кожедуба, Харків.

ПРИМЕНЕНИЕ СМЕЩЕННОЙ Т-СХЕМЫ НА ОСНОВЕ СТУПЕНЕВЫХ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

И.А. Кухарский

В статье приведен расчет баллистического движения космического аппарата смещенными дифференциальными превращениями нетейлоровского типа на основе функций степеней. Приведены формулы, которые учитывают особенности дифференциальных уравнений баллистического движения космического аппарата и позволяют реализовать числовое решение этих уравнений отмеченной Т-схемою.

Ключевые слова: *космический аппарат, вычислительный алгоритм интегрирования.*

APPLICATION OF THE DISPLACED T-СХЕМЫ ON BASIS OF STUPENEVYKH OF FUNCTIONS TO DECISION OF BALLISTIC TASKS

I.A. Kukharskiy

In the article the calculation of ballistic motion of space vehicle the displaced differential transformations of nontaylor type is resulted on the basis of functions of degrees. Formulas which take into account the features of differential equalizations of ballistic motion of space vehicle and allow to realize the numerical decision of these equalizations the noted T-схемою are resulted.

Keywords: *space vehicle, computational algorithm of integration.*