УДК 621.651-154

А.К. Фурсенко, М.В. Кайдаш

Национальный фармацевтический университет, Харьков

О НЕКОТОРЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОБЪЕМНЫХ ГИДРОМАШИНАХ

Проанализированы особенности математических моделей рабочих процессов в объемных гидромашинах. Предложен алгоритм их компьютерной реализации.

Ключевые слова: *математическая модель, дифференциальные уравнения, методы численного интегрирования, шаг интегрирования, объемные гидромашины, постоянная времени.*

Введение

Постановка проблемы. Широкое использование объемного гидропривода, а следовательно и объемных гидромашин, в летательных аппаратах общеизвестно [1]. Проектирование таких систем неизбежно связано с математическим моделированием.

Математические модели динамических процессов в гидромашинах обычно содержат три группы дифференциальных уравнений: уравнения движения подвижных элементов, уравнения неразрывности и уравнения движения рабочего тела. В зависимости от максимального значения исследуемых частот используются либо модели с сосредоточенными, либо с распределенными параметрами. При выполнении неравенства

$$f_{max} \ll \frac{a}{2L},$$

где f_{max} – максимальное значение интересующих частот; a – скорость звука в жидкости; L – характерный размер полости гидромашины

Математическая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой характерно наличие нелинейностей и зависимость коэффициентов от времени.

Для численного интегрирования таких систем в настоящее время используются различные методы: одношаговые и многошаговые, методы для решения жестких и нежестких задач. При этом в зависимости от параметров гидромашины методы, которые в одном случае позволяют получить быстрое и точное решение, в другом приводят к дроблению шага, замедлению процесса решения или его остановке. Кроме того, зачастую в одной и той же задаче методы по-разному ведут себя на различных промежутках интегрирования. Таким образом, возникает задача анализа вычислительных особенностей решаемых уравнений и выбора или построения эффективного алгоритма решения.

Цель статьи. Проанализировать особенности математических моделей с сосредоточенными параметрами динамики рабочих процессов в объемных гидромашинах и разработать эффективный алгоритм их компьютерной реализации.

Основной материал

Анализ результатов расчетов показывает, что шаг интегрирования определяется уравнениями неразрывности, которое в случае сосредоточенных параметров имеет типовой вид:

$$\frac{V(t)}{E}\frac{dp}{dt} = S(t)\sqrt{\frac{2\left|p - p_н\right|}{\varsigma\rho}} \times \\ \times \mathrm{Sign}\left(p - p_н\right) + Q_г(t), \quad (1)$$

где p – интересующее давление в полости; t – время; V – изменяемый объем полости; E – модуль упругости газожидкостной смеси; S – площадь сечения между сообщающимися сечениями; $p_н$ – постоянное высокое давление в смежной полости; ς – коэффициент сопротивления; ρ – плотность жидкости; $Q_г$ – расход жидкости, вызываемый перемещением поршня.

После обезразмеривания уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{V(\bar{t})p_н}{ETQ_0}\frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} = -\bar{S}(t)\sqrt{\left|\bar{p}-1\right|} \times \mathrm{Sign}\left(p-1\right) + Q_г(t), \quad (2)$$

где $\bar{p} = \frac{p}{p_0}$; $\bar{t} = \frac{t}{T}$; $\bar{S} = \frac{S}{S_0}$, t – характерное время; S_0 – максимальная величина сообщающего сечения; $Q_0 = S_0\sqrt{\frac{p_0}{\varsigma\rho}}$.

В объемных гидромашинах типичной является ситуация, когда величина $\frac{V(\bar{t})}{T}$ изменяется в широких пределах. То есть, параметр, стоящий при производной, изменяется от единицы до очень малых значений. В этом случае, когда величина этого параметра порядка единицы, интегрирование уравнений вида (2) не вызывает затруднений. Как правило, здесь эффективны классические явные схемы типа Рунге-Кутта, Адамса и другие, не требующие больших затрат времени на каждом шаге.

Когда $\varepsilon = \frac{V(\bar{t})p_н}{ETQ_0} << 1$, системы уравнений, в которые входят уравнения вида (2), являются жесткими [2], то есть, для них справедливо соотношение

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} >> 1,$$

где T_{max} – максимальная постоянная времени; T_{min} – минимальная постоянная времени.

При интегрировании с помощью явных схем в этом случае шаг интегрирования становится $h \sim T_{min}$ в силу ограниченности области устойчивости, и решение практически "зависает". Для численного интегрирования таких систем следует применять алгоритмы, основанные на неявных схемах типа Гира, ФДН, циклические методы [3], обладающие неограниченной областью устойчивости, хотя и требующие большого объема вычислений на каждом шаге. Здесь приходится методом Ньютона решать систему нелинейных алгебраических уравнений.

Таким образом, при выборе метода интегрирования систем, описывающих динамические процессы объемных гидромашин, в уравнениях неразрывности следует оценивать величину параметра ε и в зависимости от его величины применять явные или неявные схемы.

При этом, в зависимости от характера изменения ε возможны два варианта: а) на всем интервале интегрирования выбирается явная или неявная схема; б) значение ε в процессе интегрирования изменяется столь значительно, что применение на всем участке интегрирования той или другой схемы невозможно или малоэффективно.

В последнем случае целесообразно комбинированное использование явных и неявных методов. То есть, на участках интегрирования, где $\varepsilon \sim 1$ применяются явные методы, а при $\varepsilon \ll 1$ – неявные. При этом возникает проблема "сшивки" решения.

Эта задача просто решается в том случае, когда для интегрирования "жесткой" системы используются алгоритмы типа прогноз-коррекция. Для получения прогноза используются явные схемы, а коррекция производится с помощью неявной схемы. Тогда на участках времени, где система не является "жесткой" используется явный метод, например Адамса, а при выполнении (2), чтобы не допустить дробления шага, вводится коррекция с помощью неявного метода.

Примером построения такого алгоритма может служить схема, основанная на методе ФДН [3], широко используемая для решения "жестких" систем. Это многошаговый метод, в котором при решении задачи Коши

$$y = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

прогноз вычисляется по формуле:

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^{k+1} y_i y_{n+1-i}\,, \tag{3}$$

а коррекция находится из уравнения:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k} a_i y_{n+1-i} = f\left(y_{n+1}, x_{n+1}\right), \tag{4}$$

где y_i и a_i – коэффициенты, вычисляемые через разности $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ и зависящие от порядка метода k и момента времени n; h = $x_{n+1} - x_n$.

Тогда на участках, где ε позволяет использование явных схем, для получения решения применяется формула (3). Причем, контроль точности можно организовать сравнением решений, полученных при k = *l* и k = *l* + 1.

При ε <<1 в дополнение к (3) используется (4), где окончательное решение получается решением методом Ньютона, а контроль точности производится сравнением прогноза и коррекции.

Опыт интегрирования систем, описывающих динамические процессы в объемных гидромашинах, показал, что обращаться к формулам (3), (4) в последнее время приходится все чаще. Это связано с расширением диапазона технических характеристик приводов и гидромашин и, как следствие, с расширением областей изменения параметров в соответствующих уравнениях.

Выводы

1. При численном интегрировании систем уравнений, описывающих динамические процессы в объемных гидромашинах в сосредоточенных параметрах, следует оценить величину параметра при производной в уравнениях неразрывности.

2. В случае, если ε ~ 1 на всем промежутке интегрирования, рекомендуется использование явных методов (Рунге-Кутта, Адамса и др.). При ε ≪ 1 необходимо применение методов для решения "жестких" задач (Гира, ФДН и др.).

3. Если ε в процессе решения изменяется от ε ~ 1 до ε ≪ 1, то рекомендуется использование комбинированных методов, использующих формулы (3), (4).

Список литературы

1. *Гликман В.Ф. Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей / В.Ф. Гликман. – М.: Машиностроение, 1974. – 296 с.*
2. *Холл Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 312 с.*
3. *Ракитский В.Ю. Численные методы решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ю. Ракитский, С.Н. Устинов, С.Ю. Черноруцкий. – Л.: Изд-во ЛПИ им. Калинина, 1987. – 83 с.*
4. *Брайтон Р. Новый эффективный алгоритм решения алгебраических систем дифференциальных уравнений, основанный на использовании формул численного дифференцирования в неявном виде с разностями назад / Р. Брайтон, Ф. Густавсон, Г. Хачтел // ТИИЭР. – 1972. – Т. 60, № 1. – С. 136-148.*

Поступила в редколлегию 1401.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Я. Мовшович, Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков.

ПРО ДЕЯКІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ОБ'ЄМНИХ ГІДРОМАШИНАХ

О.К. Фурсенко, М.В. Кайдаш

Проаналізовано особливості математичних моделей робочих процесів в об'ємних гідромашинах. Запропоновано алгоритм їх комп'ютерної реалізації.

Ключові слова: *математична модель, диференціальні рівняння, методи чисельної інтеграції, крок інтеграції, об'ємні гідромашини, постійна часу.*

ABOUT SOME CALCULABLE FEATURES OF MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMIC PROCESSES IN VOLUMES HYDRAULIC MACHINE

A.K. Fursenko, M.V. Kaydash

Mathematical models characteristic properties of working processes in positive-displacement hydraulic machines are analyzed. An algorithm for their computer implementation is described.

Keywords: *mathematical model, differential equations, numerical method of integration, positive-displacement hydraulic machine, time constant.*