УДК 004.722

С.М. Неділько

*Державна льотна академія України, Кіровоград*

# МЕТОД ПОЕТАПНОГО ЗМЕНШЕННЯ ПОТУЖНОСТІ БАЗИ ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО БАГАТОГРАННИКА ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ НАПРАВЛЕНОГО ПЕРЕБОРУ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

*Запропоноване метод поетапного зменшення потужності бази перестановочного багатогранника для організації направленого перебору в задачах дискретної оптимізації на прикладі оптимізації структурі функціонально стійкої автоматизованої системи управління повітряним рухом.*

***Ключові слова:*** *функціональна стійкість, автоматизована система управління повітряним рухом.*

## Вступ

Під час синтезу складних технічних систем, до яких в повної мірі відноситься автоматизована система управління повітряним рухом (АСУПР), виникає необхідність рішення задач дискретної оптимізації. Для цих задач, як відомо, важливою характеристикою є точність. Дослідження показали, що в багатьох випадках тільки повний або направлених перебір можуть дати точне рішення. Але, як завжди, повний перебір не можливо здійснити через проблему великої розмірності. Відомо, що серед методів та алгоритмів направленого перебору найкращим є той, для якого до початку або під час перебору можливо відкинути якомога більше неперспективних рішень.

**Постановка проблеми.** Для оптимізації структури складних систем необхідно задати множину допустимих рішень, яка є комбінаторним об’єктом. Для синтезу функціонально стійкої автоматизованої системи повітряним рухом цільову функцію неможливо записати аналітичним виразом, тому вона визначається алгоритмічно. В таких умовах актуальним є розробка найбільш ефективних методів пошуку точного рішення.

**Аналіз публікацій.** Існуюча теорія дискретної оптимізації, яка досить повно описана в багатьох наукових роботах [1 – 3], вимагає розвитку щодо конкретних технічних завдань. Це пов’язано з тим що основою процедури, яка дозволяє зменшити область допустимих рішень є апріорна інформація, яка безпосередньо залежить від конкретної ситуації або технічної системи.

**Метою статті** є доведення результатів досліджень щодо розробки методу поетапного зменшення потужності бази перестановочного багатогранника для організації направленого перебору в задачах дискретної оптимізації на прикладі оптимізації структурі функціонально стійкої автоматизованої системи управління повітряним рухом.

## Основна частина

Введемо поняття перестановочного багатогранника структури АСУПР. В математиці перестановочний багатогранник порядку n – це (n–1) – мірний опуклий багатогранник, вкладений в n-мірний евклідовий простір, який є опуклою оболонкою всіх n! точок, які отримані за рахунок перестановок координат вектора (1, 2, 3 ..., n).

Іноді перестановочний багатогранник асоціюють із таким комбінаторним об'єктом, як матроід. У рамках цієї аналогії дамо його нове визначення.

*Визначення 1.* Перестановочний багатогранник – комбінаторний об'єкт, що представляє собою пару $M=(E,\varepsilon)$, де E – кінцева непуста множина елементів багатогранника, а ε – непуста множина його підмножин (які назвемо базами), задовольняючим наступним двом умовам:

B1) ніяка з баз не міститься в іншій базі;

B2) якщо $B_1$ і $B_2$ – бази, то для будь-якого елемента $b\in B_1$ існує такий елемент $c\in B$, що $(B_1\setminus b)\bigcup c$ – також база.

Існують інші еквівалентні визначення багатогранника. Поняття багатогранника відіграє важливу роль у комбінаторній теорії.

База (базис) перестановочного багатогранника – максимальна по включенню незалежна множина елементів багатогранника.

Незалежні множини елементів багатогранника – сімейство ε підмножин елементів з E, що задовольняють наступним аксіомам:

I0). $\varnothing\in\varepsilon$;

I1). Якщо $X\in\varepsilon$ і $Y\subseteq X$, то $Y\in\varepsilon$;

I2). Якщо X, Y – елементи з ε такі, що |X| = |Y| + 1, то існує $X\in X\setminus Y$ такий, що $Y\bigcup\{x\}\in\varepsilon$.

Підмножина з E, що не належить ε, називається *залежною*. Так як I0 вимагає I1, то як систему аксіом можна взяти I1 і I2. Крім того, існують варіанти аксіом I'2, I"2, що еквівалентні I2:

I'2). Якщо $X\in\varepsilon$, $Y\in\varepsilon$ і |Y|<|X|, то в множині X\Y існує елемент x такий, що $Y\bigcup\{x\}\in\varepsilon$.

I"2). Якщо $X\in\varepsilon$, $Y\in\varepsilon$ і |Y|<|X|, то в множині X існує така підмножина Z, що $Y\bigcup Z\in\varepsilon$ і $|Y\bigcup Z|=|X|$.

Рангом M будемо називати число елементів його бази. Поняття рангу багатогранника введено у зв'язку з тим, що будь-які дві бази містять однакову кількість елементів. Дана властивість є результатом багаторазового застосування B2.

*Визначення 2.* Перестановочним багатогранником структури АСУПР називається пара $M = (E, \varepsilon)$, де E – кінцева непуста множина елементів багатогранника, що представляють собою зв'язки між елементами, а $\varepsilon$ – непуста множина його підмножин, названих базами.

Багатогранник структури АСУПР є k-однорідним багатогранником на E, базами якого є всі незалежні між собою підмножини множини E, що містять рівно k елементів.

Звернемо увагу на те, що, якщо d-мірний багатогранник задано канонічною формою

$$A_i x = b_i, \quad A_i \in E_n \quad \forall i \in N_{n-d}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

де $E_n$ – n-мірний дійсний евклідовий простір, то базою (базисом) багатогранника називають сукупність лінійно незалежних стовпців матриці чітких обмежень A [1]. Таким чином, наведене визначення не тільки не суперечить існуючій теорії багатогранників, а і вносить цілком логічний елемент у її розвиток.

Нескладно помітити, що потужність множини допустимих рішень A, елементами якого є варіанти побудови АСУПР $|A| = 2^N$. Отже, область можливих варіантів A – булеан. Як відомо, булеан – окремий випадок такого комбінаторного об'єкту як перестановочний багатогранник. У роботі [2] запропоновано комбінаторний підхід у дискретній оптимізації, що для синтезу складної технічної системи розглядається як сукупність методу часткових порядків, концепції опуклості в частково впорядкованих множинах і схеми побудови серії градієнтних алгоритмів.

Суть методу часткових порядків полягає в тому, що з елементів припустимої множини можливих рішень задачі дискретної оптимізації формується така частково впорядкована множина (у-множина), для якої цільові функції є порядково-випуклими, тобто і функції й їхні градієнти монотонні уздовж ланцюгів, побудованих частковим порядком. Процедуру формування частково впорядкованої множини іноді називають зануренням допустимої множини рішень задачі дискретної оптимізації в частково впорядковану множину. У методі часткових порядків інформація про клас цільових функцій задається у вигляді часткового порядку на припустимій множині A.

Нехай $<$ − інформація про клас F, тоді при рішенні задачі дискретної оптимізації із цільовою функцією із класу F звертання до f-оракула необхідно лише в точках, що є максимальними елементами у-множини A, тому що серед них перебуває хоча б один оптимальний елемент. Тому трудомісткість будь-якого алгоритму Al, що вирішує довільну задачу дискретної оптимізації із цільовою функцією f із класу F, оцінюється потужністю максимальної бази: $\varphi(Al, f) = \left|A^{max}\right|$.

Нагадаємо, що елемент x з A називається максимальним елементом у-множини (A, $<$), якщо не існує іншого елемента у з A, що $x <$ y. Множина всіх максимальних елементів у-множини (A, $<$) називаємо максимальною базою і позначаємо $A_{max}$. Аналогічно вводиться мінімальний елемент і максимальна база $A_{min}$.

Дати конструктивний опис елементів максимальної бази вдається не для кожної задачі дискретної оптимізації. Особливий інтерес представляють задачі, у яких максимальний елемент єдиний. У таких задачах максимальний елемент є оптимальним, і немає необхідності обчислювати цільову функцію в яких-небудь точках.

Побудова максимальної бази $A_{max}$ більшості у-множин (A, $<$) натрапляє на істотні ускладнення. Основні з них пов'язані із проблемою конструктивного опису множини A. Зазвичай добре описана тільки деяка множина H, що містить A. Такою множиною може бути булевий куб, решітка $Z^N$ цілих точок в $R^N$. Функцію g на H, що має властивість $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$, називають g-оракулом (g-оракул може перевірити приналежність множині A будь-якому елементу з H). Трудомісткість алгоритму Al побудови максимальної бази будемо оцінювати числом $\psi(Al, g)$ викликів g-оракула. У-множину (H, $<$) зручно представляти за допомогою діаграми Хассе, у якій точки зображують елементи з H. Причому, якщо $a < b$, то a розташовують під b і з'єднують a і b відрізком. Це з'єднання роблять лише тоді, коли з того, що $z \in H$ і $a < z < b$, слідує, що $a = z$ або $z = b$. У цьому випадку говорять, що елемент b слідує за a, а елемент a безпосередньо передує b.

Отже, метод часткових порядків дозволяє одержати оптимальне або субоптимальне рішення задачі дискретної оптимізації без трудомісткого обчислення цільової функції по відомій апріорній інформації про клас цільової функції через відношення часткового порядку.

Доведемо, що на перестановочному багатограннику градієнтні алгоритми знаходять, як правило, оптимальне рішення. В основі доказу лежить ідея широко відомої для передгеометрії теореми Радо-Едмонса [3].

*Теорема 1.* Якщо $M = \langle E, \varepsilon \rangle$ – перестановочний багатогранник, то для будь-якої вагової функції $\omega$ жадібний алгоритм знаходить незалежну множину X з найбільшою вагою; якщо ж $M = \langle E, \varepsilon \rangle$ – не є багатогранником, то існує така вагова функція $\omega$, що множина X, знайдена жадібним алгоритмом, не буде максимальною.

*Доведення.* Нехай $M = \langle E, \varepsilon \rangle$ перестановочний багатогранник, а $X = \{x_1, ..., x_k\}$ – множина, побудована жадібним алгоритмом. Тоді

$$\omega(x_1) \geq ... \geq \omega(x_k) > 0\ .$$

Відповідно до визначення бази, X – база M. Нехай $Y = \{y_1, ..., y_m\} \in \varepsilon$ – деяка незалежна множина. Маємо $m \leq k$, тому що X – база. Покажемо, що $\omega(y_i) \leq \omega(x_i)$.

Від противного. Нехай $\omega(y_i) > \omega(x_i)$. Розглянемо незалежну множину $A = \{x_1, ..., x_{i-1}\}$ і $B = \{y_1, ..., y_i\}$. Маємо $\exists\ j \leq i\ \{x_1, ..., x_{i-1}, y_j\}$ – незалежна множина. Тоді

$$\omega(y_j) \geq \omega(y_i) > \omega(x_i) \Rightarrow \exists\ p \leq$$
$$\leq i\ \omega(x_i) \geq ... \geq \omega(x_{p-1}) \geq \omega(y_j) \geq \omega(x_p),$$

що суперечить тому, що $x_p$ – елемент із найбільшою вагою, додавання якого до $\{x_1, ..., x_{p-1}\}$ не порушує незалежності. Отже,

$$\forall i\ \omega(y_i) \leq \omega(x_i) \Rightarrow \omega(Y) \leq \omega(X).$$

*Обернено*. Нехай $M = \langle E, \varepsilon \rangle$ не є багатогранником. Якщо порушено умову (I2), тобто $\exists\ A, B\ \ A \subset B \in \varepsilon$, але $A \notin \varepsilon$, тоді визначимо функцію $\omega$ в такий спосіб:

$$\omega(e) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } e \in A; \\ 0, & \text{якщо } e \in E \setminus A. \end{cases}$$

Тоді $A \notin \varepsilon \Rightarrow A \not\subset X \Rightarrow |X| < |A|$. Якщо ж умова (I2) здійсненна, але порушена умова (I3), то $\exists\ A, B\ |A| = k\ \&\ |B| = k+1$ і $\forall\ e \in B \setminus A\ \ A \cup \{e\}$ – залежне. Нехай $p := |A \cap B|$, тоді $p < k$. Виберемо число ε так, що $0 < \varepsilon < 1/(k-p)$.

Визначимо функцію ω в такий спосіб:

$$\omega(e) = \begin{cases} 1+\varepsilon, & \text{якщо } e \in A, \\ 1, & \text{якщо } e \in B \setminus A, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Помітимо, що при таких вагах жадібний алгоритм вибере спочатку всі елементи з A і відкине елементи B/A. В результаті буде обрано множину X, вага якої менше ваги множини B. Дійсно,

$$\omega(X) = \omega(A) = k(1+\varepsilon) = (k-p)(1+\varepsilon) + p(1+\varepsilon) \leq (k-p) \times$$
$$(1 + 1/(k-p)) + p(1+\varepsilon) = (k-p+1) + p(1+\varepsilon) = \omega(B).$$

Що й було потрібно довести.

Той факт, що множина допустимих рішень ототожнюється з перестановочним багатогранником, означає, що для рішення поставленої екстремальної задачі можна застосовувати жадібний алгоритм, однак із цього не слідує, що не може існувати ще більш ефективного алгоритму. З іншого боку, якщо (E, ε) не є багатогранником, то це ще не означає, що жадібний алгоритм не знайде правильного рішення, все залежить від властивості конкретної функції ω [3].

Жадібні алгоритми і їхні властивості досліджені дуже добре та їхнє знання при рішенні оптимізаційних задач важливо. Якщо вдається звести подібну задачу до того, що множина допустимих рішень є перестановочним багатогранником, то в більшості випадків варто застосовувати жадібний алгоритм, оскільки він досить ефективний у практичному змісті. Якщо ж виявиться навпаки і множина можливих варіантів не утворить багатогранник, тоді, швидше за все, градієнтний алгоритм не буде ефективний.

Нехай є кінцева множина $Y = E, |E| = n$, вагова функція $\omega : E \to R_+$ і сімейство $\varepsilon \subset 2^E$.

Розглянемо задачу: знайти $X \in \varepsilon$, за умови $\omega(X) = \max\limits_{Y \in t} \omega(Y)$, де $\omega(Z) := \sum\limits_{e \in Z \subset E} \omega(e)$. Інакше кажучи, необхідно відшукати в зазначеному сімействі підмножину найбільшої ваги.

Нехай $\omega(e_1) \geq ... \geq \omega(e_n) > 0$, тоді жадібний алгоритм має вигляд:

вхід: множина $E = \{e_1, ..., e_n\}$, сімейство його підмножин $\varepsilon$ і вагова функція $\omega$. Множина E впорядкована в порядку убування ваг елементів.

Вхід: множина X.

X: = ∅ {початкова множина X порожньо}.

for i from 1 to n do.

if $X \cup \{e_i\} \in \varepsilon$ then.

$X := X \cup \{e_i\}$ {додаємо в X перший підходящий елемент}.

end if end for.

Очевидно, що при побудові остаточна множина $X \in \varepsilon$. Також очевидно, що жадібний алгоритм є надзвичайно ефективним і лінійним, не вважаючи витрат на сортування множини E і перевірку незалежності $X \cup \{e_i\} \in \varepsilon$. Основне питання полягає в тому, у яких випадках жадібний алгоритм дійсно вирішує поставлену задачу [3].

Ідея застосування градієнтних алгоритмів при оптимальному використанні надмірності АСУПР заснована на особливостях функціонування системи. Тому як градієнт виступає відношення мажоризації, дійсно, для такої системи збільшення кількості елементів (зв'язків між елементами) однозначно веде до росту (або не до зниження) значення показника функціональної стійкості.

Пропонується пошук рішення здійснювати за принципом послідовного зменшення кількості надлишкових елементів і зв'язків структури для забезпечення відновлення максимальних функціональних можливостей при мінімальному використанні ресурсу (надмірності) (рис. 1). На всіх етапах занурення множини допустимих рішень в частково впорядковану множину здійснюється на основі відношення мажоризації. Спочатку формується *k*-однорідний перестановочний багатогранник структури автоматизованої системи управління повітряним рухом з елементів і зв'язків, множина баз, яких є множиною всіх можливих структур з максимальної кількості елементів і зв'язків $M = (E, \varepsilon);\ A \subseteq \varepsilon;\ \rho(A) = |A|$.

Далі застосування *greedy*-алгоритму дозволяє знайти найкраще рішення, для якого розраховується значення показника функціональної стійкості. Слід зазначити, що перебір варіантів здійснюється по всіх видах надмірності

$$\alpha^* = \arg\max P(\alpha)\ \forall\alpha \in A_1 \text{ при } P(\alpha^*) \geq P_{ЗАД}.$$

На наступному етапі відбувається зменшення потужності бази багатогранника на одиницю

$$M_{-1} = (E\backslash e, \varepsilon_{-1});\ A_{-1} \subseteq \varepsilon_{-1};\ \rho(A_{-1}) = |A_{-1}|;\ \rho(A)\text{-}\rho(A_{-1}) = 1$$

і попередня процедура повторюється із застосуванням градієнтного алгоритму і розрахунком значення показника функціональної стійкості. Далі виконується по показнику функціональної стійкості порівняння знайденого рішення із заданим рівнем функціональної стійкості.

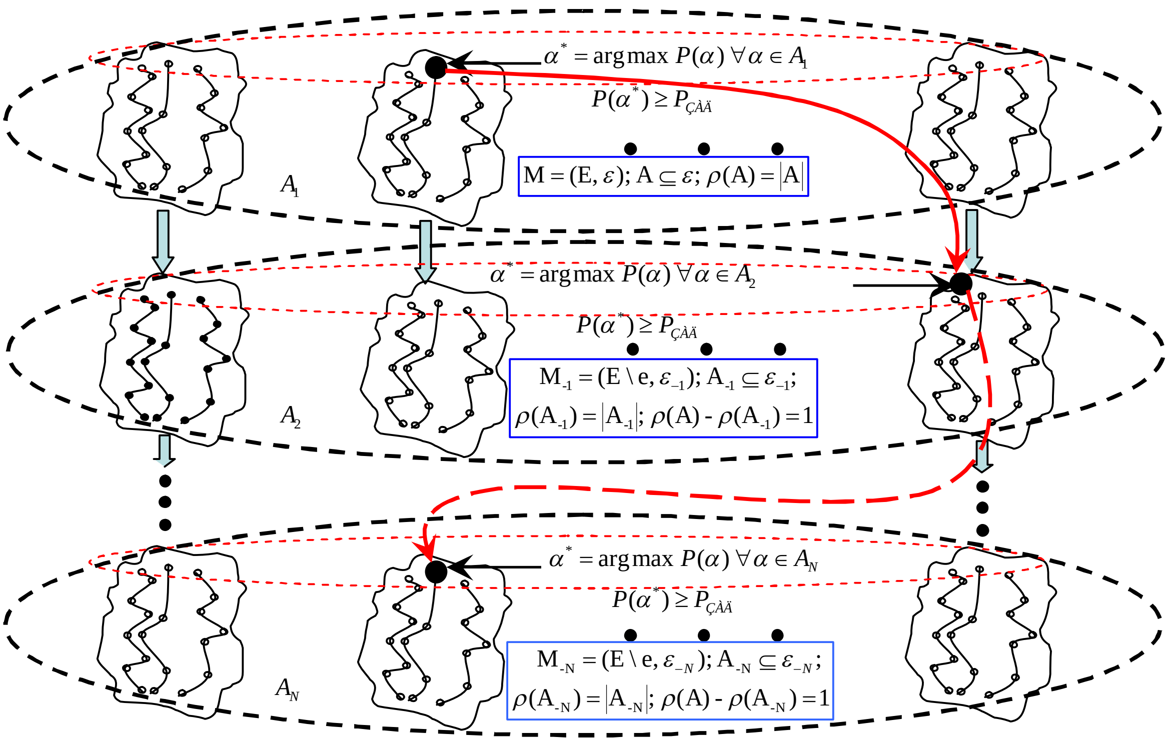


Рис.1. Схема пошуку рішення за методом поетапного зменшення потужності бази (базису) перестановочного багатогранника

Для рішення, що задовольняє за показником ефективності, послідовно перевіряються варіанти, включені за допомогою відношення порядку в даний варіант із метою пошуку рішення з мінімальним застосуванням надмірності і заданим рівнем функціональної стійкості. Процедура поетапного зменшення потужності бази перестановочного багатогранника буде тривати доти, поки рішення не вийде за межі функціональної стійкості. У цьому випадку оптимальним буде рішення, отримане на попередньому етапі $\alpha^* = \arg\max P(\alpha)\ \forall\alpha \in A$.

Даний метод класифікується як точний метод дискретної оптимізації, а саме градієнтний метод спрямованого перебору.

**Оцінка ефективності розробленого методу.**

Ефективність розробленого методу оцінимо за кількістю звернень до f-оракула і визначимо виграш у порівнянні з повним перебором.

Так як при повному переборі число звертань до цільової функції для алгоритму $B_П$ дорівнює потужності множини можливих рішень $\varphi(B_П, F) = |A|$, то при булевих змінних $\varphi(B_П, F) = 2^N$; де N − кількість можливих елементів у АСУПР.

Нескладно помітити, що виграш $\Delta$ при застосуванні розробленого алгоритму $B_P$ у звертанні до f-оракула в порівнянні з алгоритмом $B_П$ повного перебору дорівнює

$$\Delta = \varphi(B_П, F) - \varphi(B_P, F) \approx k\left(2^N - \frac{N!}{m!(N-m)!}\right),$$

де k − коефіцієнт пропорційності; m – кількість типів надмірності в АСУПР.

Результати моделювання виграшу при різних варіаціях N, m показані на графіках (рис. 2 − 4) та в табл. 1. Вони підтверджують ефективність розробленого методу, а також збіжність отриманих результатів з відповідними, відомими раніше, результата- ми дискретної оптимізації.

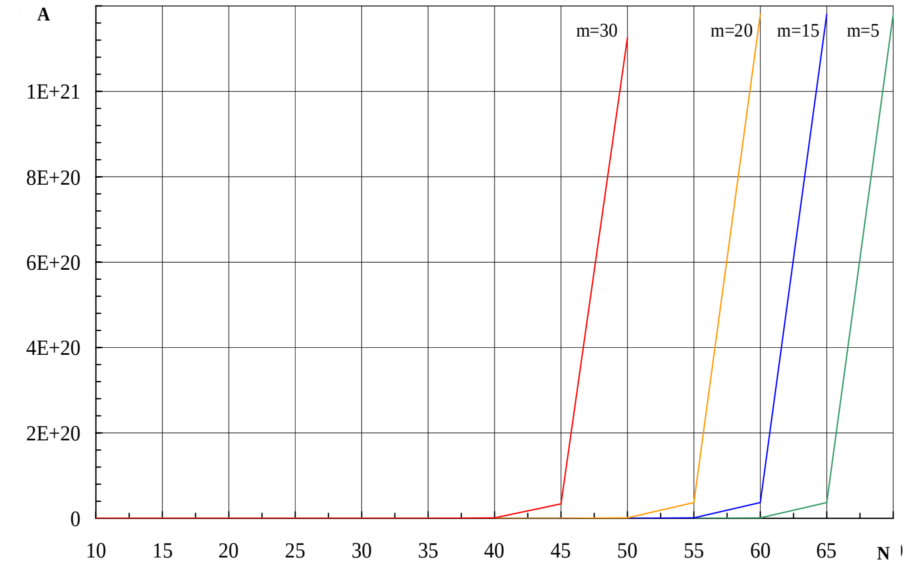


Рис. 2. Залежність виграшу від максимально можливої кількості елементів у структурі АСУПР

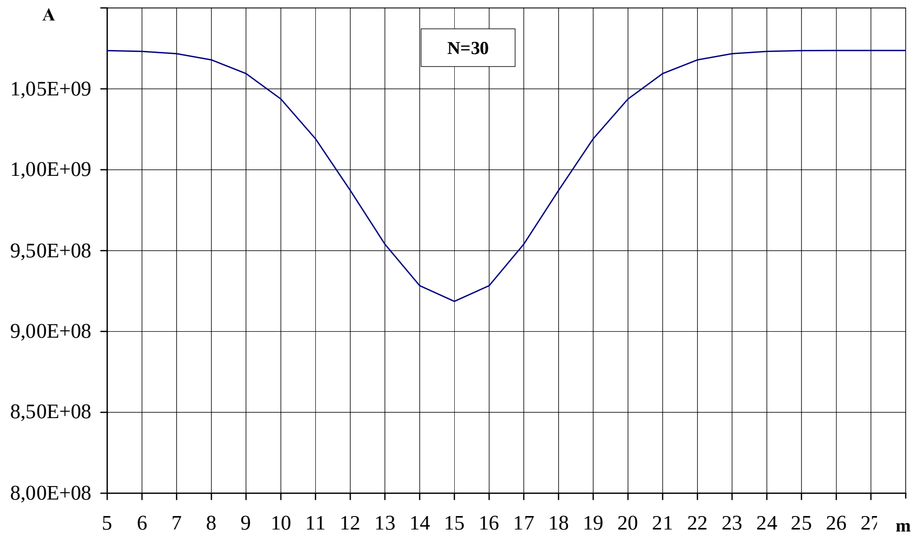


Рис. 3. Залежність виграшу від кількості типів надмірності в структурі АСУПР при N=30

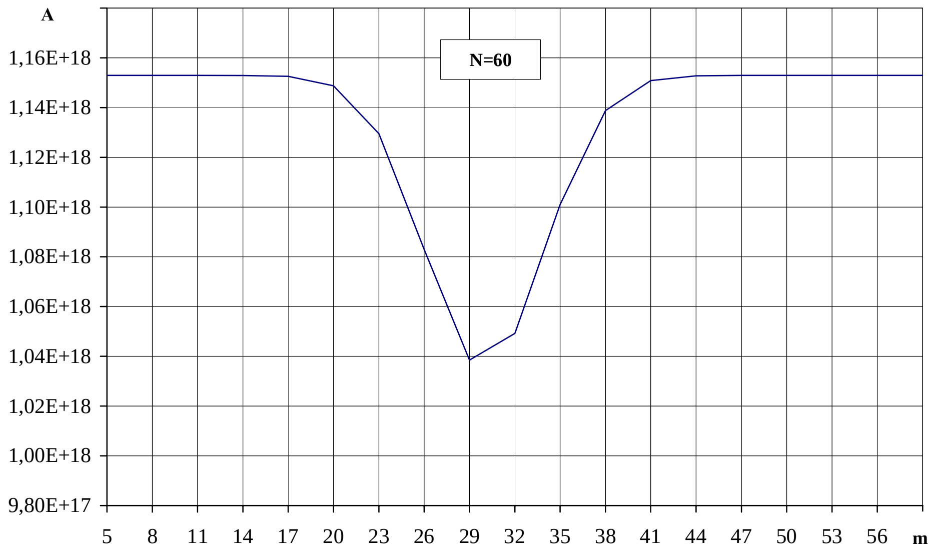

Рис. 4. Залежність виграшу від кількості типів надмірності в структурі АСУПР при N=60

Таблиця 1

Час реалізації методу на комп'ютері з тактовою частотою 2,00 Ггц

| N | Час повного перебору (m=5), с | Час реалізації розробленого методу (с) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | m=5 | m=6 | m=7 |
| 30 | **0,5** | 0,00007 | 0,0003 | 0,001 |
| 40 | 549,7 | 0,0003 | 0,0019 | 0,0093 |
| 50 | 6,5 доби | 0,001 | 0,0079 | 0,0499 |
| 60 | 18,3 років | 0,0027 | 0,0250 | 0,1931 |
| 70 | не вирішується | 0,006 | 0,0655 | **0,5993** |
| 80 | не вирішується | 0,012 | 0,1502 | 1,5883 |
| 90 | не вирішується | 0,021 | 0,3113 | 3,7356 |
| 100 | не вирішується | 0,037 | **0,596** | 8,0037 |
| 120 | не вирішується | 0,095 | 1,826 | 29,7437 |
| 140 | не вирішується | 0,2 | 4,6908 | 89,7965 |
| 160 | не вирішується | 0,41 | 10,5966 | не вирішується |
| 170 | не вирішується | **0,6** | 15,3317 | не вирішується |

## Висновки

Таким чином, запропоновано метод поетапного зменшення потужності бази (базиса) перестановочного багатогранника, який класифікується як точний метод дискретної оптимізації, побудований за принципом направленого або неявного перебору. В основі методу є науково-обґрунтоване положення про те, що область допустимих рішень асоціюється з таким комбінаторним об’єктом, як перестановочний багатогранник, та про те, що максимальна за включенням незалежна підмножина множини допустимих рішень, тобто база (базис) перестаночного багатогранника, відображає мінімально-необхідний склад системи. Запропонований метод дозволив розробити методику оптимального використання надмірності для забезпечення функціональної стійкості автоматизованої системи управління повітряним рухом.

## Список літератури


1. *Емеличев В.А. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.А. Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 344 с.*
2. *Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации / М.М. Ковалев. – Минск: Изд-во «Университетское», 1987. – 222 с.*
3. *Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – 2-е изд. / Ф.А. Новиков. – СПб.: «Питер», 2005. – 364 с.*


*Надійшла до редколегії 15.03.2011*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Ю.В. Кравченко, Національний університет оборони України, Київ.

### МЕТОД ПОЭТАПНОГО УМЕНЬШЕНИЯ МОЩНОСТИ БАЗЫ ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ НАПРАВЛЕННОГО ПЕРЕБОРА В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

С.Н. Неделько

*Предложен метод поэтапного уменьшения мощности базы перестановочного многогранника для организации направленного перебора в задачах дискретной оптимизации на примере оптимизации структуры функционально устойчивой автоматизированной системы управления воздушным движением.*

***Ключевые слова:*** *функциональная устойчивость, автоматизированная система управления воздушным движением.*

### THE METHOD OF STAGE-BY-STAGE DIMINISHING OF POWER OF BASE OF PERMUTABLE POLYHEDRON FOR ORGANIZATION OF THE DIRECTED SURPLUS IN TASKS OF DISCRETE OPTIMIZATION

S.N. Nedilko

*The article highlights the method of the stage-by-stage diminishing of power of base of permutable polyhedron for organization of the directed surplus in the tasks of discrete optimization on the example of optimization of structure functionally steady CAS of air traffic control.*

***Keywords:*** *functional stability, air traffic control system.*