УДК 355

В.В. Шулежко

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТІ ВАРІАНТІВ СТРУКТУРИ СИСТЕМИ ЗЕНІТНОГО РАКЕТНОГО ПРИКРИТТЯ

У статті розроблена математична модель визначення області допустимих варіантів структури системи зенітного ракетного прикриття.

Ключові слова: *структура системи зенітного ракетного прикриття, ефективність бойових дій, теорія ігор.*

Вступ

Постановка проблеми. Зенітні ракетні війська є основною вогневою силою в системі протиповітряної оборони. Угруповання зенітних ракетних військ виконують бойові завдання у мирний час шляхом бойового чергування та здійснення зенітного ракетного прикриття важливих державних об'єктів та угруповань військ і сил, у воєнний час (бойових дій) у системі прикриття, яка створюється військовими частинами та підрозділами розгорнутими в бойовий порядок. Виконання завдань з прикриття об'єктів і військ залежить від варіантів побудови структури системи зенітного ракетного прикриття. Під структурою системи ЗРП розуміється взаємне розташування та взаємозв'язок її основних елементів, що створюють систему вогню, систему розвідку, систему управління [10]. В умовах невизначеності варіанту розподілу ЗПН за азимутом, висотами та швидкостями польоту однозначно визначити структуру системи зенітного ракетного прикриття неможливо. Разом з тим є можливість сформулювати в ігровій формі та визначити область допустимих варіантів структури системи зенітного ракетного прикриття, що в середньому забезпечує максимальний виграш незалежно від варіанту побудови бойового порядку противника.

Аналіз літератури. Проведений аналіз літератури показав, що в [1] формулюється задача в ігровій формі та визначається найбільш доцільний варіант розташування зенітних ракетних підрозділів відносно об'єкта, що в середньому забезпечує максимальний виграш незалежно від варіанту побудови бойового порядку противника. В [2] розглянуто порядок вирішення оптимізаційної задачі вибору варіантів прийняття рішення, в основі якого лежить принцип раціональності теорії ігор.Таким чином, актуальності набуває питання, пов'язане з розробкою моделі визначення області варіантів структури системи зенітного ракетного прикриття за критерієм максимальної ефективності бойових дій на основі теорії ігор.

Мета статті. Дана стаття присвячена розробці математичної моделі визначення області варіантів структури системи зенітного ракетного прикриття важливих державних об'єктів та угруповань військ і сил.

Основна частина

Головними вимогами до системи зенітного ракетного прикриття важливих державних об'єктів та угруповань військ і сил є її ефективність і стійкість.

Ефективність функціонування системи зенітного ракетного прикриття важливих державних об'єктів та угруповань військ і сил характеризує ступінь її відповідності завданням, що вирішуються у ході ведення бойових дій, та визначається можливостями системи вогню, розвідки й управління, що реалізується в конкретних умовах обстановки.

Стійкість системи зенітного ракетного прикриття важливих державних об'єктів та угруповань військ і сил – це її здатність зберігати свою ефективність в умовах бойової обстановки, що досягається живучістю сил і засобів, завадостійкістю систем вогню, розвідки й управління, високою моральнопсихологічною підготовкою особового складу, мобільністю прикриття, надійністю озброєння.

Ефективність функціонування системи ЗРП визначається її призначенням досягати такої якості зенітного ракетного прикриття важливих державних об'єктів та угруповань військ і сил, яка дозволяє реалізувати визначену ефективність бойових дій.

Дослідження [1, 3 – 5] показують, що ефективність функціонування системи зенітного ракетного прикриття важливих державних об'єктів та угруповань військ і сил залежить від її структури і оцінюється за допомогою двох груп показників:

ефективності бойових дій ЗРВ;

ефективності та стійкості функціонування систем зенітного ракетного вогню, управління, забезпечення (розвідки).

Ефективність бойових дій ЗРВ – це ступінь досягнення мети бойових дій угрупованням ЗРВ, з якою ці дії ведуться.

Для оцінки ефективності бойових дій ЗРВ доцільно використовувати такі показники [1]:

загальний показник – ймовірність виконання бойового завдання ЗРВ;

розрахункова ефективність бойових дій ЗРВ та ефективність, яка вимагається;

математичне сподівання кількості знищених цілей;

математичне сподівання кількості втрат сил і засобів угруповання ЗРВ, визначається за результатами моделювання бойових дій ЗРВ з використанням моделей і задач, які враховують економічні витрати матеріальних засобів та інших ресурсів, втрати особового складу й озброєння та військової техніки ЗРВ;

математичне сподівання кількості об'єктів прикриття, які збереглися з імовірністю не менше від заданої, визначається з оцінки об'єктів прикриття за показниками важливості об'єктів прикриття (зенітного ракетно-артилерійського, винищувального), їх геометричних розмірів і ступеня пошкодження;

математичне сподівання кількості напрямків, на яких забезпечується кількість стрільб (щільність вогню) не менше від заданої.

Під час оцінки ефективності бойових дій за способами дій угруповання ЗРВ доцільно використовувати всі показники ефективності зенітного ракетного прикриття. Вибір з них основного показника є складним процесом і залежить від бойового завдання, яке передбачається, від дій ЗПН в ударах і зенітних ракетних підрозділів, а також від розподілу ресурсів ЗПН за завданнями удару.

При такому підході оцінка ефективності функціонування системи ЗРП при зменшенні кількості боєздатного озброєння повинна базуватися на визначенні максимального ефекту ведення бойових дій частинами (підрозділами) ЗРВ та мінімізації очікуваного зниження ефективності їх бойових дій.

Для формулювання задачі теорії ігор визначимося, що сторона А (угруповання ЗРВ) веде бойові дії зі стороною В (угруповання ЗПН). Поінформованість сторін про можливий замисел дій іншої сторони власне визначимо як ранг рефлексії:

0 – сторони не знають замисел дій один одного;

1 (2) – сторона А (В) знають замисел дій сторони В (А);

3 – сторони знають замисел дій один одного.

Гра називається грою з нульовою сумою, якщо один гравець виграє рівно стільки, скільки програє інший, а саме сума виграшів сторін дорівнює нулю.

Будемо розглядати саме таку гру, тому що при аналізі достатньо розглядати виграш одного з гравців (сторони А) та встановимо функцію:

$$q(x, y) = P_{\text{бз } xy}.$$

Задача буде полягати у виробленні рекомендацій для сторони А як виграти у сторони В з мінімальними втратами.

Тоді для рангу рефлексії 0 та 3 можна сформулювати задачу таким чином.

Знайти одну чисту стратегію із множини X = {x}, щоб величина виграшу, який визначається матрицею $\|P_{\text{бз}}\|$ і стратегією противника, була максимальною:

$$\max_{x} q(x, y) = q1(x)\,,$$

де q1(x) – величина виграшу сторони А;

$$\min_{y} q(x, y) = q2(x)\,,$$

де q2(x) – величина виграшу сторони В.

Сформулюємо задачу для рангу рефлексії 1 та 2.

Знайти область допустимих стратегій із множини X = {x}, щоб величина виграшу, який визначається матрицею $\|P_{\text{бз}}\|$ при різних стратегіях іншого гравця, забезпечувала максимальний виграш:

$$\max_{x} \min_{y} q(x, y) = \max q1(x) = q(x^{*})\,,$$

де x^{*} – максимінна стратегія сторони А.

Розрахунок значень матриці $\|P_{\text{бз}}\|$ буде здійснюватись за формулою Лапласа:

$$P_{\text{бз}} = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{M - M^{*}}{\sigma}\right),$$

де $P_{\text{бз}}$ – ймовірність виконання бойового завдання; М – математичне сподівання значення показника ефективності за результатами моделювання бойових дій або інших розрахунків; M^{*} – значення оцінки показника ефективності бойових дій; σ – середньоквадратичне відхилення показника ефективності бойових дій.

При використанні значень різних часткових показників ефективності бойових дій ЗРВ ймовірність виконання бойового завдання розраховується за формулою [9]:

$$P_{\text{бз}} = \frac{1}{2} + \prod_{g=1}^{G}\left[\Phi\left(\frac{M_g - M_g^{*}}{\sigma_g}\right)\right], \qquad (1)$$

де M_g – математичне сподівання значення g-го показника ефективності за результатами моделювання бойових дій; $M^{*}{}_{g}$ – значення оцінки g-го показника ефективності бойових дій; σ – середнє квадратичне відхилення значення g-го показника ефективності бойових дій.

Для вирішення задачі потрібно врахування таких факторів і вхідної інформації [1]:

тактико-технічні характеристики ЗРК (дальня межа зони ураження, ближня межа зони ураження, верхня межа зони ураження, нижня межа зони ураження; максимальна дальність виявлення; граничний курсовий кут; імовірність ураження цілі ЗРК; граничний параметра руху цілі, при якому ЗРК здатний знищувати ціль; максимальна швидкість польоту цілі, при якій ЗРК здатний знищувати ціль з заданою імовірністю; середня швидкість польоту зенітної керованої ракети; робітний час зрдн; час циклу стрільби ЗРК; час, у плині якого ЗРК здатний супроводжувати ціль при відсутності радіовидимості; висота оптичного центра антени РПН);

параметри польоту ЗПН (висота, швидкість, азимут);

бойовий склад угруповання ЗРВ (кількість зрдн та ін);

координати позицій, на яких можливо розміщення ЗРК;

координати об'єктів, що прикриваються;

реалізована дальня межа зон виявлення і ураження за напрямками удару;

кількість стрільб, що може виконати угруповання ЗРВ при нанесенні удару по об'єкту з напрямку, щільність вогню до заданого рубежу, середня ефективність стрільб.

Нехай противник може застосувати деякий цілком певний набір висот і швидкостей польоту ЗПН з певного напрямку, що породжують цілком певні стратегії сторони B: $b_1, b_2, \ldots, b_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Визначимо в заданому позиційному районі для угруповання ЗРВ у складі m вогневих елементів (зрдн, зрбатр, зрабатр, зрвід) ($m \in M$) позиції з координатами x_j, y_j, розміщення на яких вогневих елементів буде формувати варіанти структури системи ЗРП, що породжують стратегії сторони A: $a_1, a_2, \ldots, a_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Для кожного сполучення i-го варіанту нанесення удару та j-го варіанту побудови структури системи зенітного ракетного прикриття розрахуємо ймовірність виконання бойового завдання $P_{бз\,ij}$ згідно з формулою (1).

Таким чином, одержимо матрицю $\left\| P_{бз\,ij} \right\|$,

де j – порядковий номер варіанта структури системи зенітного ракетного прикриття важливих державних об'єктів та угруповань військ і сил; i – номер варіанта дій угруповання ЗПН; $P_{бз\,ij}$ – значення ймовірності виконання бойового завдання для j-го варіанта структури системи ЗРП при нанесенні удару угрупованням ЗПН за i-тим варіантом.

Згідно основної теореми теорії ігор, кожна кінцева гра має, принаймні, одне рішення (можливо в області змішаних варіантів). Виграш, одержуваний у результаті вирішення гри, називається ціною гри (ν). З теореми [6] доведено, що шукана ціна гри знаходиться між її нижньою та верхньою ціною (межею) гри:

$$\alpha \le \nu \le \beta,$$

$$\alpha = \max_j \min_i P_{бз\,ij},$$

$$\beta = \min_i \max_j P_{бз\,ij}.$$

Здійснюючи пошук «мінімаксу» – мінімізація максимального виграшу для противника і «максиміну» – максимізація мінімального програшу для своїх військ [7, 8], можна знайти нижню і верхню ціну гри для показника ефективності бойових дій угрупованням ЗРВ.

Припустимо, що в угрупованні ЗРВ застосовується набір допустимих варіантів структури системи ЗРП S_A^*, а противник діє за варіантом B_j. Тоді середня ефективність бойових дій буде дорівнювати:

$$P_{бз\,j} = g_1 P_{бз\,1j} + g_2 P_{бз\,2j} + \ldots + g_m P_{бз\,nj}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

де g_1, g_2, …, g_m – ймовірність застосування чистих стратегій сторони A.

Набір допустимих варіантів структури системи ЗРП S_A^* має таку властивість, що при любому варіанті застосування ЗПН противника забезпечується ефективність бойових дій угруповання ЗРВ не менше ν; значить любе з чисел $P_{бз\,j}$ не може бути менше ν. Отримуємо ряд умов:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 P_{бз\,11} + g_2 P_{бз\,21} + \ldots + g_m P_{бз\,n1} \ge \nu, \\ g_1 P_{бз\,12} + g_2 P_{бз\,22} + \ldots + g_m P_{бз\,n2} \ge \nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1 P_{бз\,1m} + g_2 P_{бз\,2m} + \ldots + g_m P_{бз\,nm} \ge \nu. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Розділимо нерівність (2) на додатну величину ν і введемо позначення:

$$x_1 = \frac{g_1}{\nu},\ x_2 = \frac{g_2}{\nu},\ \ldots,\ x_m = \frac{g_m}{\nu}. \qquad (3)$$

Тоді умова (2) запишеться у вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} P_{бз\,11} x_1 + P_{бз\,21} x_2 + \ldots + P_{бз\,n1} x_m \ge 1, \\ P_{бз\,12} x_1 + P_{бз\,22} x_2 + \ldots + P_{бз\,n2} x_m \ge 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{бз\,1m} x_1 + P_{бз\,2m} x_2 + \ldots + P_{бз\,nm} x_m \ge 1, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

де x_1, x_2, …, x_m – невід'ємні змінні.

В силу (3) і того, що $g_1 + g_2 + \ldots + g_m = 1$, змінні x_1, x_2, …, x_m задовольняють умові

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{\nu}. \qquad (5)$$

Потрібно щоб ефективність бойових дій була максимально можливою; явно, при цьому права частина (5) приймає мінімальне значення.

Таким чином, задача знаходження набору допустимих варіантів структури системи ЗРП зводиться до такої математичної задачі.

Визначити додатні значення змінних x_1, x_2, …, x_m так, щоб вони задовольняли лінійним обмеженням (4) і при цьому їх лінійна функція

$$L = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

оберталась в мінімум.

Дана задача є типовою задачею лінійного програмування. Знаходження рішення задачі лінійного програмування складається з двох етапів [6]:

1) знаходження опорного рішення;

2) знаходження оптимального рішення, що мінімізує лінійну функцію L.

Якщо число змінних в рівняннях (4) на два більше ніж число незалежних рівнянь, то можливо два з них вибрати в якості вільних, допустимо x_1 і x_2, а решту зробити базисними і виразити їх через вільні. Тоді отримаємо рівняння, а так, як всі змінні повинні бути невід'ємними, то повинні виконуватись умови:

$$x_3 = P_{бз11}x_1 + P_{бз21}x_2 - 1 \ge 0,$$

$$x_4 = P_{бз12}x_1 + P_{бз22}x_2 - 1 \ge 0,$$

....

$$x_m = P_{бз1m}x_1 + P_{бз2m}x_2 - 1 \ge 0.$$

Зобразимо дані умови геометрично і отримаємо область допустимих варіантів структури системи ЗРП (рис. 1).

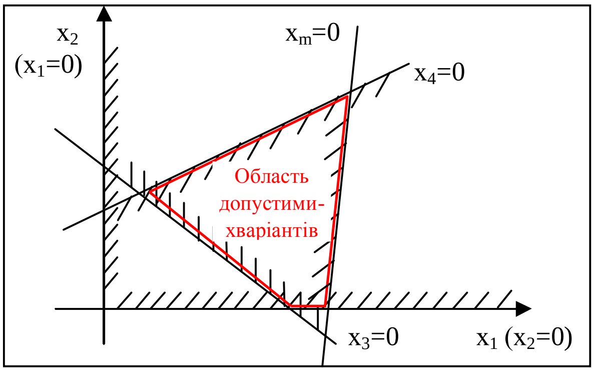

Рис. 1. Область допустимих варіантів

Але якщо число вільних змінних буде більше трьох, то геометрична інтерпретація знаходження рішення виведе нас за область трьохвимірного простору і втратить свою наглядність. Тоді для знаходження рішення задачі лінійного програмування будемо застосовувати найбільш універсальний симплекс-метод.

Для цього перейдемо від умов-нерівності (4) до умов-рівності:

$$y_1 = -1 - (-P_{бз11}x_1 - P_{бз21}x_2 - \ldots - P_{бзn1}x_m),$$

$$y_2 = -1 - (-P_{бз12}x_1 - P_{бз22}x_2 - \ldots - P_{бзn2}x_m),$$

....

$$y_m = -1 - (-P_{бз1m}x_1 - P_{бз2m}x_2 - \ldots - P_{бзnm}x_m).$$

Заповнимо симплекс-таблицю (табл. 1):

Таблиця 1

Симплекс-таблиця

	Вільний член	x_1	x_2	…	x_m
y_1	–1	$P_{бз\ 11}$	$P_{бз\ 21}$	…	$P_{бз\ n1}$
y_2	–1	$P_{бз\ 12}$	$P_{бз\ 22}$	…	$P_{бз\ n2}$
…	…	…	…	…	…
y_m	–1	$P_{бз\ 1m}$	$P_{бз\ 2m}$	…	$P_{бз\ nm}$

Знаходження рішення задачі лінійного програмування зручно виконувати за допомогою табличного алгоритму заміни базисних змінних. При цьому необхідно виконати такі операції [6]:

1. Виділити в таблиці елемент $P_{бз}$, що розв'язується. Вирахувати його зворотну величину $\lambda = \frac{1}{P_{бз}}$ і записати в нижню частину тієї ж комірки (в правому нижньому куту).

2. Всі елементи рядка, що розв'язується (крім самого $P_{бз}$) помножити на λ; результат записати в нижню частину тієї ж комірки.

3. Всі елементи стовпця, що розв'язується, (крім самого $P_{бз}$) помножити на – λ; результат записати в нижню частину тієї ж комірки.

4. Підкреслити (або виділити іншим способом) в рядку, що розв'язується, всі верхні числа (колишні елементи), за винятком комірки самого елемента, що розв'язується, а в стовпці, що розв'язується, – всі нижні числа (нові елементи), за винятком самого елемента, що розв'язується.

5. Для кожного з елементів, які не належать ні до рядка, що розв'язується, ні до стовпця, що розв'язується, записати в нижню частину комірки добуток виділених чисел, які стоять у тому ж рядку і в тому ж стовпці, що і даний елемент.

6. Переписати таблицю, замінив:

x_j на y_i;

елементи рядка і стовпця, що розв'язується, числами, які стоять в нижній частині тієї ж комірки;

кожний з решти елементів – сумою чисел, які стоять у верхній і нижній частинах тієї ж комірки.

Вирішивши задачу знайдемо область допустимих змішаних стратегій для сторони А, яка буде дорівнювати:

$$g_j^* = \frac{x_j^*}{L^*}, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

При цьому значення гри (максимальний середній виграш сторони А) дорівнює величині

$$\nu = \frac{1}{L^*}.$$

Висновки

Таким чином, одержана антагоністична матрична гра двох гравців з нульовою сумою. Її рішення визначає ступінь доцільності вибору того чи іншого варіанту, які будуть складати область допустимих варіантів структури системи зенітного ракетного прикриття при умові, що противник діє найкращим для себе способом.

Список літератури

1. Синтез адаптивних структур систем зенітного ракетно-артилерійського прикриття об'єктів і військ та оцінка їх ефективності (теорія, практика, тенденції розвитку): монографія / А.Я. Торопчін, І.О. Кириченко, М.О. Єрмошин та ін. – Х.: ХУПС, 2006. – 348 с.

2. Теорія прийняття рішень органами військового управління: монографія / В.І. Ткаченко, Є.Б. Смірнов та ін.; за ред. В.І. Ткаченка, Є.Б. Смірнова. – Х.: ХУПС, 2008. – 545 с.

3. Моделювання бойових дій військ (сил) протиповітряної оборони та інформаційне забезпечення процесів управління ними (теорія, практика, історія розвитку: монографія / В.П. Городнов, Г.А. Дробаха, М.О. Єрмошин, Є.Б. Смірнов, В.І. Ткаченко. – Х.: ХВУ, 2004. – 300 с.

4. Єрмошин М.О. Оцінка ефективності бойових дій зенітних ракетних військ: навчальний посібник / М.О. Єрмошин, Г.А. Дробаха. – Х.: ХВУ, 2004. – 78 с.

5. Єрмошин М.О. Аеродинамічні цілі зенітних ракетних військ / М.О. Єрмошин, В.М. Федай. – Х.: ХВУ, 2003. – 284 с.

6. Вентцель Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М.: Сов. радио, 1972. – 550 с.

7. Новиков Д.А. Прикладные модели информационного управления/ Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.

8. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами / Д.А. Новиков. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.

9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. – 463 с.

10. Особливість понять зенітного ракетного призначення й умовних позначень / В.В. Шулежко, М.М. Романюк, Є.І. Ряполов, А.О. Пожидаєв // Системи озброєння та військова техніка. – Х.: ХУ ПС, 2011. - Вип. 1 (25). – С. 218-221.

Надійшла до редколегії 14.11.2011

Рецензент: д-р військ. наук, проф. Г.А. Дробаха, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТИ ВАРИАНТОВ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ ЗЕНИТНОГО РАКЕТНОГО ПРИКРЫТИЯ

В.В. Шулежко

В статье разработана математическая модель определения области допустимых вариантов структуры системы зенитного ракетного прикрытия.

***Ключевые слова:** структура системы зенитного ракетного прикрытия, эффективность боевых действий, теория игр.*

MATHEMATICAL MODEL OF DEFINITION OF AREA OF VARIANTS STRUCTURES OF SYSTEM OF ANTIAIRCRAFT ROCKET COVER

V.V. Shulezhko

In article the mathematical model of definition of area of admissible variants of structure of system of antiaircraft rocket cover is developed.

***Keywords:** structure of system of antiaircraft rocket cover, efficiency of operations, the theory of games.*