УДК 531/534:001.8

О.О. Юрченко

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

РОЗРАХУНОК ЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНИХ ЖОРСТКОСТЕЙ

Стаття присвячена розвитку методів дослідження коливань лінійних механічних систем на основі метода динамічних жорсткостей. Розглянута система з великою кількістю ступенів вільності під дією гармонічних обурюючих сил.

Ключові слова: *механічна система, динамічна жорсткість, дискретна система, крутильні коливання.*

Вступ

В роботі [1] розглядались лінійні коливання механічних систем з малим числом ступенів вільності і визначались діапазони проявлення резонансних властивостей цих систем, а також вплив тертя на частоти вимушених гармонічних сил.

В реальних умовах при інженерних розрахунках деяких силових елементів літальних апаратів, його механізмів або агрегатів, їх можна розглядати як дискретні системи з великою кількістю ступенів вільності. Таку спрощену розрахункову схему можна розглядати як сукупність пружних тіл, яка становить систему з розподіленими масовими та жорсткостними параметрами. В загальному випадку система має велику кількість ступенів вільності, дослідження якої засновано на теорії диференціальних рівнянь. До таких схем можна привести задачі вивчення крутильних коливань валів повітряних та гребних гвинтів, електричних машин та дизелів [2].

Таким чином, виникає задача, яка пов'язана із складанням системи диференціальних рівнянь для вивчення коливальних рухів механічних систем з n ступенями вільності.

Основна частина

Розглянемо метод складання диференціальних рівнянь руху однозв'язної механічної системи. Під однозв'язного будемо розуміти систему, при визначені якої дію відкинутої частки можна замінити одним силовим фактором.

Виділяючи із системи точки на межі елементів, будемо розташовувати їх безпосередньо ліворуч і праворуч від зосереджених мас. В такій розрахунковій схемі усі зосереджені маси мають номери і кожному перерізу надається індекс, який складається з двох чисел: перше – номер маси, до якої відноситься даний переріз, другий – номер сусідньої маси, із сторони якої зроблено переріз.

Усі величини, які відносяться до зосереджених мас, будемо відмічати одним індексом, а ті, що відносяться до перерізу – двома. Таким чином, у перерізів ліворуч повинні бути індекси (к – 1, к), с праворуч – (к, к+1).

Зв'язність системи в деякий її точці визначає число незалежних параметрів (узагальнених координат), які характеризують можливі переміщення системи. Число узагальнених координат співпадає з числом незалежних реакцій, які замінюють дію однієї частини ланцюгової системи на іншу при розрізанні її на дві незалежні вібруючі частини. Згідно з цим визначенням вал, який здійснює крутильні коливання є однозв'язна система, а балка, наприклад, яка здійснює згинальні коливання – двозв'язна.

Таким чином, під ланцюговою системою будемо розуміти будь яку коливальну систему, яка складається з ланцюга послідовних елементів.

Для отримання основних співвідношень методом динамічних жорсткостей розглянемо просту ланцюгову систему.

Припустимо, що на першу масу діють гармонічні сили за всіма узагальненими координатами, стовпець яких позначимо P_1. Тоді в стовпець Q_{12}, окрім внутрішніх сил $Q_{10}=0$ и Q_{12}, увійдуть і сили P_1:

$$Q_{12}=H_1 q_1 - P_1. \tag{1}$$

Аналогічно для (к – 1, к)-ї ділянки визначений зв'язок між зусиллями $Q_{к-1,\,к}$ і переміщеннями $q_{к-1}$ можна записати у вигляді:

$$Q_{к-1,к}=H^{(1)}_{к-1}q_{к-1}-P^{(1)}_{к-1}. \tag{2}$$

Індекс "(1)" означає, що коефіцієнти квадратичної матриці $H^{(1)}_{к-1}$ і матриці стовпця $P^{(1)}_{к-1}$ залежать від параметрів усіх ділянок від першої до (к – 1)-ї маси, а також від частоти ω обурюючих сил.

Запишемо систему рівнянь руху стандартної системи, які характеризують пружну безінерційну ділянку

$$\begin{aligned}-Q_{к-1,к}&=C_{к-1,к}q_{к-1}+B_{к-1,к}q_к;\\ Q_{к,к+1}&=B^{T}_{к-1,к}q_{к-1}+C_{к,к-1,}q_к,\end{aligned} \tag{3}$$

де $Q_{к-1,к}$ – матриця-стовпець узагальнених сил розмірністю $n\times1$;

$q_{к-1,}$ – матриця-стовпець узагальнених координат розмірністю $n\times1$;

$C_{к-1,к}$, $B_{к-1,к}, C_{к,к-1}$ – матриці розмірністю $n\times n$, які залежать від пружних характеристик ділянок;

$P_к$ – матриця-стовпець сил; n – зв'язність систем (символ "Т" означає транспонування матриці).

Підставляючи (2) у перше рівняння системи (3), отримаємо

$$P^{(1)}_{к-1}-H^{(1)}_{к-1}q_{к-1}=C_{к-1,к}q_к+B_{к-1,к}q_к,$$

звідси

$$q_{к-1}=\frac{P^{(1)}_{к-1}-B_{к-1,к}q_к-C_{к-1,к}q_к}{H^{(1)}_{к-1}}. \tag{4}$$

Підставляючи (2) у друге рівняння системи (3) після перетворень будемо мати:

$$Q_{к,к+1}=$$

$$=\left(C_{к,к-1}-\frac{B^{T}_{к-1,к}\wedge B_{к-1,к}}{H^{(1)}_{к-1}+C_{к-1,к}}\right)q_к+\frac{B^{T}_{к-1,к}\wedge P^{(1)}_{к-1}}{H^{(1)}_{к-1}+C_{к-1,к}}. \tag{5}$$

У цій формулі знак "$\wedge$" введено для полег шення запису; він означає що на це місце установлюється матриця, обернена тій, яка стоїть у знаменнику, тобто

$$\frac{B^{T}\wedge B}{H+C}=B^{T}(H+C)^{-1}B.$$

Розглядаючи (5) сумісно з рівнянням, яке враховує обурюючі сили

$$Q_{к,к+1}+P_к-Q^{*}_{к,к-1}=H_к q_к,$$

отримаємо:

$$Q_{к,к+1}=H^{(1)}_к q_к-P^{(1)}_к, \tag{6}$$

де

$$H^{(1)}_к=H_к+C_{к,к+1}-\frac{B^{(T)}_{к-1,к}\wedge B_{к-1,к}}{C_{к-1,к}+H^{(1)}_{к-1}}, \tag{7}$$

$$P^{(1)}_к=P_к-\frac{B^{(T)}_{к-1,к}\wedge P_{к-1}}{C_{к-1,к}+H^{(1)}_{к-1}}. \tag{8}$$

Матриці $H_к^{(1)}$ називаються стійкістю в точці к частини системи від першої до к-ої маси; матриці-стовпці $P_к^{(1)}$ – еквівалентними обурювачами в к-й точці системи від першої до к-ої маси.

Для прикладу розглянемо крутильні коливання багатоступінчастого редуктора, виділений елемент цепної системи якого зображено на рис. 1.

Запишемо диференціальне рівняння для к-ої маси системи в комплексній формі^

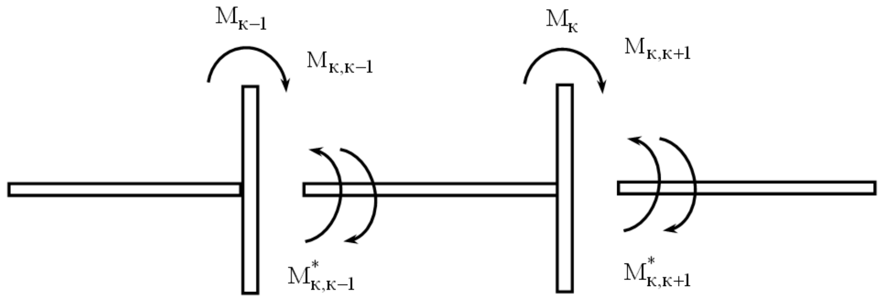

Рис. 1. Приклад крутильних коливань багатоступінчастого редуктора

$$I_к\ddot{\varphi}_к + C_{к-1,к}\left(\varphi_к-\varphi_{к-1}\right) - C_{к,к+1}\left(\varphi_{к+1}-\varphi_к\right) + \beta_к\dot{\varphi}_к + \beta_{к-1,к}\left(\dot{\varphi}_к-\dot{\varphi}_{к-1}\right) - \beta_{к,к+1}\left(\dot{\varphi}_{к+1}-\dot{\varphi}_к\right) = \bar{M}_к e^{ipt}.$$

Після підстановки в цей вираз рішення у вигляді

$$\varphi_j = \Phi_j e^{ipt},\ j = к-1,\ к,\ к+1,$$

отримаємо

$$\left(-I_к P^2 + i\beta_к P\right)\Phi_к + \left(C_{к,к+1} + i\beta_{к-1,к}P\right)\times \left(\Phi_к - \Phi_{к-1}\right) - \left(C_{к,к+1} + i\beta_{к,к+1}P\right)\times \left(\Phi_{к+1} - \Phi_к\right) = \bar{M}_к.$$

Користуючись позначеннями

$$\bar{H}_к = I_к P^2 + i\beta_к P,\ \bar{C}_{к-1,к} = C_{к-1,к} + i\beta_{к,к+1}P,\quad \bar{C}_{к,к+1} = C_{к,к+1} + i\beta_{к,к+1}P, \tag{9}$$

приведемо рівняння (9) до виду (3)

$$M_{к-1,\,к} = -\bar{C}_{к-1,к}\left(\Phi_к - \Phi_{к-1}\right),\quad M_{к,\,к+1} = -\bar{C}_{к,к+1}\left(\Phi_{к+1} - \Phi_к\right). \tag{10}$$

Тоді можна записати

$$-M_{к-1,\,к} = -\bar{C}_{к-1,к}\Phi_{к-1} + \bar{C}_{к-1,к}\Phi_к,$$
$$M_{к,\,к+1} = -\bar{C}_{к-1,к}\Phi_{к-1} + D_{к-1,к}\Phi_к - \bar{M}_к,$$

де $D_{к-1,\,к} = \bar{C}_{к-1,к} + \bar{H}_к$.

Висновок

Таким чином, з проведених досліджень видно, що в рекурентні формули (6) – (8) для даного випадку замість матриць будуть входити комплексні числа, які з виразів (9) визначаються за відомими моментами інерції дисків, жорсткостями валів і коефіцієнтами лінійного опору на дисках і на ділянках валів.

Список літератури

1. Юрченко О.О. Розрахунок лінійних коливальних систем з малим числом ступенів свободи / О.О. Юрченко // Збірник наукових праць. – Х.: ХІ ВПС, 2004. – С. 9-14.

2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Высшая школа, 1959. – 439 с.

Надійшла до редколегії 14.11.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.М. Фоменко, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКИХ ЖЕСТКОСТЕЙ

О.А. Юрченко

Статья посвящена развитию методов исследования колебаний линейных механических систем на основе метода динамических жесткостей. Рассмотрена система с большим количеством степеней вольности под действием гармонических возмущающих сил.

***Ключевые слова:** механическая система, динамическая жесткость, дискретная система, крутильные колебания.*

CALCULATION OF LINEAR VIBRATIONS OF THE MECHANICAL SYSTEMS BY THE METHOD OF DYNAMIC INFLEXIBILITIES

O.O. Yurchenko

The article is devoted development of methods of research of vibrations of the linear mechanical systems on the basis of method of dynamic inflexibilities. The system is considered with plenty of degrees of liberty under the action of harmonic revolting forces.

***Keywords:** mechanical system, dynamic inflexibility, discrete system, turning vibrations.*