УДК 517

Г.О. Старець, Л.І. Курпа

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків

ОЦІНЮВАННЯ БЛИЗЬКОСТІ ФУНКЦІЙ ДЕЯКИХ КЛАСІВ

Атомарні функції – це фінітні нескінченно диференційовні розв'язки деяких диференціально-функціональних рівнянь (рівнянь з відхиленням аргументу). Теорія атомарних функцій створена школою В.О. Рвачова. Виявилось, що атомарні функції є зручний і дуже перспективний апарат при застосуванні в різних областях науки і техніки. Зокрема, використання атомарних функцій є ефективним при розв'язанні крайових задач. Окрім цього, теорія атомарних функцій сприяє розвиненню деяких важливих питань теорії наближення функцій і, зокрема, теорії рядів типу рядів Тейлора (ряди В.О. Рвачова).

Ключові слова: *атомарні функції, сплайни, скінченна гладкість, скінченні різниці.*

Вступ

В цій роботі ми наведемо результати з оцінювання близькості функцій деяких класів, що мають скінченну гладкість.

Ці результати мають фундаментальне значення для встановлення основних теоретико-функціональних властивостей класів атомарних функцій $UP_m(x)$ [1], а також пов'язаних з цими функціями досконалих сплайнів $\sigma_{n,m}(x)$ [2].

Зокрема, наслідки цих результатів ведуть нас до встановлення екстремальних властивостей класів атомарних функцій, а також до побудови і обґрунтування збіжності рядів по цих функціях, рядів типу Тейлора (ряди В.О. Рвачова).

Основний розділ

Уведемо клас $A_{n,m}$ функцій $f(x)$, що задовольняють таким умовам:

а) $f \in C^{n-1}[-1,1]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, тобто f – функція, що неперервна з усіма своїми похідними до $n-1$ – го порядку включно.

б) $f^{(n-1)}(x)$ – абсолютно неперервна майже усюди на відрізку $[-1,1]$, причому

$$\operatorname{sign} f^{(n)}(x) = \operatorname{sign} UP(x). \tag{1}$$

в) $N_l(f) = N_{l,m}$, де $N_l(f)$ і $N_{l,m}$ – множини нулів похідних порядку l функцій $f(x)$ і $UP_m(x)$ відповідно.

г) $\Delta^2 f^{(l)}(x) = 0$ у точках вигляду $x = \frac{s}{m(2m)^l}$ з кроком $h = \frac{1}{m(2m)^l}$, $s \in Z$, $|s| < m(2m)^l$, $s \not\equiv 0(\operatorname{mod} m)$, $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Символом $\Delta^2(f)$ позначаються другі скінченні різниці функції f.

д) $f(0) = 1$.

Теорема 1. Нехай $f_1, f_2 \in A_{n,m}$.

Тоді вірна нерівність:

$$\|f_1(x) - f_2(x)\|_{C[-1,1]} \le C(2m)^{-n}.$$

Доведення. Доведення теореми 1 спирається, зокрема на такий простий факт.

Лема. Класи $A_{n,m}$ утворюють спадну послідовність множин, тобто

$$A_{n,m} \supset A_{n+1,m} \ (n = 1, 2, 3).$$

Дійсно, візьмемо функцію $f(x) \in A_{n+1,m}$ і покажемо, що вона належить класу $A_{n,m}$. Виконання умов а), в), г) і д) безпосередньо випливає з означення класів $A_{n,m}$.

Далі, те, що $f^{(n-1)}(x)$ абсолютно неперервна також очевидно, бо насправді $f^{(n-1)}(x)$ має навіть абсолютно неперервну похідну.

Залишається перевірити рівність (1). Для цього достатньо зауважити, що $f^{(n)}(x) = \int_{-1}^{x} f^{(n+1)}(t)dt$ і скористатися рівністю (1) з урахуванням властивостей в) і г).

Таким чином лему доведено.

Зауважимо, що $\sigma_{n,m} \in A_{n,m}$. Також очевидно, що $UP_m(x) \in A_{n,m}$ відразу для усіх $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Теорема 2 (теорема єдиності). Нехай $H_{\rho,m}$ – клас функцій $\varphi(x) \in C^{\infty}[-1,1]$, таких, що

$$\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \le C\rho^n B_n^{(m)}$$

для усіх $x \in [-1,1]$ $n = 0, 1, 2, \ldots; 1 \le \rho < 2m$, причому константа C може залежати тільки від функції φ, а

$$B_n^{(m)} = \left\|UP_m^{(n)}\right\|_{C[-1,1]} = 2^n (2m)^{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

Позначимо через $D_{l,m}$ множину $\left\{\frac{s}{m(2m)^l}\right\}$, $s \in Z, |s| < m(2m)^l$, $s \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Зауважимо, що $D_{l,m}$ – це множина нулів похідної порядку функції $UP_m(x)$.

Нехай функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ задовольняють таким умовам:

1. $\varphi_1, \varphi_2 \in H_{\rho,m}$.
2. $\varphi_1^{(l)}(x) = \varphi_2^{(l)}(x)$ при $x \in N_{l,m}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.
3. $\Delta^2\ \varphi_1^{(l)}(x) = \Delta^2\ \varphi_2^{(l)}(x)$ у точках $x \in N_{l,m}$ з кроком $h = \frac{1}{m(2m)^l}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.
4. $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Тоді $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ при $x \in [-1,1]$.

Зауваження. Наведена теорема, по суті, встановлює умови єдиності для функцій класів $H_{\rho,m}$, подібні до умов єдиності, що характеризують квазіаналітичні класи функцій (за Адамаром). Теорема дає достатні умови однозначного відновлення функцій з класів $H_{\rho,m}$ за інформацією, що задається на множинах:

$$\overline{N}_m = \bigcup_{l=0}^{\infty} N_{l,m} \text{ и } \overline{D}_m = \bigcup_{l=0}^{\infty} D_{l,m}.$$

Доведення теореми 2. Розглянемо функцію $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. Згідно умов теореми функція $f(x)$ має властивості:

1. $f \in H_{\rho,m}$.
2. $N_l(f) \supset N_{l,m}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.
3. $\Delta^2\ f^{(l)}(x) = 0$ при $x \in N_{l,m}$ з кроком $h = \frac{1}{m(2m)^l}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.
4. $f(0) = 0$.

Доведемо, що $f(x) \equiv 0$ при $x \in [-1,1]$. Оскільки $N_l(\sigma_{n,m}) = N_{l,m}$ при $l < n$ і, тому, $N_l(f) \supset N_l(\sigma_{n,m})$, а також завдяки властивості 1, при $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ вірна нерівність

$$\left|f^{(r)}(x)\right| \le 2C\rho^n \left|\sigma_{n,m}^{(r)}(x)\right|. \tag{2}$$

Розглянемо тепер функцію

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + (2C\rho^n + 1)\sigma_{n,m}(x). \tag{3}$$

З нерівності (2) і вигляду функції $\tilde{\varphi}(x)$ випливає, що

$$N_r(\tilde{\varphi}) = N_{r,m},$$

$r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Далі, оскільки

$$f \in C^{n-1}[-1,1]$$

и

$$\sigma_{n,m} \in C^{n-1}[-1,1],$$

то й

$$\tilde{\varphi} \in C^{n-1}[-1,1].$$

Очевидно також, що $\tilde{\varphi}^{(n)}(x)$ – абсолютно неперервна і $\operatorname{sign} \tilde{\varphi}^{(n)}(x) = \operatorname{sign} UP_m^{(n)}(x)$ майже всюди.

Крім того, оскільки $f(0) = 0$, а $\sigma_{n,m}(0) = 1$, то $\tilde{\varphi}(0) = 2C\rho^n + 1$.

Усе це означає, що

$$\tilde{\varphi} \in (2C\rho^n + 1)A_{n,m}.$$

Тоді за теоремою 1

$$\|f\|_{C[-1,1]} = \left\|\tilde{\varphi} - (2C\rho^n + 1)\sigma_{n,m}\right\|_{C[-1,1]} \le \le \frac{C_1}{(2m)^n}(2C\rho^n + 1), \tag{4}$$

де константа C не залежить від n. Переходячи до границі при $n \to \infty$ і враховуючи, що $\rho < 2m$, дістанемо $f(x) \equiv 0$. Тож $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ і теорему доведено.

Зауважимо, що з доведення видно, що умови теореми можна дещо послабити, а саме замість ρ^n можна взяти величину, що зростає при $n \to \infty$ повільніше, ніж $(2m)^n$.

Спираючись на попереднє, неважко довести також теорему про однозначне відновлення функцій $UP_m(x)$ в класі усіх нескінченно диференційованих функцій.

Теорема 3. Нехай фінітна функція $\varphi(x) \in C^\infty[-1,1]$ задовольняє умовам:

1. $N_l(\varphi) = N_{l,m}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.

2. $\Delta^2\ \varphi^{(l)}(x)\ = \Delta^2\ UP_m^{(l)}(x)\ = 0$ при $x \in N_{l,m}$ з кроком $h = \dfrac{1}{m(2m)^l}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.

3. $\varphi(0) = 1$

Тоді $\varphi(x) \equiv UP_m(x)$.

Доведення. З означення класу $A_{n,m}$ і умов теореми випливає, що $\varphi \in A_{n,m}$. Крім того, ми бачили, що $UP_m \in A_{n,m}$ для довільного $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Тому за теоремою 1

$$\left|\varphi(x) - UP_m(x)\right| \le C(2m)^{-n} .$$

Ліва частина цієї нерівності від n не залежить, а права прямує до нуля при $n \to \infty$. Тому $\varphi(x) - UP_m(x) \equiv 0$.

Теорему доведено.

Висновок

В даній статті наведені результати, що дають змогу фундаментального дослідження теоретико-функціональних властивостей, а також обчислювальних можливостей класу атомарних функцій.

Список літератури

1. *Рвачев В.А. Некоторые атомарные функции и их применение / В.А. Рвачев, Г.А. Старец // Докл. АН УССР, сер. А .– 1983. – № 11. – С. 6-8.*
2. *Старец Г.А. Один класс атомарных функций и его применение: дисс. канд. физ.-мат. наук Г.А. Старец; 01.01.01. – Х., 1984. – 104 с.*

Надійшла до редколегії 14.02.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.А. Калкаманов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

ОЦЕНИВАНИЕ БЛИЗОСТИ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

Г.А. Старец, Л.И. Курпа

Атомарные функции – это финитные бесконечно дифференцированные развязки некоторых дифференциально-функциональных уравнений (уравнений с отклонением аргумента). Теория атомарных функций создана школой И.О. Рвачева. Оказалось, что атомарные функции являются удобным и очень перспективным аппаратом при применении в разных областях науки и техники. В частности, использование атомарных функций является эффективным при решении краевых задач. Кроме этого, теория атомарных функций способствует развитию некоторых важных вопросов теории приближения функций и, в частности, теории рядов типа рядов Тейлора (ряды И.О. Рвачева).

***Ключевые слова:** атомарные функции, сплайны, конечная гладкость, конечные разницы.*

EVALUATION OF CLOSENESS OF FUNCTIONS OF SOME CLASSES

G.A. Starets, L.I. Kurpa

Atomic functions – it финитные the infinitely differentiated upshots of some differential-functional equalizations (equalizations with the rejection of argument). The theory of atomic functions is created school of I.O. Rvacheva. Appeared, that atomic functions are comfortable and by a very perspective vehicle at application in the different areas of science and technique. In particular, the use of atomic functions is effective at the decision of regional tasks. Except for it, the theory of atomic functions promotes to development of some important questions of theory of approaching of functions and, in particular, theories of rows of type of rows of Teylora (rows of I.O. Rvacheva).

***Keywords:** atomic functions, splines, eventual smoothness, eventual differences.*