УДК 519.12.176

Л.Н. Козачок

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Харьков

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧ НАХОЖДЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВЫПОЛНЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НЕКОТОРОГО МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Данная статья посвящена вопросам изучения отдельных этапов производства. Объектом рассмотрения являются технологические процессы изготовления определенного вида продукции на отдельно взятом машиностроительном заводе в ходе технологического процесса в механосборочном цехе. Предприятие рассматривается, как человеко-машинная система и проведен анализ структуры системы и принципов ее функционирования.

Ключевые слова: *технологические процессы, структура системы, мера эффективности, математическая модель.*

Введение

Постановка проблемы и анализ литературы. Системы с различными маршрутами обслуживания требований наиболее широко распространены на практике. Как отмечали В. Дудек, М. Смит и С. Панвалкар [1], в 60% из обследованных промышленных компаний маршруты обслуживания требований были различными.

В.Г. Тимковский, Н. Хифитц и И. Адири [2] предложили полиномиальные алгоритмы построения оптимального по быстродействию расписания обслуживания двумя приборами n одновременно поступающих требований с единичными длительностями операций. Трудоемкость этих алгоритмов – O(R), где R – общее число выполняемых операций.

Достаточно полное изложение теории двойственности применительно к задачам построения оптимальных расписаний содержится в монографии В.С. Михалевича и А.И. Куксы [3], С.В. Севастьяновым [4] предложен алгоритм трудоемкости $O(n^2M^2r^2)$ построения расписания s^0, при котором каждая операция может выполняться любым прибором из заранее выделенного множества приборов. Лучший из известных методов последовательного анализа вариантов – это метод ветвей и границ [5].

Цель статьи. В статье уделяется внимание математической постановке задачи и построению математической модели некоторого технологического процесса на предприятии.

Основной материал

С целью нахождения оптимальной структуры и выбора наиболее эффективных вариантов выполнения технологических процессов и управления ими разобьем систему на подсистемы и процессы.

При исследовании производственных технологий определенной системы рассматриваем вопросы упорядочения обслуживания последовательных технологических процессов по критерию минимизации времени пребывания в системе, а также упорядочения обслуживания, связанного с выполнением процессов с ограничениями в виде директивных или крайних сроков.

Математическая модель технологической задачи составляется с целью нахождения при заданных свойствах заданий и ресурсов и наложенных на них ограничениях эффективного алгоритма упорядочения заданий, оптимизирующего или стремящегося оптимизировать желаемую меру эффективности. Под мерой эффективности в данной задаче будем понимать длину расписания и среднее время пребывания заданий в системе (смысл этих понятий будет разъяснен ниже).

Для построения модели рассмотрим основные этапы реализации технологического процесса, который обеспечивается набором процессоров $P=\{P_1,P_2,\ldots,P_m\}$, различающимися в нашем случае по возможностям, по быстродействию и по функциональным операциям. Общая система заданий $T=\{T_1,T_2,\ldots,T_n\}$ для данного набора процессоров – это набор подлежащих выполнению заданий, на котором может быть определено отношение частичного порядка: запись $T_i<T_j$ означает, что задание T_i должно быть завершено раньше по времени, чем начнется выполнение задания T_j.

Для полного описания процесса обслуживания заданий введем понятие расписания функционирования системы − совокупности указаний, позволяющих установить, какие именно задания какими именно процессорами обслуживались, обслуживаются или будут обслуживаться в каждый момент времени.

Из теории расписаний известны расписания следующих видов:

1. Расписания без прерываний, предполагающие такое выполнение каждого задания, которое раз начавшись не может быть прервано, т.е. выполнение задания всегда должно быть завершено.

2. Расписания с прерываниями разрешают прерывать задания и откладывать их выполнение процессором, при этом полагается, что общее время, требуемое для выполнения задания, остается неизменным и при прерываниях отсутствуют потери времени обслуживания.

3. Расписания с помощью списка предполагают, что вначале готовится упорядоченный список заданий из множества T, так называемый список приоритетов, при освобождении процессора список просматривается сначала, пока не найдется первое невыполненное задание, которое готово к выполнению. Задание считается готовым к выполнению на данном процессоре, если выполнение всех предшествующих данному заданий завершено и имеющегося количества ресурсов достаточно для выполнения.

Под допустимым расписанием понимается такое расписание, которое удовлетворяет всем ограничениям, вытекающим из постановки конкретно рассматриваемой задачи.

Для того чтобы воспользоваться мерой эффективности расписания введем понятие длины расписания.

Длиной расписания для множества (1) будем называть время, необходимое для выполнения всей совокупности заданий

$$T = \{T_1, T_2, ..., T_n\}, T_i < T_j, i < j; i, j = \overline{1,n}\ . \quad (1)$$

Длина расписания зависит от общего времени выполнения всех заданий и общего времени незанятости процессоров. Расписание наименьшей длины соответствует ситуации, когда отсутствуют простои процессоров.

В дальнейшем необходимо также использовать понятие работы R_j, которая представляет собой упорядоченную последовательность заданий T_j, $j = \overline{1,k}$ и принадлежит множеству (2).

$$W = \{R_1, R_2, ..., R_j, ..., R_k\}\ . \quad (2)$$

Расписание можно рассматривать как совокупность

$$S = \{S_1(t), S_2(t), ..., S_l(t), ..., S_m(t)\}$$

кусочно-постоянных непрерывных слева функций $S_l(t), l = \overline{1,m}$, каждая из которых принимает значения 0, 1, 2, …, n.

Будем считать, что $S_l(t') = i \neq 0$, если в момент времени t=t' процессор P_l обслуживает задание T_i;

$S_l(t') = 0$, если в момент времени t=t' процессор P_l простаивает.

Система процессоров, обслуживающая данные задания, – обслуживающая система – называется одностадийной, если каждое задание может быть полностью обслужено одним из процессоров. Длительности t_{il} обслуживания каждого задания T_i, $i = \overline{1,n}$ каждым процессором P_l, $l = \overline{1,m}$ предполагаются заданными.

Система обслуживания называется многостадийной, если процесс обслуживания задания T_i включает r_i последовательных стадий, при этом каждой стадии соответствует множество M_{ri}, членами которого являются процессоры из множества $\{P_1, P_2, …, P_m\}$.

Если $|M_{ri}|=1$, то обслуживающая система называется системой с последовательными процессорами. В этом случае для каждого задания Ti задается маршрут прохождения процессоров $L^i=(P_1, P_2, …, P_{ri})$. Среди систем с последовательными процессорами выделяются системы поточного типа. В этих системах каждое задание должно быть последовательно обслужено каждым процессором, маршруты прохождения процессоров одинаковы для всех заданий. В системах с нефиксированными маршрутами порядок прохождения процессоров заранее не задан, каждое задание «выбирает» его по своему усмотрению.

В любом случае, если задание T_i на стадии r_i обслуживается процессором P_l, $l = \overline{1,m}$, то предполагается заданной длительность его обслуживания t_{il}.

Элементы множества процессоров одной стадии называются параллельными. Содержательно процесс обслуживания заданий без прерываний в системе с параллельными процессорами удовлетворяет следующему условию.

Каждое задание обслуживается только одним процессором. Если обслуживание задания T_i процессором P_l начинается в момент времени t_i^0, то оно протекает непрерывно и завершается в момент времени $t_i = t_i^0 + t_{il}$.

Поставим задачу описания технологического процесса изготовления определенного узла деталей, входящего в схему производства машиностроительного оборудования. При рассмотрении технологических карт ограничимся тремя видами деталей, которые затем собираются в определенный технический узел. Исходя из этого, множество заданий системы обслуживания, изготовления данной технической части представим в виде трех подмножеств.

Пусть задания первого подмножества

$T^1=\{T'_1, …, T'_l\}$ – будут соответствовать деталям первого вида;

$T^2=\{T''_1, …, T''_l\}$ – деталям второго вида;

$T^3=\{T'''_1, …, T'''_l\}$ – деталям третьего вида,

где l – предполагаемое необходимое количество технологических узлов.

Для производства каждого вида деталей необходимо привлечь соответствующее оборудование. Система обслуживания в нашей задаче будет состоять из m процессоров $\{P_1, …, P_m\}$, которые соответствуют каждой технологической операции. Задания T_i, $i = \overline{1,n}$ поступают в систему в момент времени d_i, в случае одновременного поступления момент времени поступления фиксируется $d_1=d_2=\ldots=0$.

Обслуживание задания T_i включает r_i последовательных стадий, на стадии q, $q=\overline{1,r_i}$, задание T_i обслуживается процессором $P_q^{\,i}$, $1\le q\le r_i$, $P_q^{\,i}\in\{P_1,\ldots,P_m\}$, не обязательно различны. Процесс обслуживания задания отдельным процессором на некоторой конкретной стадии называется операцией. В этой терминологии процесс обслуживания задания T_i состоит в последовательном выполнении r_i операций, т.е. прохождение детали (объекта) через процессор – это технологическая операция.

Для каждого задания T_i, $i=\overline{1,n}$, маршруты прохождения процессоров предполагаются заданными и могут быть различны для разных заданий.

Маршрут прохождения для задания опишем следующ выражением:

$$L^i=\left(P_1^{\,i},P_2^{\,i},\ldots,P_q^{\,i},\ldots,P_{r_i}^{\,i}\right), q=\overline{1,r_i}. \qquad (4)$$

Каждый процессор обслуживает задания последовательно, причем не более одного задания в каждый момент времени. В терминологии технологических операций процесс обслуживания задания T_i состоит в последовательном выполнении r_i операций, каждая из которых характеризуется упорядоченной тройкой чисел:

$$\left(i,P,q\right),\ \text{где}\ \ i=\overline{1,n};\ P\in\left\{P_1,P_2,\ldots,P_m\right\};\ \ q=\overline{1,r_i}.$$

Длительности $t_{ipq}>0$ выполнения всех технологических операций предполагаются заданными.

Момент завершения обслуживания задания T_i процессором P_l запишем в виде: $t^{з}_{ipq}=t^{н}_{ipq}+t_{ipq}$, где $t^{н}_{ipq}$ – момент начала обслуживания задания T_i процессором P_l.

Рассмотрим обслуживание множества заданий в системах с различными маршрутами без прерываний. Если процесс обслуживания задания T_i процессором P_l начинается в момент времени $t_{il}^{\,н}$ то он протекает непрерывно и заканчивается в момент времени $t_{il}^{\,з}=t_{il}^{\,н}+t_{il}$. Каждый процессор одновременно может обслуживать не более одного задания, каждое задание одновременно может обслуживаться не более чем одним процессором.

Технологические карты изготовления деталей помогают записать последовательность технологических операций для каждого вида деталей. Придерживаясь этого плана, для каждой детали получаем технологический процесс прохождения ею процессоров (станков), соответствующих определенной технологической операции, т.е. маршруты прохождения процессоров при обработке деталей.

Деталь 491.СМК. Деталь диск.

1. Обрубочное место. 1. Токарный станок.
2. Токарный станок. 2. Рабочее место.
3. Оправка. 3. Разметочная плита.
4. Рабочее место. 4. Оправка.
5. Оправка. 5. Рабочее место.
6. Рабочее место. 6. Подставка.
7. Оправка.
8. Рабочее место.
9. Балансировка.
10. Покраска.
11. Рабочее место.

Деталь крышка.

1. Токарный станок.
2. Рабочее место.
3. Оправка.
4. Рабочее место.
5. Разметочная плита.
6. Оправка.
7. Рабочее место.
8. Подставка.

Таким образом, в технологическом процессе задействовано 8 станков, т.е. технологический процесс обеспечивается набором процессоров $P=\{P_1,P_2,\ldots,P_8\}$, которые являются разными по возможностям, по быстродействию и функциональным операциям. Маршрут прохождения процессоров для деталей первого вида, т.е. для заданий из множества T^1 выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}L^1&=(P_1^1,P_2^1,P_3^1,P_4^1,P_5^1,P_6^1,P_7^1,P_8^1,P_9^1,P_{10}^1,P_{11}^1)=\\&=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_3,P_4,P_3,P_4,P_5,P_6,P_4)\end{aligned} \qquad (5)$$

для деталей второго вида, т.е. для заданий из множества T^2:

$$L^2=(P_2,P_4,P_7,P_3,P_4,P_8) \qquad (6)$$

для деталей третьего вида, т.е. для заданий из множества T^3:

$$L^3=(P_2,P_4,P_3,P_4,P_7,P_3,P_4,P_8). \qquad (7)$$

Придерживаясь введенных обозначений, можно сказать, что P_q^i при q=9, i=1 будет $P_9^1=P_5$. аналогично можно определить номер каждого процессора из маршрута прохождения процессоров для каждой детали. Длительности прохождения деталями процессоров известны, а значит известны моменты завершения обслуживания детали на процессоре на определенной стадии технологического процесса.

Расписание функционирования системы обслуживания будет представлять собой совокупность указаний в отношении того какие именно задания какими именно процессорами обслуживались, обслуживаются или будут обслуживаться в каждый момент времени. Наша задача состоит в том, чтобы рассмотреть все допустимые расписания, т.е. такие, которые удовлетворяют всем ограничениям, вытекающим из постановки задачи. Пусть расписанию S соответствует вектор моментов завершения обслуживания заданий при этом расписании

$$\bar{t}(s) = \left(t_1^з(s), t_2^з(s), ..., t_n^з(s)\right). \quad (8)$$

Предположим, что

$$t_1^з(s) = x_1, t_2^з(s) = x_2, ..., t_n^з(s) = x_n \text{ ,}$$

тогда $\bar{t}(s) = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Построим действительную функцию n переменных

$$F(x) = F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = F\left(t_1^з(s), t_2^з(s), ..., t_n^з(s)\right). \quad (9)$$

Из всех допустимых расписаний нужно найти оптимальное расписание – такое, которому соответствует наименьшее значение F(x): F(x)→min при ограничениях, наложенных на моменты времени завершения заданий $t_{ipq}^з$, для заданий из множества

$$T^1 : t_{1p_1 1}^з \le t_{1p_2 2}^з \le t_{1p_3 3}^з \le t_{1p_4 4}^з \le t_{1p_3 5}^з \le t_{1p_4 6}^з \le t_{1p_3 7}^з \le$$
$$\le t_{1p_4 8}^з \le t_{1p_5 9}^з \le t_{1p_6 10}^з \le t_{1p_4 11}^з;$$
$$T^2 : t_{2p_2 1}^з \le t_{2p_4 2}^з \le t_{2p_7 3}^з \le t_{2p_3 4}^з \le t_{2p_4 5}^з \le t_{2p_8 6}^з;$$
$$T^3 : t_{3p_2 1}^з \le t_{3p_4 2}^з \le t_{3p_3 3}^з \le t_{3p_4 4}^з \le t_{3p_7 5}^з \le t_{3p_3 6}^з \le$$
$$\le t_{3p_4 7}^з \le t_{3p_8 8}^з.$$

Для минимизации общего времени обслуживания всех заданий в системе, необходимо найти наименьшее значение $\overline{t_{max}}(s)$, т.е. показать, при каком расписании самый поздний момент завершения обслуживания какого-либо задания является минимальным.

Выводы

Расписание минимальной длины позволяет не только завершать выполнение всех заданий как можно раньше, но и обеспечивает максимальное использование ресурсов системы. Минимизация длины расписания минимизирует время простоя, что в свою очередь приводит к максимальному использованию процессоров.

В данной статье получена модель определенного технологического процесса, которая, несмотря на простоту, настолько содержательна, что охватывает широкий круг практически важных задач упорядочения, выходящих за рамки начальных формулировок.

Список литературы

1. *Dudek R.A. Use of a case study in sequencing / scheduling research / R.A. Dudek, M.L. Smith, S.S. Panwalkar // OMEGA. – 1974. – 305 p.*
2. *Hefetz N. An efficient optimal algorithm for the two-machines, unit-time,job-shop, schedule-length, problem / N. Hefetz, I. Adiri // Math. Oper. Res. – 1982. – 227 p.*
3. *Михалевич B.C. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов / B.C. Михалевич, А.И. Кукса. – М.: Наука, 1983. – 217 с.*
4. *Севастьянов С.В. Эффективное построение расписаний, близких к оптимальным, для случаев произвольных и альтернативных маршрутов деталей / С.В. Севастьянов // ДАН СССР. – 1984. – Т. 276, № 1. – С. 46-48.*
5. *Fisher M.L. Surrogate duality relaxation for job shop scheduling / M.L. Fisher, B.J. Lageweg, J.K. Lenstra // Discr. Appl. Math. – 1983. – 115 p.*
6. *Конвей Р.В. Теория расписаний / Р.В. Конвей, В.Л. Максвелл, Л.В. Миллер. – М.: Наука, 1975. – 215 с.*
7. *Танаев B.C., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний / B.C. Танаев, В.В. Шкурба. – М.: Наука, 1975. – 320 с.*
8. *Hall L.A. Approximability of flow shop scheduling., Math. Programming. – 1998. – Series B, V. 82, № 1-2. – P. 175-190.*
9. *Суслов А.Г. Научные основы технологии машиностроения . – М.: Машиностроение, 2002. – 684 с.*
10. *Соколицын С.А. Многоуровневая система оперативного управления ГПС в машиностроении / С.А. Соколицын. – Политехника, 1991. – 208 с.*

Поступила в редколлегию 14.05.2012

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.М. Колодяжный, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Харьков.

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ЗАДАЧ ЗНАХОДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ АЛГОРИТМІВ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВИКОНАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ДЕЯКОГО ПІДПРИЄМСТВА МАШИНОБУДУВАННЯ

Л.Н. Козачок

Дана стаття присвячена питанням вивчення окремих етапів виробництва. Об’єктом дослідження є технологічні процеси виготовлення визначеного виду продукції на окремо взятому заводі машинобудування в ході технологічного процесу в цеху механічної збірки. Підприємство розглядається як, людина-машина-система і проводиться аналіз структури системи і принципів її функціонування.

Ключові слова: *технологічні процеси, структура системи, міра ефективності, математична модель.*

CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODEL FOR PROBLEMS OF THE FINDING OF EFFECTIVE ALGORITHMS OF SEQUENCES OF PERFORMANCE OF THE TECHNOLOGICAL PROCESSES, SOME MACHINE-BUILDING ENTERPRISE

L.N. Kozachok

Given article is devoted questions of studying of separate production phases. Object of consideration are technological processes of manufacturing of a certain kind of production at separately taken machine-building factory during technological process in machine-assembling shop. The enterprise is considered, how human-machine system and the analysis of structure of system and principles of its functioning is carried out.

Keywords: *technological processes, system structure, an efficiency measure, mathematical model.*