УДК 519.87:316.458.6

В.Б. Кононов[1], Ю.И. Кушнерук[2], А.В. Коваль[1]

[1]*Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков*
[2]*Академия внутренних войск МВД Украины, Харьков*

ОБОСНОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ГРУППИРОВКОЙ ВОЙСК

В статье обоснованы возможности решения задач оптимального управления распределением боевых средств в ходе боевых действий.

Ключевые слова: *состав вооружения, группировка войск, бюджетные ограничения, оптимальное управление распределением боевых средств.*

Введение

Постановка задачи. При планировании и проведении операций необходимо выбрать состав вооружения оперирующей группировки войск, учитывая при этом бюджетные ограничения на создание группировки войск и исходя из необходимости обеспечить достижение цели, поставленной в операции. Достижение максимально возможного эффекта при ведении боевых действий представляется актуальной военно-научной задачей, решения которой определяется необходимостью разработки подсистемы поддержки принимаемых решений, входящих в создаваемую автоматизированную систему управления войсками и оружием.

Анализ литературы. В литературе [1] предложены методы решения задач планирования боевых действий и управления распределением используемых при этом боевых средств. Описание изложенных задач при помощи статических и динамических моделей изложено в [2].

Здесь, кроме того, представлены методы решения задач оптимизации планирования и управления. В [3] развит метод решения оптимизационных задач, в котором учитывается возможные перенацеливание боевых средств. В [4] и [5] рассмотрены модели операций, в которых предполагается переоснащение или частичная замена боевых средств.

Однако в работах [1 – 5] не обосновывались возможности решения задач определения оптимального состава вооружения группировки войск, описываемых динамическими моделями, для варианта когда требуется обеспечить оптимальное управление и одновременно выбрать начальный состав боевых средств группировки.

Целью статьи является обоснование возможности решения задач определения оптимального состава вооружения оперирующей группировки, исходя при этом из оптимального управления распределением боевых средств противника.

Основной материал

Рассмотрим задачу выбора оптимального состава вооружения, позволяющую обеспечить минимум математического ожидания суммарного количества боевых средств противника в конце операции с учётом их важности в условиях ограниченности бюджетных средств и наличия информации об управлении распределением боевых средств противника, но отсутствия данных о его состоянии в ходе операции. При этом, предполагается, что противник владеет информацией о состоянии вооружения оперирующей группировки в ходе операции. Эта операция описывается следующими математическими моделями:

$$J\left[x^0;\alpha(t)\right]=\sum_{j=1}^{n} w_j y_j(T)\to \min; \qquad (1)$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(t) b_{ij} y_j(t) v_j(t); \quad i=\overline{1,m};$$

$$\frac{dy_j(t)}{dt}=-\frac{y_j(t)v_j(t)}{y_j^0}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}(t)\ a_{ji}\ x_i(t)u_i(t); \quad j=\overline{1,n};$$

$$x_i(0)=x_i^0;\ i=\overline{1,m}; \quad y_j(0)=y_j^0;\ j=\overline{1,n};\ \alpha(t)\in D;$$

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}(t)=1;\ j=\overline{1,n};\ \beta_{ij}(t)\ge 0;\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{m}c_i x_i^0\le C_0;\ x_i^0=\left[x_i^0\right]\ge 0;\quad i=\overline{1,m},$$

где m; n – количество типов боевых средств группировок A, B; $x_i(t)\left(i=\overline{1,m}\right)$; $y_j(t)\left(j=\overline{1,n}\right)$ – математические ожидание количества боевых средств i-го, j– типов группировки A, B, сохранившихся к моменту времени t; $x_i^0\left(i=\overline{1,m}\right)$; $y_j^0\left(j=\overline{1,n}\right)$ – количество искомых боевых средств i-го, j-го типов группировки A, B; $\alpha_{ji}(t),\beta_{ij}(t)\left(j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}\right)$ – доли количества боевых средств i-го типа, j-го типа группировки A, B, противодействующих боевым средствам j-го, i-го типа группировки B, A в момент времени t; a_{ji}, b_{ij} $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – математическое ожидание количества поражённых в единицу времени боевых средств j-го, i-го типа группировки B, A при огневом воздействии на них боевым средством i-го, j-го типа группировки A, B; $y_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – количество боевых средств j-го типа группировки B; C_0 – выделенный бюджет для группировки A; c_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ – стоимость боевого средства i-го типа группировки A, включающая стоимость боекомплекта; w_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ – коэффициент важности боевого средства j-го типа группировки B. $\sum_{i=1}^{m}c_i x_i^0\le C_0$ – ограничение на выделенный бюджетl

T – продолжительность боевых действий, задаваемая лицом, принимающим решение.

D – множество допустимых уравнений, т.е. матриц целераспределения боевых средств группировки A по боевым средствам группировки B:

$$D:\left\{\ \alpha(t):\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}(t)=1;\quad i=\overline{1,m};\alpha_{ji}(t)\ge 0;\ j=\overline{1,n};\right. \qquad (2)$$
$$\left. i=\overline{1,m};\ k_{i_2}\alpha_{ji_1}(t)-k_{i_1}\alpha_{ji_2}(t)=0;\left(i_1,i_2\right)\in I_B\ \right\}.$$

Для задачи определения оптимального состава вооружения при обеспечении минимальных суммарных стоимостных затрат на вооружение оперирующей после аналогичных преобразований получим:

$$I\left[x^0;\alpha(t)\right]=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i^0\to \min; \qquad (3)$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(t) b_{ij} y_j(t) v_j(t); \quad i=\overline{1,m};$$

$$\frac{dy_j(t)}{dt}=-\frac{y_j(t)v_j(t)}{y_j^0}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}(t) a_{ji}\ x_i(t)u_i(t); \quad j=\overline{1,n};$$

$$x_i(0)=x_i^0;\quad i=\overline{1,m};\quad y_j(0)=y_j^0;\quad j=\overline{1,n};\quad \alpha(t)\in D;$$
$$\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}(t)=1;\ j=\overline{1,n};\ \beta_{ij}(t)\ge 0;\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};$$
$$y_j(T)\le y_j^0\left(1-0,01r_j\right);\quad j=\overline{1,n},$$
$$x_i^0=\left[x_i^0\right]\ge 0;\quad i=\overline{1,m},$$

где $u_i(t),\ i=\overline{1,n}$ и $v_j(t),\ j=\overline{1,m}$ – для моделей (1) и (2) операторы, учитывающие ограничения на запасы боекомплектов:

$$u_i(t)=\begin{cases}1, & \lambda_i\int_0^t x_i(t)\,dt \langle N_i^A x_i^0;\\ 0, & \lambda_i\int_0^t x_i(t)\,dt\ge N_i^A x_i^0,\end{cases}\qquad (4)$$

$$v_j(t)=\begin{cases}1, & \mu_j\int_0^t y_j(t)\,dt \langle N_j^B y_j^0;\\ 0, & \mu_j\int_0^t y_j(t)\,dt\ge N_j^B y_j^0,\end{cases}\qquad (5)$$

где $\lambda_i\left(i=\overline{1,m}\right)$; $\mu_j\left(\ j=\overline{1,n}\right)$ – скорострельности боевых средств i-го; j-го типа группировок A; B;

Матричные функции $\alpha(t)=\left\|\alpha_{ji}(t)\right\|_{n,m}$ и $\beta(t)=\left\|\beta_{ij}(t)\right\|_{m,n}$ являются управлениями и фактически определяют матрицы целераспределение разнородных боевых средств одной группировки по разнородным боевым средствам другой группировки. Они должны удовлетворять требованиям непрерывности и гладкости, так как при слишком «плохих» (слишком «разрывных») $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ задача Коши

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(t)\ b_{ij}y_j(t)\,v_j(t);\quad i=\overline{1,m};\ (6)$$
$$\frac{dy_j(t)}{dt}=-\frac{y_j(t)\,v_j(t)}{y_j^0}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}(t)\ a_{ji}x_i(t)\,u_i(t);\,j=\overline{1,n};$$
$$x_i(0)=x_i^0;\quad i=\overline{1,m};\quad y_j(0)=y_j^0;\quad y=\overline{1,n}.$$

не будет иметь решения, а с другой стороны слишком «плохие» функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ не будут иметь физического смысла. В большинстве прикладных задач в качестве управлений могут быть взяты кусочно-непрерывные функции. Такой выбор является оправданным и для моделей (1) и (3), так как в допущениях моделей принято, что перенос огня с одной группы боевых средств на другую происходит мгновенно и скачкообразно.

Классические теоремы существования и единственности решения задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt}=F(x,t);\quad x(t_0)=x^0\qquad (7)$$

обычно доказываются при требовании непрерывности $F(x,t)$ и $F_x(x,t)$ по совокупности переменных в некоторой области, содержащей точку $\left(x^0,\ t_0\right)$ (условие непрерывности $F_x(x,t)$ часто заменяется условием Липшица для $F(x,t)$ и $F_x(x,t)$ по переменной x). Для кусочно-непрерывного направления $u(t)$ функция $F(x,t)\equiv\Phi(x,u(t),t)$ по переменной t не является непрерывной. Поэтому теоремы существования и единственности здесь становятся недостаточными. Поясним, что понимается в данном случае под решением задачи (7). Пусть функция $u(t)$ имеет скачки в точках $t_1<t_2<\cdots<t_k$ ($t_0<t_1$; $t_k<T$). Предположим, что задача (7) имеет решение на промежутке $\left[t_0,t_1\right]$, причём, $x(t_1)=x^1$. Далее рассмотрим задачу Коши $\frac{dx(t)}{dt}=\Phi(x,u(t),t)$; $x(t_1)=x^1$ и предположим, что она имеет решение на промежутке $\left[t_1,t_2\right]$, причём, $x(t_2)=x^2$. Далее переходим к задаче $\frac{dx(t)}{dt}=\Phi(x,u(t),t)$; $x(t_2)=x^2$ и т.д.

Если функцию $x(t)$ удалось определить указанным способом на всём промежутке $\left[t_0,T\right]$, то будем называть её решением задачи (7). Если на каждом участке непрерывности управления $u(t)$ правая часть системы (7) удовлетворяет теореме существования и единственности для задачи Коши, то при любом $x^0\in R^n$ и любом кусочно-непрерывном управлении $u(t)$ задача (7) имеет единственное решение, определённое на всём отрезке $\left[t_0,T\right]$. Докажем справедливость данного утверждения для задачи (6). Введём для задачи (6) следующие обозначения:

$$z(t)=\left[x_1(t)\cdots x_m(t)\ \ y_1(t)\cdots y_n(t)\right]';\qquad (8)$$
$$z^0=\left[x_1^0\ \ x_2^0\cdots x_m^0\ \ \ y_1^0\ \ y_2^0\cdots y_n^0\right]',$$

При этих обозначениях задача Коши (6) запишется в виде:

$$\frac{dz(t)}{dt}=S(t)\,z(t);\quad z(0)=z^0,\qquad (9)$$

где $S(t)$ – матрица.

Существование и единственность решения задачи (9) вытекает из следующего.

Утверждение 1. При любом $z^0\in R^{m+n}$ и любых кусочно-непрерывных матричных функциях $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ задача (9) имеет единственное решение, определённое на всём промежутке $[0,T]$.

Действительно на каждом участке непрерывности функций $\alpha(t), \beta(t), u(t), v(t)$ правая часть системы (9) непрерывна по совокупности переменных, где $u(t)=\left[u_1(t), u_2(t), \cdots, u_m(t)\right]'$; $v(t)=\left[v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t)\right]'$.

Проверим выполнение условия Липшица для правой части системы (9):

$$\left\|S(t)z^1-S(t)z^2\right\|=\left\|S(t)\left(z^1-z^2\right)\right\|\le\left\|S(t)\right\|\left\|z^1-z^2\right\|,$$

где $\|z(t)\|=\max\limits_{t\in[t_0,T]}\|z(t)\|_1$; $\left\|z(\bar t)\right\|_1=\max\limits_{1\le k\le m+n}\left|z_k(\bar t)\right|; \bar t\in\left[t_0,T\right]$ – первая (кубическая) норма вектора;

$$\|S(t)\|=\max_{t\in[t_0,T]}\|S(t)\|_1;$$

$$\left\|S(\bar t)\right\|_1=\max_{1\le k\le m+n}\sum_{j=1}^{m+n}\left|S_{kj}(\bar t)\right|,\quad \bar t\in\left[t_0,T\right]$$ – норма матрицы, подчинённая первой норме вектора. Тогда

$$\|S(t)\|=\max_{t\in[t_0,T]}\max_{1\le k\le m+n}\sum_{j=1}^{m+n}\left|s_{kj}(t)\right|=$$

$$=\max_{t\in[t_0,T]}\max\left(\max_{1\le k\le n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{jk}(t)b_{jk}v_k(t);\right.$$

$$\left.\max_{1\le k\le m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}(t)a_{ik}u_k(t)\right)\le\max_{t\in[t_0,T]}\max\left(\max_{1\le k\le n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{jk}(t)b_{jk};\right.$$

$$\left.\max_{1\le k\le m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}(t)a_{ik}\right)\le\max\left(\max_{1\le k\le n}\sum_{j=1}^{m}b_{jk};\max_{1\le k\le m}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\right)=L;\ L>0.$$

Отсюда $\left\|S(t)z^1-S(t)z^2\right\|\le L\left\|z^1-z^2\right\|$, т.е. условие Липшица выполняется с константой L. Таким образом утверждение 1 доказано и задача (9) имеет единственное решение, определённое на всём промежутке $[0,T]$, т.е. функционал в (1) определён при всех матричных функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, элементы которых $\alpha_{ji}(t)$ и $\beta_{ij}(t)$ являются кусочно-непрерывными функциями на промежутке $[0,T]$.

Замечание 1.1. При доказательстве утверждения 1 получено выражение для константы Липшица в явном виде через скорострельности боевых средств.

$$L=\max\left(\max_{1\le k\le n}\sum_{j=1}^{m}b_{jk};\max_{1\le k\le m}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\right).\qquad(10)$$

Утверждение 2. Если задача (1) имеет решение, то оно одноэкстремально по функции.

Доказательство. Из линейности по переменным $\alpha_{ji}(t)$ правых частей системы дифференциальных уравнений в (2) следует линейность по $\alpha(t)$ решения задачи Коши для системы (2), или для системы (9), т.е.

$$z\left[t,\lambda_1\alpha^1(t)+\lambda_2\alpha^2(t)\right]=\lambda_1 z\left[t,\alpha^1(t)\right]+\lambda_2 z\left[t,\lambda_2\alpha^2(t)\right],$$

где $\lambda_1+\lambda_2=1$; $\lambda_1\ge0$; $\lambda_2\ge0$, т.е.

$$y\left[t,\ \lambda_1\alpha^1(t)+\lambda_2\alpha^2(t)\right]=\lambda_1 y\left[t,\ \alpha^1(t)\right]+$$

$$+\lambda_2 y\left[t,\ \lambda_2\alpha^2(t)\right]\Rightarrow y_j\left[T,\ \lambda_1\alpha^1(t)+\lambda_2\alpha^2(t)\right]=$$

$$=\lambda_1 y_j\left[T,\ \alpha^1(t)\right]+\lambda_2 y_j\left[T,\ \lambda_2\alpha^2(t)\right],\ j=\overline{1,n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}w_j y_j\left[T,\lambda_1\alpha^1(t)+\lambda_2\alpha^2(t)\right]=\lambda_1\sum_{j=1}^{n}w_j y_j\left[T,\alpha^1(t)\right]+$$

$$+\lambda_2\sum_{j=1}^{n}w_j y_j\left[T,\ \alpha^2(t)\right]=\lambda_1 J\left[T,\ \alpha^1(t)\right]+\lambda_2 J\left[T,\ \alpha^2(t)\right]$$

для всех допустимых матричных функций $\alpha^1(t)$ и $\alpha^2(t)$. Так как линейный функционал является одновременно и выпуклым, то задача (1) представляет собой задачу минимизации выпуклого функционала на выпуклом множестве D:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}(t)=1;\quad i=\overline{1,m};\quad \alpha_{ji}(t)\ge0;\ j=\overline{1,n};\ i=\overline{1,m};$$

$$k_2\alpha_{ji_1}(t)-k_1\alpha_{ji_2}(t)=0;\quad \left(i_1,i_2\right)\in I_B,$$

поэтому всякая точка локального минимума $J\left[x^0;\alpha(t)\right]$ одновременно является точкой её глобального минимума на множестве допустимых управлений (10).

Соответствующие свойства имеют место и для задачи (3) , так как её отличие от задачи (1) состоит в том, что функционал в (3) определяется в начальный момент времени: $I\left[x^0;\alpha(t)\right]=\sum\limits_{i=1}^{m}c_i x_i(0)$, в то время как функционал в (1) определяется в конечный момент времени: $J\left[x^0;\alpha(t)\right]=\sum\limits_{i=1}^{m}w_j y_j(T)$.

Утверждение 3. Задачи (1) и (3) имеют единственные решения, определённые на всём промежутке $[0,T]$.

Доказательство. По теореме Веерштрасса непрерывный функционал, заданный на замкнутом ограниченном множестве, ограничен и достигает своего наименьшего и наибольшего значения. Функционалы в задачах (1) и (3) линейны по $\alpha(t)$, поэтому и непрерывны. Единственность решения следует из утверждения 2.

Выводы

1. Обоснована возможность решения задачи определения оптимального состава вооружения группировки войск, и задачи замены состава вооружения группировки войск, представляемой статической математической моделью, в которой целью операции является обеспечение максимума математического ожидания суммарного количества уничтоженных боевых средств противостоящей группировки, с учётом их важности, при заданном бюджете, ограничениях на количество средств поражения в условиях противодействия противника.

2. Обоснована также возможность решения задачи обеспечении минимальных суммарных стоимостных затрат на вооружение оперирующей группировки при условии достижения требуемого уровня математического ожидания количеств уничтоженных боевых средств каждого типа противоборствующей группировки в конце операции и наличия информации об управлении распределением боевых средств противника, при отсутствии данных о его состоянии в ходе операции у оперирующей группировки,

3. Учитывая тот факт, что в допущениях моделей рассматриваемых задач принято, что перенос огня с одной группы боевых средств на другую происходит мгновенно и скачкообразно, доказана необходимо брать кусочно-непрерывные функции в качестве управлений.

4. Доказано, что описываемые задачи имеют единственные решения, определённые на всём промежутке $[0, T]$ так как непрерывный функционал, заданный на замкнутом ограниченном множестве, ограничен и достигает своего наименьшего и наибольшего значения, а функционалы в описываемых задачах линейны по $\alpha(t)$, поэтому и непрерывны.

Список литературы

1. *Кононов В.Б. Теоретические основы математического моделирования ресурсного обеспечения в конфликтных ситуациях. Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук, Кононов Володимир Борисович. – Х.: НАКУ «ХАІ», 2010. – 369 с.*

2. *Кононов В.Б. Математические модели процессов военных действий и их применение для планирования и управления распределением боевых средств. Монография / В.Б. Кононов. – Х.: МОУ, ХУ ВС, 2007. – 280 с.*

3. *Кононов В.Б. Оперативное управление распределением ресурсов в ходе конфликтной ситуации / В.Б. Кононов, Ю.И Кушнерук, О.В. Коваль // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2010. – № 3(15) – С.199 – 202.*

4. *Кононов В.Б. Математические модели определения оптимального состава вооружений оперирующей группировки / В.Б. Кононов, Ю.И Кушнерук, О.В. Коваль // Системи управління, навігації та зв'язку. – К.: ЦНДІ НіУ, 2012. – Вип. 2(22). – С. 138-140.*

5. *Кононов В.Б. Формализация задач определения оптимального состава вооружения оперирующей группировки / В.Б. Кононов., Ю.И. Кушнерук, О.В. Коваль // Збірник наукових праць ХУПС. – Х.: ХУПС, 2012. – Вип. 3(32). – С. 118-121.*

Поступила в редколлегию 21.06 2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.В. Худов, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ОБГРУНТУВАННЯ МОЖЛИВОСТІ РІШЕННЯ ЗАДАЧ УПРАВЛІННЯ УГРУПУВАНЯ ВІЙСЬК

В.Б. Кононов, Ю.И. Кушнерук, А.В. Коваль

Обгрунтоване можливості вирішення задачі оптимального управління розподілення бойових засобів в ході бойових дій.
Ключові слова: *склад озброєння, угрупування військ, бюджетні обмеження. оптимальне управління.*

GROUND OF POSSIBILITY OF DECISION OF TASKS OF MANAGEMENT OF UGRUPUVANYA OF TROOPS

V.B. Kononov, Yu.I. Kushneruk, A.V. Koval'

It is grounded possibility of decision of task of optimum management of distributing of battle facilities during battle actions.
Keywords: *composition of armament, groupment of troops, budget constraints. optimum .*