

УДК 514.753

А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, В.О. Синявин

Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков

## ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ 3D-ОБЪЕКТОВ

Рассматривается информационная система 3D-Clustering, предназначенная для решения задач оптимальной кластеризации 3D  $\phi$ -объектов. Приводится архитектура системы, основанная на современных методах математического моделирования оптимизационных задач размещения.

**Ключевые слова:** базовые 3D-объекты,  $\phi$ -функции, математическая модель, оптимальная кластеризация.

### Введение

Оптимизационные задачи размещения (Packing and Cutting [1, 2]), в частности, задачи кластеризации, относятся к классу NP-сложных задач. Эффективное решение задач данной предметной области обусловлено возможностью построения математических моделей в виде задач условной оптимизации [3].

Задача оптимальной кластеризации объектов сводится к задаче включения ориентированных 3D-объектов  $A$  и  $B$  в контейнер  $\Omega$  с целью минимизации заданного критерия качества  $F$ , при условии, что  $\text{int } A \cap \text{int } B = \emptyset$ , где  $\text{int } A$  – внутренность объекта  $A$ . В пределах данного исследования, полагаем  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ ;  $B = \bigcup_{j=1}^n B_j$ , где  $A_i, B_j$  принадлежат к классу  $\phi$ -объектов [2] (рис. 1),  $A_i \in \mathfrak{S}$ ,  $B_j \in \mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{S}$  – семейство базовых 3D объектов.

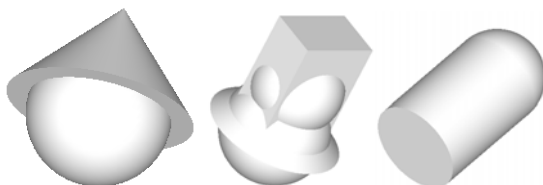


Рис. 1. Примеры составных 3D  $\phi$ -объектов

В качестве базовых 3D-объектов рассматриваются: шар  $S$ , прямой параллелепипед  $P$ , прямой круговой цилиндр  $C$ , конус  $T$  (возможны две ориентации, при этом основание конуса  $T$  параллельно плос-

кости  $OXY$ ), усечённый конус  $\bar{T}$  (возможны две ориентации, при этом основания конуса  $\bar{T}$  параллельны плоскости  $OXY$ ), шаровой сегмент  $D$  (возможны две ориентации, при этом основание сегмента  $D$  параллельно плоскости  $OXY$ ), заданные своими метрическими характеристиками:  $m_S = (r)$ , где  $r$  радиус шара  $S$ ;  $m_P = (a, b, h)$ , где  $2a$  длина,  $2b$  ширина,  $2h$  высота параллелепипеда  $P$ ;  $m_C = (r, h)$ , где  $2h$  высота,  $r$  радиус цилиндра  $C$ ;  $m_T = (r, h)$ , где  $h$  высота,  $r$  радиус основания конуса  $T$ ;  $m_{\bar{T}} = (h, r_1, r_2)$ , где  $h$  высота,  $r_1$  и  $r_2$  радиусы нижнего и верхнего оснований  $\bar{T}$  ( $r_1 > r_2$  или  $r_1 < r_2$ );  $m_D = (r, h)$ , где  $r$  радиус образующего шара,  $h$  высота  $D$ . Определим объект  $D$  в зависимости от метрических характеристик следующим образом:  $D = S \cap T$ , если  $h < r$  (рис. 2, а);  $D = S \cap C$ , если  $h = r$  (рис. 2, б);  $D = S \cap \bar{T}$ , если  $h > r$  (рис. 2, в). Начало собственной системы координат (в дальнейшем, полюс) базовых объектов находится: в центре симметрии для центрально симметричных базовых объектов; в центре основания конуса  $T$ ; в центре основания усеченного конуса  $\bar{T}$ ; в центре образующего шара сегмента  $D$ . Положение ориентированного объекта  $A$  ( $B$ ) в пространстве  $R^3$  однозначно определяет вектор трансляции  $u_1(u_2)$ , где  $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

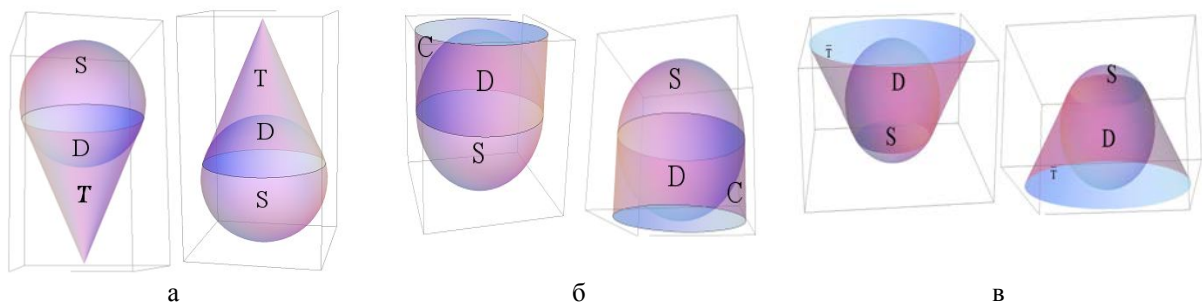


Рис. 2. Виды шарового сегмента: а –  $h < r$ ; б –  $h = r$ ; в –  $h > r$

### Результаты исследований

Пусть  $u = (a, b, c, u_1, u_2) \in R^\sigma$  – вектор переменных, где  $(a, b, c)$  – переменные метрические характеристики контейнера  $\Omega \in \{P\}$ ,  $u_1, u_2$  – переменные параметры размещения phi-объектов A и B,  $R^\sigma$  – арифметическое евклидово пространство.

В качестве функции цели F рассматриваются:  $F_1 = a \cdot b \cdot c$ ;  $F_2 = a + b + c$ .

Как известно [3], математическая модель задачи оптимальной кластеризации имеет вид

$$\min_{u \in W \subset R^\sigma} F(u), \quad (1)$$

где  $W = \{u \in R^\sigma : \Lambda(u) \geq 0\}$ ;

$$\Lambda(u) = \min\{\Phi^{AB}, \Phi^{\Omega^*A}, \Phi^{\Omega^*B}\}, \quad (2)$$

$\Phi^{AB}$  – phi-функция, описывающая условие непересечения объектов A и B;  $\Phi^{\Omega^*A}, \Phi^{\Omega^*B}$  – phi-функции, моделирующие условие включения объектов A и B в контейнер  $\Omega$ , где  $\Omega^* = R^3 \setminus \text{int} \Omega$ . В статье [3] определен полный класс phi-функций для объектов S, P, C, T, P\*. Phi-функции для усеченных конусов приведены в работе [4].

В этой связи определим семейство phi-функций для шарового сегмента D и базовых объектов:

$$\Phi^{DZ} = \max\{\Phi^{TZ}, \Phi^{SZ}\}, \text{ если } h < r;$$

$$\Phi^{DZ} = \max\{\Phi^{CZ}, \Phi^{SZ}\}, \text{ если } h = r;$$

$$\Phi^{DZ} = \max\{\Phi^{\bar{T}Z}, \Phi^{SZ}\}, \text{ если } h > r;$$

$$\Phi^{P^*D} = \min\{\Phi^{P_iD}, i = 1, \dots, 6\},$$

где  $Z \in \{P, S, C, T, \bar{T}, D\}$ ;  $P^* = R^3 \setminus \text{int} P$ ,  $P^* = \bigcup_{i=1}^6 P_i$ ,

$$P_1 = \{(x, y, z) \in R^3 : x \geq a\}; P_2 = \{(x, y, z) \in R^3 : y \geq b\};$$

$$P_3 = \{(x, y, z) \in R^3 : z \geq c\}; P_4 = \{(x, y, z) \in R^3 : x \leq -a\};$$

$$P_5 = \{(x, y, z) \in R^3 : y \leq -b\}; P_6 = \{(x, y, z) \in R^3 : z \leq -c\}.$$

Следуя [2], имеем:

$$\Phi^{AB} = \min\{\Phi_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\};$$

$$\Phi^{\Omega^*A} = \min\{\Phi_i, i = 1, \dots, m\}; \Phi^{\Omega^*B} = \min\{\Phi_j, j = 1, \dots, n\},$$

где  $\Phi_{ij}$  – phi-функция для базовых объектов  $A_i \in \mathfrak{Z}$  и  $B_j \in \mathfrak{Z}$ ;  $\Phi_i$  – phi-функция для базового объекта  $A_i \in \mathfrak{Z}$  и  $\Omega^*$ ;  $\Phi_j$  – phi-функция для базового объекта  $B_j \in \mathfrak{Z}$  и  $\Omega^*$ .

Из соотношения (2) следует, что  $\Lambda(u) \geq 0$  когда:  $\Phi^{AB} \geq 0$ ;  $\Phi^{\Omega^*A} \geq 0$  и  $\Phi^{\Omega^*B} \geq 0$ .

Каждая из phi-функций в (2) является композицией минимумов базовых phi-функций.

По аналогии с двумерным случаем [5], каждому phi-неравенству  $\Phi^{AB} \geq 0$ ,  $\Phi^{\Omega^*A} \geq 0$ ,  $\Phi^{\Omega^*B} \geq 0$  поставим в соответствие phi-дерево, концевым вер-

шинам которого соответствуют системы, в общем случае, нелинейных неравенств  $f_k(u) \geq 0$ . Обозначим phi-дерева для  $\Phi^{AB} \geq 0$  и

$\Phi^{\Omega^*} = \min\{\Phi^{\Omega^*A}, \Phi^{\Omega^*B}\} \geq 0$  через  $\mathfrak{Z}'$  и  $\mathfrak{Z}''$  соответственно. Верхняя оценка числа концевых вершин дерева решений  $\mathfrak{Z}$  задачи (1) – (2) равно  $\eta = \eta' \cdot (\eta'')^2$ , где  $\eta'$  – верхняя оценка числа концевых вершин  $\mathfrak{Z}'$  для пары объектов A и B, а  $\eta''$  – верхняя оценка числа концевых вершин  $\mathfrak{Z}''$  для объектов A и  $\Omega^*$  (B и  $\Omega^*$ ). Обозначим концевые вершины дерева  $\mathfrak{Z}$  через  $v_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \eta$ . Каждой вершине  $v_k$  соответствует система неравенств

$$f_k(u) \geq 0. \text{ Таким образом, } W = \bigcup_{k=1}^{\eta} W_k, \text{ где } W_k$$

описывается системой  $f_k(u) \geq 0$ .

Задача (1) – (2) сводится к следующей оптимизационной задаче:

$$u^* = \min\{u_1^*, u_2^*, \dots, u_\eta^*\}, \quad (3)$$

$$\text{где } u_k^* = \arg \min_{u \in W_k \subset R^\sigma} F(u), \quad k = 1, 2, \dots, \eta. \quad (4)$$

В общем случае число локальных экстремумов в (4) значительно меньше, чем  $\eta$ . Это обусловлено следующими особенностями задачи (3) – (4): а) значительная часть концевых вершин из множества  $\{v_k, k = 1, 2, \dots, \eta\}$  соответствует несовместным системам  $f_k(u) \geq 0$  и, как следствие,  $W_k = \emptyset$ ; б) во многих случаях,  $u_{k_1}^*$  и  $u_{k_2}^*$ ,  $k_1 \neq k_2$ , из (4) могут совпадать; в) не все точки локальных экстремумов  $u_k^*, k = 1, 2, \dots, \eta$  задачи (4), являются локальными экстремумами задачи (1) – (2), в частности возможны случаи, когда  $W_{k_2} \subset W_{k_1}$ ,  $k_1 \neq k_2$ .

Информационная система 3D-Clustering содержит в себе следующие логические модули:

- модуль ввода данных с возможностью выбора функции цели;
- модуль анализа исходных данных;
- модуль формирования составных 3D-объектов на основании исходных данных о базовых 3D-объектах;
- модуль, содержащий библиотеку базовых phi-функций;
- модуль генерации пространства решений (phi-неравенств);
- модуль локальной оптимизации
- модуль глобальной оптимизации
- модуль рендеринга полученных результатов.

На рис. 3 представлена UML диаграмма взаимодействия пользователя с системой.

Для решения задач нелинейной оптимизации (4) используется *third-party-component* Microsoft Solver Foundation [[179](http://msdn.microsoft.com/en-</a></p>
</div>
<div data-bbox=)

us/devlabs/hh145003.aspx]. Solver Foundation предназначен для решения задач оптимизации на базе технологии .NET, имеет мощную систему отчетности и анализа, встроенный декларативный язык OML.

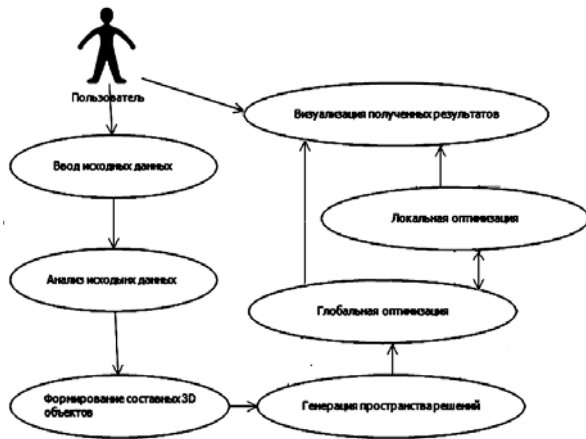


Рис. 3. UML диаграмма взаимодействия пользователя с системой 3D-Clustering

Поскольку число  $\eta$  локальных экстремумов достаточно велико, в системе 3D-Clustering предусмотрена возможность параллельного программирования (поиска локальных экстремумов на кластере). Для этого используется паттерн Map-reduce [http://code.google.com/edu/parallel/mapreduce-tutorial.html#MapReduce] и технология Windows Communication Foundation [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/dd456779.aspx]. В качестве кластера могут быть использованы любые вычислительные мощности с установленной библиотекой Solver Foundation и сетевым доступом.

Для рендеринга полученных результатов применяется технология Windows Presentation Foundation [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/ms754130.aspx] и open-source библиотека HelixToolkit [http://helixtoolkit.codeplex.com/], которая позволяет в режиме реального времени моделировать и визуализировать 3D объекты.

Ниже приведен пример решения задачи оптимальной кластеризации 3D составных объектов, реализованный системой 3D-Clustering.

Пример. Функция цели  $F = F_2$ . Контейнер: параллелепипед  $P$ .

$$\text{Объект A: } A = \bigcup_{i=1}^2 C_i(r_i, h_i, v_i);$$

$$r_1 = 1, h_1 = 1.5, v_1 = (0, 0, 0);$$

$$r_2 = 2, h_2 = 2, v_2 = (0, 0, 1);$$

$$\text{Объект B: } B = \bigcup_{i=1}^2 P(a_i, b_i, c_i, v_i)$$

$$(a_1, b_1, c_1) = (4, 1, 1), v_1 = (0, 0, 0);$$

$$(a_2, b_2, c_2) = (3, 1, 1), v_1 = (0.5, 0, 1).$$

Число конечных вершин дерева решений:  $\eta = 104976$

Оптимальное решение:

$$F(u^*) = 14.5; u^* = (a^*, b^*, c^*, u_1^*, u_2^*) \in R^9;$$

$$(a^*, b^*, c^*) = (7, 4, 3.5);$$

$$u_1^* = (0, 0, -1.5000001621168701);$$

$$u_2^* = (3.000100016211687, 0, -1.02118200016021).$$

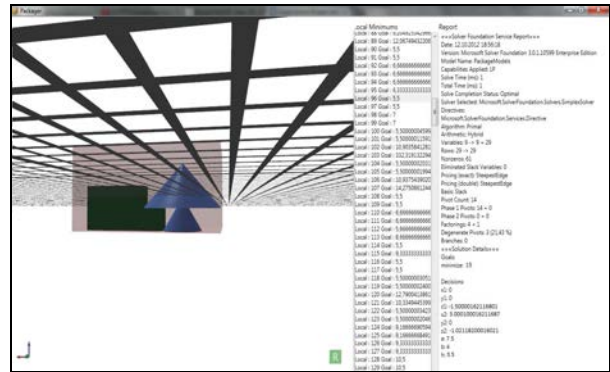


Рис. 4. Размещение объектов A и B, соответствующее точке  $u^*$

### Выводы

Информационная система 3D-Clustering может быть использована для решения оптимизационных 3D-задач упаковки, которые имеют широкий спектр применения при исследовании актуальных проблем биологии, медицины, материаловедения, в нанотехнологиях, робототехнике, в задачах распознавания образов, в химической промышленности, энергетике, машино-, судо-, авиационной, строительстве и т.д.

### Список литературы

1. Wascher G, Hauner H and Schumann H (2007) An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research* 183(3, 16): 1109-1130.
2. N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova. *Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem// Computational Geometry: Theory and Applications*, vol. 43:5 (2010), pp. 535-553.
3. Scheithauer G, Stoyan Yu and Romanova T (2005) *Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects*. *Cyber. Systems Anal* 41: 332-342.
4. Стоян Ю.Г., Евсеева Л.Г., Романова Т.Е. // Доклады НАН Украины. – 2005. – № 7. – С. 30-35.
5. G. Scheithauer, Y. Stoyan, J. Bennell, T. Romanova, A. Pankratov (2012) *Containment of a pair of rotating objects within a container of minimal area or perimeter/ Preprint MATH-NM-02-2012, TU Dresden.*

Поступила в редколлегию 25.07.2012

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

**ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЇ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ 3D ОБ'ЄКТІВ**

О.В. Панкратов, Т.Є. Романова, В.О. Синявін

*Розглядається інформаційна система 3D-Clustering, призначена для вирішення задач оптимальної кластеризації 3D складених  $\phi$ -об'єктів. Приводиться архітектура системи, заснована на сучасних методах математичного моделювання оптимізаційних задач розміщення.*

**Ключові слова:** базові 3D-об'єкти,  $\phi$ -функції, математична модель, оптимальна кластеризація.

**INFORMATION SYSTEM FOR SOLVING PROBLEMS OF OPTIMAL CLUSTERING OF 3D-OBJECTS**

A.V. Pankratov, T.E. Romanova, V.O. Sinyavin

*The paper considers information system 3D-Clustering. The system is developed for solving problems of optimal clustering of 3D composed  $\phi$ -objects. Software architecture of the system is introduced. The architecture is based on state-of-art methods of mathematical modeling of optimization placement problems.*

**Kew words:** basic 3D-objects,  $\phi$ -functions, mathematical model, optimal clustering.