

УДК 339.175

Г.В. Іванець<sup>1</sup>, Ю.І. Євдокименко<sup>1</sup>, О.Г. Марченко<sup>2</sup>, О.А. Наконечний<sup>3</sup><sup>1</sup>Харківський торгово-економічний інститут КНТЕУ, Харків<sup>2</sup>Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків<sup>3</sup>Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків

## АЛГОРИТМ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ПРОГНОЗУ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ НА ОСНОВІ БАГАТОФАКТОРНОЇ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ ЗА РАХУНОК ПЕРЕДБАЧЕННЯ ПОХИБОК МОДЕЛІ І УТОЧНЕННЯ ОЦІНОК ЇЇ ПАРАМЕТРІВ НА ОСНОВІ ЗВАЖЕНОГО МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Прогнозування значення економічних показників здійснюється на основі вивчення закономірностей його зміни за статистичними даними. Математична модель, яка відображає залежність деякого економічного показника від множини інших економічних факторів, завжди супроводжується наявністю похибки за рахунок випадкових величин, які не спостерігаються. У статті розглянута можливість підвищення точності прогнозу економічних показників на основі багатофакторної лінійної моделі за рахунок передбачення похибок моделі, запропоновано алгоритм визначення прогнозного значення економічних показників при заданих значеннях незалежних інших економічних факторів, проведена порівняльна оцінка точності прогнозу.

**Ключові слова:** багатофакторна лінійна регресійна модель, метод найменших квадратів, зважений метод найменших квадратів, точність прогнозування, алгоритм визначення прогнозного значення.

### Вступ

**Загальна постановка проблеми.** Прогнозування майбутнього значення будь-якого економічного показника ( $y$ ) здійснюється на основі вивчення закономірностей зміни його в минулому за наявними статистичними даними. Математична модель, яка відображає залежність економічних показників від інших чинників, завжди супроводжується похибками за рахунок випадкових величин, які не спостерігаються. Виникає проблема зменшення величини випадкової складової моделі, а значить і підвищення точності прогнозу.

**Мета статті.** Розробка алгоритму підвищення точності прогнозу економічних показників на основі багатофакторної лінійної моделі за рахунок передбачення похибок моделі і уточнення оцінок параметрів її на основі зваженого методу найменших квадратів.

### Викладення матеріалів досліджень

Нехай узагальнена багатофакторна лінійна регресійна модель, що відображає залежність деякого економічного показника ( $y$ ) від множини економічних факторів ( $x_1, x_2, \dots, x_m$ ) може бути записана у вигляді [1–3]:

$$y = M(y/x_1, x_2, \dots, x_m) + \varepsilon = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + \varepsilon, \quad (1)$$

де  $y$  – залежна змінна (економічний показник),  $x_1, x_2, \dots, x_m$  – незалежні змінні (економічні фактори),  $\beta_1$  – параметри моделі,  $\varepsilon$  – неспостережана випадкова величина,

$$M(y/x_1, x_2, \dots, x_m) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m -$$

умовне математичне очікування залежної змінної  $y$ , при умові, що незалежні змінні прийняли відповідні значення, тобто регресія  $y$  на  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

Припустимо, що ми маємо деяку вибірку (таблицю) розмірністю  $n$  спільних значень  $m+1$  економічних показників, один з яких приймається лінійно залежним від решти  $m$  незалежних змінних  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . На відміну від узагальненої регресійної моделі вибіркова модель будується для певної вибірки. Невідомі параметри вибіркової моделі є випадковими величинами, математичне очікування яких дорівнює параметрам узагальненої моделі. Вибіркова лінійна багатофакторна модель має такий вигляд [1, 3]:

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_m x_{mi} + e_i, \quad (2)$$

де  $b_i$  – оцінки невідомих параметрів  $\beta_i$ ;  $e_i$  – вектор випадкових величин (залишків або похибок) моделі.

Для отримання оцінок  $b_i$  застосовують метод найменших квадратів (МНК) на випадок багатофакторної регресії, який дозволяє мінімізувати суму квадратів відхилень від одержаних в результаті спостережень даних [2, 4, 5]. В цьому випадку вектор

$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$  оцінок параметрів моделі розмірністю

$[(m+1) \times 1]$  знаходиться таким чином:

$$B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y, \quad (3)$$

де  $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$  – матриця розмірністю

$[n \times (m+1)]$  складена із вибірових значень незалеж-

них змінних з урахуванням коефіцієнта  $b_0$  вибіркової моделі;  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$  – вектор розмірності  $(n \times 1)$  вибірових значень залежної змінної.

Прогнозне значення залежної змінної  $y$  при заданих значеннях незалежних змінних  $x_i$  визначається таким чином:

$$y_{\text{пр}i} = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_m x_{mi} \quad (4)$$

Точність прогнозування характеризується ступенем відповідності величини економічного показника, одержаного в результаті прогнозу, і дійсної величини економічного показника [3, 4]. Точність прогнозу будемо вимірювати величиною модуля похибки, яка дорівнює модулю різниці між величиною  $y_{\text{пр}i}$ , що одержана в результаті прогнозу, і дійсною величиною  $y_i$ :

$$\Delta = |e_i| = |y_i - y_{\text{пр}i}| \quad (5)$$

Для зменшення похибки прогнозу зробимо

$$\text{де } X^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0 + a_1 \cdot x_{11} + \dots + a_m \cdot x_{m1}} & \frac{x_{11}}{a_0 + a_1 \cdot x_{11} + \dots + a_m \cdot x_{m1}} & \dots & \frac{x_{1m}}{a_0 + a_1 \cdot x_{11} + \dots + a_m \cdot x_{m1}} \\ \frac{1}{a_0 + a_1 \cdot x_{12} + \dots + a_m \cdot x_{m2}} & \frac{x_{21}}{a_0 + a_1 \cdot x_{12} + \dots + a_m \cdot x_{m2}} & \dots & \frac{x_{2m}}{a_0 + a_1 \cdot x_{12} + \dots + a_m \cdot x_{m2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_0 + a_1 \cdot x_{1n} + \dots + a_m \cdot x_{mn}} & \frac{x_{n1}}{a_0 + a_1 \cdot x_{1n} + \dots + a_m \cdot x_{mn}} & \dots & \frac{x_{nm}}{a_0 + a_1 \cdot x_{1n} + \dots + a_m \cdot x_{mn}} \end{pmatrix}$$

$$Y^* = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{a_0 + a_1 \cdot x_{11} + \dots + a_m \cdot x_{m1}} \\ \frac{y_2}{a_0 + a_1 \cdot x_{12} + \dots + a_m \cdot x_{m2}} \\ \dots \\ \frac{y_n}{a_0 + a_1 \cdot x_{1n} + \dots + a_m \cdot x_{mn}} \end{pmatrix}$$

Прогнозне значення залежної змінної  $y$  при заданих значеннях незалежних змінних  $x_i$  в цьому випадку визначається п'ятим чином:

$$y_{\text{пр}i}^* = b_0^* + b_1^* x_{1i} + b_2^* x_{2i} + \dots + b_m^* x_{mi} \quad (9)$$

Таким чином, алгоритм визначення прогнозного значення залежної змінної  $y$  при заданих значеннях незалежних змінних  $x_i$  з врахуванням прогнозу похибок і уточнення оцінок параметрів вибіркової лінійної багатофакторної моделі на основі зваженого МНК зводиться до наступного:

1. На основі вибірових даних отримують оцінки параметрів вибіркової багатофакторної моделі  $b_i$  застосовуючи МНК на випадок багатофакторної регресії (вираз 3).

2. Обчислюють прогнозні значення залежної змінної  $y$  при заданих значеннях незалежних змінних  $x_i$  (вираз 4).

уточнення оцінок параметрів вибіркової лінійної багатофакторної моделі з врахуванням прогнозу похибок на основі зваженого методу найменших квадратів. Для цього на першому етапі на основі вибірки знайдемо матрицю абсолютних похибок:

$$E = \begin{pmatrix} |y_1 - y_{\text{пр}1}| \\ \dots \\ |y_n - y_{\text{пр}n}| \end{pmatrix} \quad (6)$$

Вибіркова лінійна багатофакторна модель значень модуля похибок має вигляд:

$$|e_i| = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \dots + a_m x_{mi} \quad (7)$$

Для отримання оцінок  $a_i$  застосовують метод найменших квадратів (МНК) на випадок багатофакторної регресії. Уточнені оцінки параметрів вибіркової лінійної багатофакторної моделі з врахуванням прогнозу модуля похибок знаходяться на основі зваженого МНК п'ятим чином:

$$B^* = (X^{*T} \cdot X^*)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot Y^* \quad (8)$$

3. На основі вибірових даних формують матрицю абсолютних похибок  $E$  (вираз 6).

4. Знаходять оцінки параметрів вибіркової багатофакторної моделі абсолютних похибок  $a_i$  (вираз 7).

5. Знаходять уточнені оцінки параметрів вибіркової багатофакторної моделі  $b_i^*$  з врахуванням прогнозу модуля похибок (вираз 8).

6. Обчислюють уточнені прогнозні значення залежної змінної  $y$  при заданих незалежних змінних  $x_i$  із врахуванням модуля похибки (вираз 9).

Покажемо на прикладі можливість підвищення точності прогнозу економічного показника на основі статистичних даних з врахуванням похибки прогнозу. Нехай в результаті дослідження залежності деякого економічного показника ( $y$ ), який приймається лінійно залежним від решти незалежних змінних  $x_1, x_2, x_3$ , одержано дані, наведені в табл. 1.

На основі цих даних зробимо прогноз 18 значень економічного показника. В даному випадку вибіркова лінійна багатофакторна модель має вигляд:

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + e_i$$

Прогнозне значення залежної змінної  $y$  при заданих значеннях незалежних змінних  $x_i$  визначається таким чином:

$$y_{\text{пр}i} = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 \cdot x_{3i}$$

Таблиця 1

Результати досліджень економічного показника (у)

№ з/п	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	у
1	2	10	100	7,653
2	8	5	400	14,34
3	4	32	200	9,894
4	8	20	600	15,72
5	9	5	600	19,49
6	12	20	800	19,33
7	10	12	400	12,63
8	5	28	200	10,52
9	7	15	250	10,07
10	7	30	250	9,78
11	3	50	100	6,61
12	6	70	150	5,89
13	1	30	220	10,25
14	15	25	900	21,02
15	14	46	850	18,73
16	11	12	700	21,35
17	7	17	520	15,36
18	4	23	300	11,95

У відповідності із запропонованим алгоритмом оцінки параметрів b<sub>i</sub> багатofакторної лінійної регресії одержимо на основі вибіркового даних, застосовуючи метод найменших квадратів (табл. 2).

Таблиця 2

Значення оцінки параметрів b<sub>i</sub>

b <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>
8,102074	-0,16515	-0,06261	0,019216

Тоді прогнози значення економічного показника у для 18 статистичних даних без врахування похибки моделі визначаються таким чином:

$$y_{\text{прі}} = 8,102074 - 0,16515 \cdot x_{1i} - 0,06261 \cdot x_{2i} + 0,019216 \cdot x_{3i}.$$

В якості оцінки точності прогнозу візьмемо суму модулів похибок за статистичними даними:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{18} |y_{\text{прі}} - y_i| = 13,299.$$

Тепер знайдемо прогнози значення економічного показника у для 18 статистичних даних із врахування модуля похибки моделі. Для вибіркової лінійної багатofакторної моделі прогнози значення модуля похибок визначається таким чином:

$$|e_{\text{прі}}| = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + a_3 x_{3i}.$$

Оцінки параметрів a<sub>i</sub> багатofакторної лінійної регресії модуля похибок отримаємо на основі вибіркового даних, застосовуючи метод найменших квадратів (табл. 3).

Таблиця 3

Значення оцінки параметрів a<sub>i</sub>

a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>
0,966954	-0,00874	-0,01585	0,000556

З врахуванням цього уточнені оцінки параметрів b<sub>i</sub>\* багатofакторної лінійної регресії одержимо на основі вибіркового даних, застосовуючи зважений метод найменших квадратів:

Таблиця 4

Значення оцінки параметрів b<sub>i</sub>\*

b <sub>0</sub> *	b <sub>1</sub> *	b <sub>2</sub> *	b <sub>3</sub> *
8,227998	-0,15896	-0,0596	8,227998

На основі цього знайдемо прогнози значення економічного показника у для 18 статистичних даних із врахування похибки моделі наступним чином:

$$y_{\text{прі}}^* = 8,227998 - 0,15896 \cdot x_{1i} - 0,0596 \cdot x_{2i} + 0,01857 \cdot x_{3i}.$$

Оцінимо точність прогнозу за статистичними даними:

$$\Delta^* = \sum_{i=1}^{18} |y_{\text{прі}}^* - y_i| = 12,344.$$

При цьому відносно значення похибки прогнозу при застосуванні МНК і зваженого МНК для оцінки параметрів багатofакторної лінійної регресії вдалося зменшити майже на 7,2%:

$$\left| \frac{\Delta - \Delta^*}{\Delta} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{13,299 - 12,344}{13,299} \right| \cdot 100\% \approx 7,2\%.$$

## Висновки

Розглянутий алгоритм підвищення точності прогнозу економічних показників на основі багатofакторної лінійної моделі за рахунок передбачення похибок моделі і уточнення оцінок параметрів її за зваженим методом найменших квадратів дозволяє, як показали дослідження, зменшити відносну похибку прогнозу майже на 7,2%. В якості критерію для порівняльного аналізу було вибрано суму модулів похибок прогнозу за статистичними даними.

## Список літератури

1. Грубер Й. *Економетрія: Вступ до множинної регресії та економетрії: Навчальний посібник, Т. 2* / Й. Грубер. – К.: Нічлава, 1988. – 408 с.
2. Джонсон Дж. *Економетрические методы: Учебник* / Дж. Джонсон. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.
3. Ліцинський О.Л. *Економетрія: Навчальний посібник* / О.Л. Ліцинський, В.В. Рязанцева, О.О. Юнькова. – К.: МАУП, 2003. – 208 с.
4. Иберла К. *Факторный анализ* / К. Иберла. – М.: Статистика, 1980. – 398 с.
5. Абезгаус Г.Г. *Справочник по вероятностным расчетам* / Г.Г. Абезгаус, А.П. Тронь, Ю.Н. Копенкин, И.А. Коровина. – М., 1970. – 536 с.

Надійшла до редколегії 25.04.2013

**Рецензент:** канд. екон. наук проф. В.І. Ганін, Харківський торгово-економічний інститут Київського національного торгово-економічного університету, Харків.

**АЛГОРИТМ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ  
НА ОСНОВЕ МНОГОФАКТОРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ЗА СЧЕТ  
ПРЕДВИДЕНИЯ ОШИБОК МОДЕЛИ И УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК ЕЕ ПАРАМЕТРОВ  
НА ОСНОВЕ ВЗВЕШЕННОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

Г.В. Иванец, Ю.И. Евдокименко, О.Г. Марченко, А.А. Наконечный

*Прогнозирование значений экономических показателей осуществляется на основе изучения закономерностей их изменений по статистическим данным. Математическая модель, отображающая зависимость некоторого экономического показателя от множества других экономических факторов, всегда сопровождается ошибками за счет не наблюдаемых случайных величин. В статье рассмотрена возможность повышения точности прогноза экономических показателей на основе многофакторной линейной модели за счет предвидения ошибок модели, предложен алгоритм определения прогнозного значения экономических показателей при заданных значениях независимых других экономических факторах, проведена сравнительная оценка точности прогноза.*

**Ключевые слова:** многофакторная линейная регрессионная модель, метод наименьших квадратов, взвешенный метод наименьших квадратов, точность прогнозирования, алгоритм определения прогнозного значения.

**ALGORITHM INCREASE EXACTNESS PROGNOSTICATION ECONOMIC INDICATORS ON THE BASIS  
OF MULTIVARIABLE LINEAR MODEL DUE TO THE FORESIGHT ERRORS MODEL AND CLARIFICATION  
ESTIMATIONS OF ITS PARAMETERS ON THE BASIS THE SELF-WEIGHTED LEAST-SQUARES METHOD**

G.V. Ivanets, Y.I. Evdokimenko, O.G. Marchenko, A.A. Nakonechnyy

*Prognostication values an economic indicator is carried out on the basis study conformities to the law of their changes from statistical information. A mathematical model, representing dependence some economic indicator on the great number other economic factors, is always accompanied errors due to the not looked after casual sizes. In the article possibility increase exactness prognosis economic indicators is considered on the basis multivariable linear model due to the foresight model errors, the algorithm determination prognosis value economic indicators is offered at the set values independent other economic factors, the comparative estimation exactness prognosis is conducted.*

**Keywords:** multivariable linear regressive model, least-squares method, self-weighted least-squares method, exactness prognostication, algorithm determination of prognosis value.