УДК 621.321

С.И. Приходько, М.С. Курцев, Хамзе Билал

Украинская государственная академия железнодорожного транспорта

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ КАСКАДНЫХ КОДОВ

Статья посвящена дальнейшему исследованию спектральных свойств кодовых слов обобщенных каскадных кодов. Анализ известных подходов к описанию спектральных свойств и исследованию структурных и алгебраических свойств простейших каскадных кодовых конструкций показал, что использование многомерных спектров является наиболее удачным для описания. В статье предложен математический аппарат, позволяющий исследовать спектральные свойства обобщенных каскадных кодов.

Ключевые слова: *обобщенный каскадный код, спектральные свойства кодов, многомерные спектры, преобразование Фурье.*

Введение

Проблема повышения верности обусловлена не соответствием между требованиями, предъявляемыми при передачи данных и качеством реальных каналов связи. В сетях передачи данных требуется обеспечить верность не хуже 10^{-6} - 10^{-9}, а при использовании реальных каналов связи и простого (первичного) кода указанная верность не превышает 10^{-2}-10^{-5}. Одним из путей решения задачи повышения верности в настоящее время является использование специальных процедур, основанных на применении помехоустойчивых (корректирующих) кодов. Для исправления ошибок возникающих в результате передачи дискретных сообщений по каналам связи применяется помехоустойчивое кодирование.

Как известно из теоремы Шеннона высокой эффективностью обладают коды большой длины. Одним из методов построения кодов большой длины является метод последовательного каскадирования, предложенный Д. Форни. Метод позволяет последовательно комбинировать несколько кодов. Наиболее распространенной является схема с двумя уровнями. В качестве внешнего обычно используется код Рида-Соломона, в качестве внутреннего можно выбирать различные коды. Наибольший выигрыш получается, если в качестве внутренних кодов использовать сверточные коды. При этом удается построить каскадный код с высокими корректирующими способностями, с большой длиной блока или длиной кодового ограничения и с относительно простыми методами декодирования.

В теории помехоустойчивого кодирования известны так называемые обобщенные каскадные коды, введенные Э.Л. Блохом и В.В. Зябловым. Такие коды имеют более двух ступеней кодирования и являются общим классом каскадных кодов [2, 3].

Целью статьи является дальнейшее исследование спектральных свойств кодовых слов обобщенных каскадных кодов [1] и предложение математического аппарата, позволяющего исследовать спектральные свойства обобщенных каскадных кодов.

Основная часть

Рассмотрим математический аппарат многомерных спектров и особенности его использования для описания каскадных кодов в спектральной области. Алгебраическую структуру кодового слова обобщенного каскадного кода представим в виде прямоугольной двоичной матрицы из n_1 строк и n_2 столбцов. В случае двумерного итерированного двоичного кода такая структура сводится к следующей схеме кодирования (рис. 1) [2, 3].

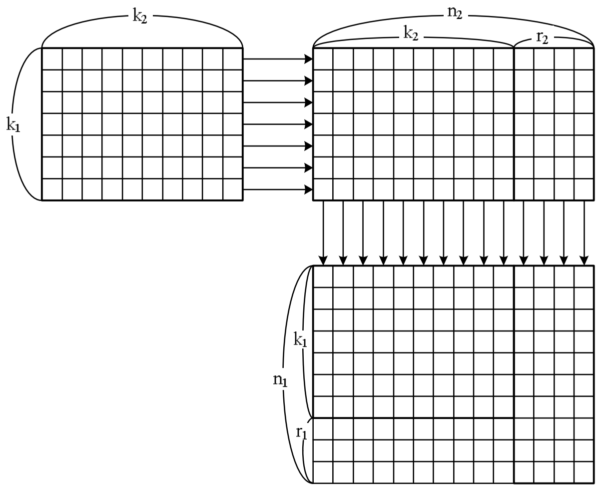

Рис. 1. Схема кодирования итерированного кода

Информационные символы $I = \{I_1, I_2, ..., I_k\}$ разбиваются на k_2 подблоков, содержащих по k_1 двоичных символов в каждом, т.е., выполняется равенство $k = k_1 * k_2$. Информационные символы записываются в виде матрицы размером $k_1 \times k_2$, у которой каждый столбец является подблоком из k_1 символов. Каждая строка полученной матрицы кодируется линейным блоковым кодом (n_2, k_2, d_2), называемым кодом второй (внешней) ступени. В результате умножения получаем матрицу, содержащую n_2 столбцов по k_1 символов в каждом. Каждые из n_2 столбцов полученной матрицы кодируется линейным блоковым кодом (n_1, k_1, d_1), называемым кодом первой (внутренней) ступени. В результате выполнения последней операции получаем матрицу размером $n_1 \times n_2$, у которой каждый столбец есть кодовое слово кода первой ступени, а каждая строка - кодовое слово кода второй ступени. Полученная матрица является кодовым словом итерированного кода с параметрами: . $n = n_1 n_2, k = k_1 k_2, d = d_1 d_2$.

Для исследования спектральных свойств итерированного кода в работах [3] предложен математический аппарат многомерных спектров. Кодовое слово кода-произведения можно записать в виде многочлена от двух переменных:

$$c(x, y) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} c_{i,j} x^i y^j, \qquad (1)$$

где $c_{i,j}$ – двоичные кодовые символы, $i = \overline{0, n_1 - 1}$, $j = \overline{0, n_2 - 1}$.

Если длины n_1 и n_2 одновременно являются делителями мультипликативной группы конечного поля $GF(2^m)$ для некоторого m, тогда произвольный двоичный многочлен $\{v_{i,j}\}$, $i = \overline{0, n_1 - 1}$, $j = \overline{0, n_2 - 1}$ в пространственно-временной области и его представление $\{V_{i,j}\}$, $i = \overline{0, n_1 - 1}$, $j = \overline{0, n_2 - 1}$ в двоичной спектральной области связаны соответствующими преобразованиями:

$$V_{I,J} = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n2-1} \alpha^{iI} \beta^{jJ} v_{i,j}, \qquad (2)$$

$$v_{i,j} = (1/n_1)(1/n_2) \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \alpha^{-iI} \beta^{-jJ} V_{I,J}, \qquad (3)$$

где α и β – элементы конечного поля $GF(2^m)$ порядка n_1 и n_2 соответственно.

Выражения (2) и (3) позволяют по заданному двоичному кодовому многочлену (1) в пространственно-временной области вычислить все компоненты его двоичного представления в частотной области и наоборот, т.е. ассоциировать с многочленом (1) его спектральный многочлен

$$N(x, y) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n2-1} N_{i,j} x^i y^j, \qquad (4)$$

где $N_{i,j}$ – кодовые символы в спектральной области из поля $GF(2^m)$, $i = \overline{0, n_1 - 1}$, $j = \overline{0, n_2 - 1}$, $n_1 \left| 2^m - 1, n_2 \right| 2^m - 1$.

Для построения кодового слова (1) в виде (2) и развития математического аппарата многомерных спектров рассмотрим недвоичный алгебраический код второй ступени (n_2, b_i, d_{2i}) над $GF(2^m)$ $n_2 = 2^m - 1$.

Обозначим через

$$g^*(x) = \prod_{t=u}^{2t_i} (x + \beta^j),$$

порождающий многочлен кода (n_2, b_i, d_{2i}), где

$$d_{2i} = 2t_i + 1, \beta^j \in GF(2^{\alpha_i}),$$

а в виде

$$h^*(x) = \prod_{j=0,\dots,u-1,2t_i,\dots,2^m-1} (x + \beta^j),$$

обозначим проверочный многочлен (n_2, b_i, d_{2i}), кода как произведение всех двучленов $(x + \beta^j)$, $\beta^j \in GF(2^{\alpha_i})$, не входящих в разложение многочлена $g^*(x)$.

Рассмотрим спектральные свойства (7, 2, 6) кода Рида-Соломона над $GF(2^3)$ и его двоичного кода-ограничения. В качестве нулевых спектральных компонент кодовых слов (7, 2, 6) кода Рида-Соломона над $GF(2^3)$, определяющих корни его проверочного многочлена $h^*(x)$, выберем элементы a^1, a^2, т.е.

$$h^*(x) = (x + \alpha^1)(x + \alpha^2) = \alpha^3 + \alpha^4 x + x^2.$$

Оставшиеся ненулевые элементы поля $GF(2^3)$ задают порождающий многочлен кода, т.е.

$$g^*(x) = (x + \alpha^0)(x + \alpha^3)(x + \alpha^4)(x + \alpha^5)(x + \alpha^6) =$$
$$= \alpha^4 + \alpha^5 x + \alpha^5 x^2 + \alpha^0 x^3 + \alpha^4 x^4 + \alpha^0 x^5$$

Частотный спектр всех слов (7,2,6) кода Рида-Соломона над $GF(2^3)$ имеет вид:

$$\{C_0 = 0, C_1, C_2, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0, C_6 = 0\}.$$

Ограничение заданного таким образом (7,2,6) кода Рида-Соломона над $GF(2^3)$ на двоичное подполе соответствует двоичному (7,3,4) коду, его проверочный многочлен $h(x)$ одержит в качестве корней все сопряженные к корням проверочного многочлена $h^*(x)$ основного кода элементы, т.е.

$$h(x) = (x + \alpha^1)(x + \alpha^2)(x + \alpha^4) = 1 + x + x^3.$$

Порождающий многочлен $g(x)$ кода-ограничения содержит в качестве корней все корни порождающего многочлена $g^*(x)$ основного кода, за исключением сопряженных к корням многочлена $h^*(x)$ элементам, т.е.

$$g(x) = (x + \alpha^0)(x + \alpha^3)(x + \alpha^5)(x + \alpha^6) =$$
$$= 1 + x + x^2 + x^4.$$

Частотный спектр всех слов (7,3,4) двоичного кода-ограничения имеет вид:

$$\{C_0 = 0, C_1, C_2, C_3 = 0, C_4, C_5 = 0, C_6 = 0\}.$$

В качестве примера для исследования спектральных свойств обобщенных каскадных кодов рассмотрим следующий случай. Пусть на первой ступени обобщенного каскадного кода используется система вложенных кодов $A_1 \subset A_2$, где A_1 – двоичный (7,3,4) код с порождающим многочленом

$$g(x) = (x+\alpha^0)(x+\alpha^3)(x+\alpha^5)(x+\alpha^6) =$$
$$= 1 + x + x^2 + x^4,$$

а A_2 – двоичный (7,2,6) код с порождающим многочленом $g(x) = (x+\alpha^0) = 1 + x$. Тогда порождающая матрица G_0 системы вложенных кодов может быть представлена в следующем виде:

$$G_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

причем

$$G_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad G_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

есть порождающие матрицы кодов A_1 и A_2 соответственно.

Пусть на второй ступени обобщенного каскадного кода используется (7,6,2) и (7,2,6) коды Рида-Соломона над $GF(2^3)$, порождающие многочлены которых, соответственно, заданы в виде:

$$g_1^*(x) = (x+\alpha^0) = 1 + x,$$
$$g_2^*(x) = (x+\alpha^0)(x+\alpha^3)(x+\alpha^4)(x+\alpha^5)(x+\alpha^6) =$$
$$= \alpha^4 + \alpha^5 x + \alpha^5 x^2 + \alpha^0 x^3 + \alpha^4 x^4 + \alpha^0 x^5.$$

Запишем порождающие матрицы (7,6,2) и (7,2,6) кодов в виде:

$$G_1^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$G_2^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^5 & \alpha^0 & \alpha^4 \\ 0 & 1 & \alpha^1 & \alpha^1 & \alpha^3 & \alpha^0 & \alpha^3 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, структура обобщенного каскадного кода задана следующими величинами:

$$n_2 = 7,\ b_1 = 6,\ d_{2_1} = 2,\ b_2 = 2,\ d_{2_2} = 6,$$

параметры такого кода:

$$n = 49; \quad k = 24; \quad d \ge 12$$

Формирование кодового слова обобщенного каскадного кода выполним по схеме, приведенной на рис. 2.

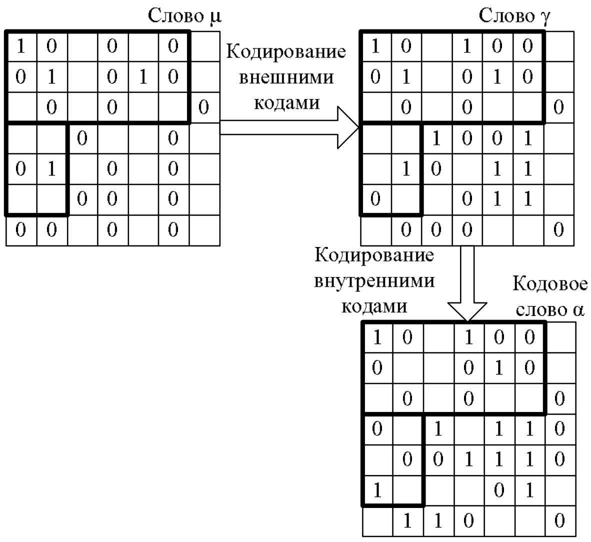

Рис. 2. Алгебраическая структура кодового слова обобщенного каскадного (49, 24, 12) кода

Так, для рассматриваемого примера, имеем кодовые слова во временной области имеет вид:

$$\left(\alpha^0, \alpha^1, 0, \alpha^0, \alpha^4, 0, \alpha^2\right) \quad и \quad \left(\alpha^0, \alpha^4, \alpha^0, 0, \alpha^4, \alpha^5\right).$$

Это слова разных кодов: первое – кодовое слово (7,6,2) кода Рида-Соломона над $GF(2^3)$ с порождающим многочленом $g_1^*(x) = (x+\alpha^0) = 1 + x$; второе – кодовое слово (7,2,6) кода Рида-Соломона над $GF(2^3)$ с порождающим многочленом

$$g_2^*(x) = (x+\alpha^0)(x+\alpha^3)(x+\alpha^4)(x+\alpha^5)(x+\alpha^6) =$$
$$= \alpha^4 + \alpha^5 x + \alpha^5 x^2 + \alpha^0 x^3 + \alpha^4 x^4 + \alpha^0 x^5.$$

Выполнив над приведенными последовательностями преобразования Фурье над $GF(2^3)$, получим соответствующие кодовые слова в спектральной области:

$$\left(0, \alpha^4, \alpha^0, \alpha^1, \alpha^3, \alpha^3, \alpha^2\right) \quad и \quad \left(0, \alpha^6, \alpha^2, 0, 0, 0, 0\right).$$

Как видно из приведенных спектральных представлений, нулевые позиции частотных компонент соответствуют корням порождающих многочленов. В первом случае, нулевая позиция соответствует элементу $\alpha^0 \in GF(2^3)$, во втором случае имеем пять нулевых частотных компонент, соответствующих элементам $\alpha^0, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6 \in GF(2^3)$.

Выводы

1. Наиболее удачным известным подходом к описанию спектральных свойств и исследованию структурных и алгебраических свойств простейших каскадных кодовых конструкций является использование многомерных спектров [1, 2].

2. Предлагаемое развитие математического аппарата, позволяет исследовать спектральные свойства наиболее сложных по алгебраической структуре обобщенных каскадных кодов.

3. Предложенный подход к определению спектральных свойств основного кода по известному спектру кодовых слов его двоичного подхода, является, по сути, дальнейшим развитием математического аппарата преобразования Фурье в конечных полях.

Список литературы

1. Приходько, С.И. Исследование методов представления алгебраических обобщенных каскадных кодов [Текст] / С.И. Приходько, М.С. Курцев, Билал Хамзе // Інформаційно-керуючи системи на залізночному транспорті. – 2012. – №6(97). – С.19-22.

2. Блох Э.Л. Обобщенные каскадные коды. Вып. 5. [Текст] / Э.Л. Блох, В.В. Зяблов. – М.: Связь, 1976. – 240 с.

3. Блох Э.Л. Линейные каскадные коды. [Текст] / Э.Л. Блох, В.В. Зяблов. – М.: Наука, 1982. – 232 с.

Поступила в редколлегию 26.03.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.А. Кузнецов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ КАСКАДНИХ КОДІВ

С.І. Приходько, М.С. Курцев, Хамзе Білал

Стаття присвячена подальшому дослідженню спектральних властивостей кодових слів узагальнених каскадних кодів. Аналіз відомих підходів до опису спектральних властивостей і дослідженню структурних і алгебраїчних властивостей найпростіших каскадних кодових конструкцій показав, що використання багатовимірних спектрів є найбільш вдалим для опису. У статті запропоновано математичний апарат, що дозволяє досліджувати спектральні властивості узагальнених каскадних кодів.

Ключові слова: *узагальнений каскадний код, спектральні властивості кодів, багатовимірні спектри, перетворення Фур'є.*

SPECTRAL PROPERTIES OF THE GENERALIZED CASCADE KODAS

S.I. Prikhod'ko, M.S. Kurcev, Khamze Bilal

The article is devoted to the further investigation of the spectral properties of codewords of generalized cascaded codes. Analysis of the known approaches to the description of the spectral properties and the study of structural and algebraic properties of the simplest cascade code designs showed that the use of multidimensional spectra is the most apt to describe. The authors propose a mathematical tool that allows you to examine the spectral properties of generalized cascaded codes.

Keywords: *generalized cascaded code, the spectral properties of codes, multidimensional spectra, Fourier transform.*