

УДК 629.7.014.18

К.В. Горелова

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В БАКАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Рассматривается движение жидкости в баке цилиндрической формы под действием постоянной горизонтальной возмущающей силы. Исследования проводятся с учётом вынужденных колебаний свободной поверхности для периода первого всплеска жидкости. Полученные результаты численно-параметрических исследований позволяют построить профили свободной поверхности и определять границу перехода в возмущенные состояния.

**Ключевые слова:** профиль свободной поверхности, вынужденные колебания жидкости, возмущающая сила.

### Введение

Большая подвижность жидкости, частично заполняющей емкость, связана с колебаниями, всплескиванием, а также изменением конфигурации свободной поверхности. Решение задачи о вынужденных колебаниях жидкости, имеющей свободную поверхность, является затруднительным. Впервые решение задачи о движении твердого тела с полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, получено Н.Е. Жуковским. Было показано, что изучение движения системы тело – жидкость можно свести к изучению некоторой механической системы, в которой жидкость заменена эквивалентным твердым телом. Основные положения линейной теории, основанной на использовании концепции малых волновых движений жидкости, изложены в работах Н.Н. Моисеева, Н.Г. Микишева, Б.И. Рабиновича, И.А. Луковского, Х.Н. Абрамсона и др. Данная работа посвящена моделированию движения жидкости в баках цилиндрической формы. Проведены аналитические исследования методом разложения потенциала скорости жидкости на относительную составляющую потенциала скорости в отношении емкости и ее стенок. В работе также представлены результаты и анализ численно-параметрических исследований профилей свободной поверхности [1 – 3].

**Постановка задачи.** Рассмотрим осесимметричную емкость, заполненную жидкостью на глубину  $h_0$ , как показано на рис. 1.

### Основной раздел

Емкость, находящаяся в поле действия постоянного вертикального ускорения  $\alpha g$ , совершает вынужденное поступательное движение в горизонтальной плоскости  $x = s(t)$ . Требуется исследовать движение свободной поверхности жидкости: потенциал скорости  $\Phi$  и перемещение свободной поверхности жидкости относительно стенок емкости  $h(x, y, t)$ . Выбранная система координат движется

вместе с емкостью. Начало координат располагаем на свободной поверхности жидкости в статистическом состоянии; ось  $z$  направлена вверх [4, 5].

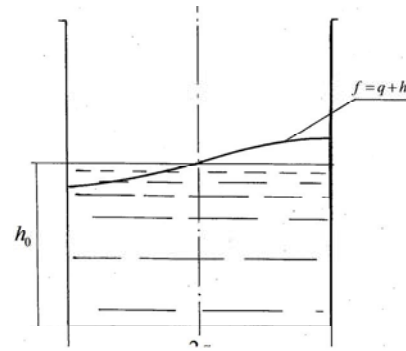


Рис. 1. Осесимметрическая емкость, заполненная на глубину  $h_0$  жидкостью со свободной поверхностью  $f = q + h$

В случае вынужденных колебаний жидкости в баке цилиндрической формы с плоским дном математическая формулировка задачи с учётом указанных выше предположений будет иметь вид [6, 7]:

$$\nabla^2 \Phi \equiv \Phi_{RR} + \frac{\Phi_R}{R} + \frac{\Phi_{\theta\theta}}{R^2} + \Phi_{ZZ} = 0; \quad (1)$$

$$\Phi_Z = 0 \quad \text{при} \quad Z = -H_0; \quad (2)$$

$$\Phi_R = 0 \quad \text{при} \quad R = 1; \quad (3)$$

$$B_0 \left( H_{RR} + \frac{H_R}{R} + \frac{H_{\theta\theta}}{R^2} \right) - \alpha H + \dot{\Phi} = \ddot{s} R \cos \theta, \quad \text{при} \quad Z=0; \quad (4)$$

$$\dot{H} = -\Phi_Z \quad \text{при} \quad Z = 0, \quad (5)$$

где  $R$  и  $Z$  – безразмерные координаты;  $H$  – безразмерное возмущение свободной поверхности жидкости;  $T$  – безразмерное время;  $\bar{\Phi}$  – безразмерная функция потенциала скорости;  $\bar{s}$  – отклонение емкости от начального положения;  $B_0$  – критерий Бонда.

**Методика исследования свободной поверхности.** Решение задачи (1) – (5) будем искать методом Фурье. Для этого представим частное решение уравнения Лапласа (1) в виде [6, 8]

$$\Phi(R, \theta, Z, T) = \mathcal{G}(T)U(R)v(\theta)W(Z). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1) преобразуем (1) к виду:

$$R^2 \frac{U''}{U} + R \frac{U'}{U} + R^2 \frac{W''}{W} = -\frac{v''}{v}. \quad (7)$$

Из (7) видно, что равенство возможно только в том случае, если левая и правая части (7) равны постоянной величине, то есть

$$R^2 \frac{U''}{U} + R \frac{U'}{U} + R^2 \frac{W''}{W} = \mu^2; \quad (8)$$

$$-\frac{v''}{v} = \mu^2.$$

Равенство (8) возможно только при условии, что правая и левая части равны постоянной величине [9], то есть

$$\frac{U''}{U} + \frac{U'}{RU} - \frac{n^2}{R^2} = -\lambda^2; \quad (9)$$

$$-\frac{W''}{W} = -\lambda^2. \quad (10)$$

Необходимо отметить, что в случае приравнивания левой и правой частей (8) положительной постоянной величине уравнению Бесселя (9) будет поставлено в соответствие модифицированное уравнение Бесселя, решением которого являются модифицированные функции Бесселя, не удовлетворяющие граничным условиям ограниченности при  $R = 0$  и непроницаемости при  $R = 1$ .

Из (10) следует, что  $W = \text{ch}[\lambda(Z + Z_0)]$ , где как и ранее постоянный множитель перед функцией принят равным единице. Значение  $Z_0$  легко определить из условия  $W'(-H_0) = 0$ , которое следует из (2), то есть  $Z_0 = H_0$  и

$$W = \text{ch}[\lambda(Z + H_0)]. \quad (11)$$

Решениями уравнения (9) при условии ограниченности функции в начале координат являются функции Бесселя

$$u = I_n(\lambda R), \quad (12)$$

при этом значения  $\lambda$  определяются из условия  $u'(1) = 0$ , то есть  $\lambda = \lambda_{nk}$  – корни уравнения, которые определяются из условия линеаризации процесса за определенный промежуток времени [9].

$$I_n'(\lambda_{nk}) = 0. \quad (13)$$

Таким образом, искомое частное решение уравнения Лапласа имеет вид

$$\Phi_{nk} = \mathcal{G}_{nk}(T)I_n(\lambda_{nk}R)\cos n\theta\text{ch}[\lambda_{nk}(Z + H_0)]. \quad (14)$$

Общее решение можно отыскать путём суперпозиции частных решений

$$\Phi = \sum_{n,k} \Phi_{nk} = \sum_{n,k} \mathcal{G}_{nk}(T)I_n(\lambda_{nk}R) \times \cos n\theta \text{ch}[\lambda_{nk}(Z + H_0)], \quad (15)$$

где функции  $\mathcal{G}_{nk}(T)$  определяются из динамического (4) и кинематического (5) граничных условий.

Для решения поставленной задачи нам необходимо знать вид частного решения для функции, оп-

ределяющей возмущение свободной поверхности жидкости. Указанное частное решение можно определить подстановкой частного решения для потенциала скорости (14) в кинематическое граничное условие (5). Подставим (14) в (5), получим

$$\dot{H}_{nk} = -\mathcal{G}_{nk}(T)\lambda_{nk}\text{sh}(\lambda_{nk}H_0)I_n(\lambda_{nk}R)\cos n\theta. \quad (16)$$

Из (16) следует, что частное решение для  $H$  удобно искать в виде

$$H_{nk} = \Psi_{nk}(T)\lambda_{nk}\text{sh}(\lambda_{nk}H_0)I_n(\lambda_{nk}R)\cos n\theta, \quad (17)$$

где функция  $\Psi_{nk}(T)$  связана с  $\mathcal{G}_{nk}(T)$  следующим соотношением

$$\dot{\Psi}_{nk} = -\mathcal{G}_{nk}. \quad (18)$$

Общее решение  $H(R, \theta, T)$  является линейной комбинацией всевозможных частных решений  $H_{nk}$ , т.е.

$$H = \sum_{n,k} H_{nk} = \sum_{n,k} \Psi_{nk}(T)\lambda_{nk}\text{sh}(\lambda_{nk}H_0) \times I_n(\lambda_{nk}R)\cos n\theta. \quad (19)$$

Для определения функциональной зависимости  $\Psi_{nk}(T)$  и  $\mathcal{G}_{nk}(T)$  необходимо иметь ещё одно дифференциальное уравнение, связывающее эти функции. Указанное уравнение можно получить из динамического граничного условия на свободной поверхности жидкости (4). Для этого представим правую часть (4) в виде ряда по функциям, определяющим частное решение для потенциала скорости и возмущения свободной поверхности. Так как правая часть включает в себя в виде множителя функцию  $\cos \theta$ , которой соответствует частное решение с  $W = 1$ , то очевидно, что функцию  $f(R) = R$  необходимо представить в виде ряда по функциям Бесселя первого рода первого порядка. Данное разложение имеет вид

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k}I_1(\lambda_{1k}R), \quad (20)$$

где  $D_{1k}$  вычисляется по формуле

$$D_{1k} = \int_0^1 R^2 I_1(\lambda_{1k}R) dR \Big/ \int_0^1 R I_1^2(\lambda_{1k}R) dR, \quad (21)$$

полученной из (20) с учётом условия ортогональности функции Бесселя.

Подставляя (14), (17), (20) в динамическое граничное условие на свободной поверхности жидкости (4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях, определяющих частные решение, получим уравнение

$$\mathcal{G}_{nk}\text{ch}(\lambda_{nk}H_0) - (B_0\lambda_{nk}^2 + \alpha)\lambda_{nk} \times \text{sh}(\lambda_{nk}H_0)\Psi_{nk} = D_{nk}\ddot{s}(T), \quad (22)$$

где  $D_{1k}$  определяется по формуле (21), а при  $n > 1$   $D_{nk} = 0$ .

Таким образом, для нахождения двух функций времени  $\mathcal{G}_{nk}(T)$  и  $\Psi_{nk}(T)$  мы получили систему двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка [2, 3, 8].

Для полной определённости решения необходимо задать начальные условия для  $\vartheta_{nk}$  и  $\psi_{nk}$ . Рассмотрим случай задания начальных условий для  $\Phi$  и  $H$  в виде некоторых произвольных функций, допускающих разложение по собственным функциям данной задачи

$$\Phi(R, \theta, 0) = f_1(R, \theta, Z) = \sum_{n,k} A_{nk} I_n(\lambda_{nk} R) \cos n\theta \times \text{ch}[\lambda_{nk}(Z + H_0)], \quad (23)$$

$$H(R, \theta, 0) = f_2(R, \theta) = \sum_{n,k} B_{nk} \lambda_{nk} \text{sh}(\lambda_{nk} H_0) \times I_n(\lambda_{nk} R) \cos n\theta.$$

Сравнивая (23) с общим решением (15), (19) при  $T = 0$ , получим начальные условия

$$\begin{aligned} \vartheta_{nk}(0) &= A_{nk}; \\ \psi_{nk}(0) &= B_{nk}. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (18), (22) с начальными условиями (24) имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta_{nk} &= A_{nk} \cos(\omega_{nk} T) + B_{nk} \omega_{nk} \sin(\omega_{nk} T) + \\ &+ \frac{D_{nk}}{\text{ch}(\lambda_{nk} H_0)} \int_0^T \ddot{s}(\tau) \cos[\omega_{nk}(T - \tau)] d\tau; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \psi_{nk} &= -\frac{A_{nk}}{\omega_{nk}} \sin(\omega_{nk} T) + B_{nk} \cos(\omega_{nk} T) - \\ &- \frac{D_{nk}}{\omega_{nk} \text{ch}(\lambda_{nk} H_0)} \int_0^T \ddot{s}(\tau) \sin[\omega_{nk}(T - \tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\omega_{nk}^2 = \lambda_{nk}^2 (B_0 \lambda_{nk}^2 + \alpha) \text{th}(\lambda_{nk} H_0)$ .

Если вынужденные колебания жидкости начинаются из состояния покоя, то начальные значения функции  $\Phi$  и  $H$  равны нулю и, следовательно,  $A_{nk} = 0$ ;  $B_{nk} = 0$ , для всех  $n$  и  $k$ . В этом случае

$$\vartheta_{nk} = \frac{D_{nk}}{\text{ch}(\lambda_{nk} H_0)} \int_0^T \ddot{s}(\tau) \cos[\omega_{nk}(T - \tau)] d\tau; \quad (27)$$

$$\psi_{nk} = -\frac{D_{nk}}{\omega_{nk} \text{ch}(\lambda_{nk} H_0)} \int_0^T \ddot{s}(\tau) \sin[\omega_{nk}(T - \tau)] d\tau, \quad (28)$$

причем, в решениях (15), (19) суммирование по  $n$  производить не нужно, так как  $D_{nk} = 0$  для всех  $n \neq 1$ .

Если вынужденные колебания жидкости совершаются под действием бокового ускорения постоянной величины  $\ddot{s}(\tau) = \ddot{s}_0 = \text{const}$ , тогда в выражениях (27), (28) можно вычислить интегралы

$$\vartheta_{nk} = \frac{D_{nk} \ddot{s}_0}{\omega_{nk} \text{ch}(\lambda_{nk} H_0)} \sin(\omega_{nk} T); \quad (29)$$

$$\psi_{nk} = -\frac{D_{nk} \ddot{s}_0}{\omega_{nk}^2 \text{ch}(\lambda_{nk} H_0)} [1 - \cos(\omega_{nk} T)]. \quad (30)$$

Подставляя (29), (30) в (15) и (19), получим решение задачи о вынужденных колебаниях жидкости в баке цилиндрической формы с плоским дном под действием бокового ускорения постоянной величины, начинающихся из состояния покоя [7, 9–11]

$$\Phi = \ddot{s}_0 \cos \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{1k} \sin(\omega_{1k} T)}{\omega_{1k} \text{ch}(\lambda_{1k} H_0)} \times \quad (31)$$

$$\times I_1(\lambda_{1k} R) \text{ch}[\lambda_{1k}(Z + H_0)];$$

$$H = -\ddot{s}_0 \cos \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{1k}}{B_0 \lambda_{1k}^2 + \alpha} I_1(\lambda_{1k} R). \quad (32)$$

### Численно-параметрические исследования.

Результаты численно-параметрических расчетов профилей свободной поверхности жидкости для величины бокового ускорения  $\ddot{s}/g = 0,1$  в сечении  $\theta = (0, \pi)$ , проведенных по формуле (32), представлены на рис. 1 [12, 13].

На рис. 1 представлены профили свободной поверхности жидкости в баке цилиндрической формы, которые отображают динамику первого всплеска жидкости под действием горизонтальной возмущающей силы. Установлено, что для определенного количества корней трансцендентного уравнения полученное решение позволяет определять максимальную гармонику колебаний жидкости [9].

Величина отклонения емкости от начального положения позволяет определить границу перехода системы в возмущенные состояния, которым соответствуют определённые уровни гармоники профиля свободной поверхности  $H(T)$ . При значении  $\theta < 0,7$  наблюдается затухание колебаний (рис. 1, а), для случаев  $\theta > 0,7$  наблюдаются повторные всплески (рис. 1, б) [2, 7].

### Выводы

Построена математическая модель колебаний жидкости в баке цилиндрической формы под действием постоянной горизонтальной возмущающей силы с учётом вынужденных колебаний свободной поверхности.

С помощью аналитического подхода исследована форма свободной поверхности первого всплеска жидкости и определена граница перехода системы в возмущенные состояния.

Установлено, что глубина заполнения существенно влияет на конфигурацию профиля и амплитуду колебаний свободной поверхности жидкости, но оказывает влияние на период колебаний, причем, с увеличением глубины заполнения бака период колебаний уменьшается. При этом характер конфигурации свободной поверхности жидкости согласуется с результатами экспериментальных исследований.

Полученные результаты численно-параметрических исследований расширяют диапазон подходов к моделированию процесса колебаний жидкости в баках различных геометрических форм, а также позволяют построить новые математические модели с учетом модернизации конструкции баков, наличия в них дополнительных внутрибаковых устройств, характера воздействия внешних возмущающих сил.

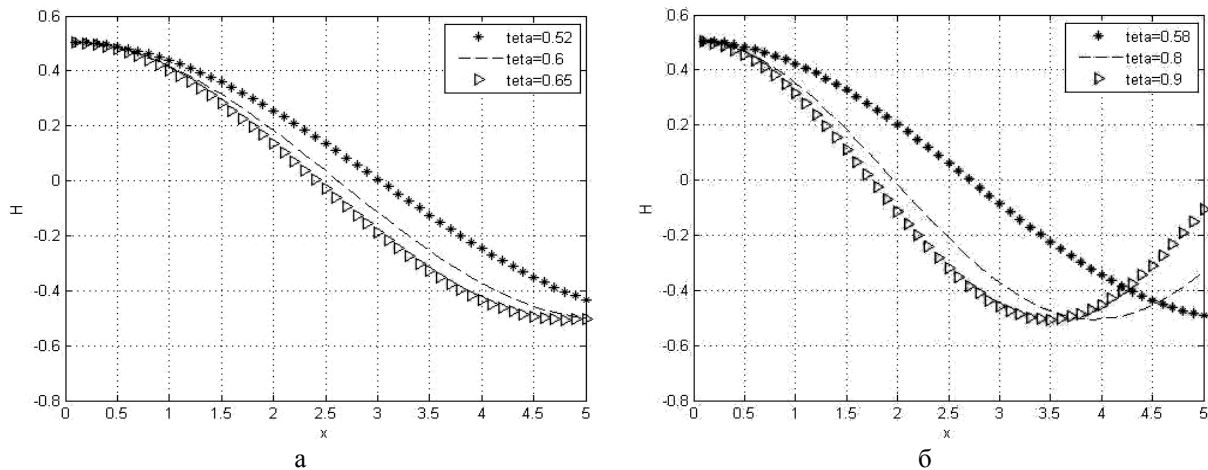


Рис. 1. Профили свободной поверхности  $H(T)$  для величины отклонения емкости от начального положения: а –  $\theta = 0.52; 0.6; 0.65$ ; б –  $\theta = 0.58; 0.8; 0.9$

## Список литературы

1. Микушев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов / Г.Н. Микушев. – М.: Машиностроение, 1978. – 248 с.
2. Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы / И.А. Луковский. – К.: Наукова думка, 1975. – 135 с.
3. Abramson H. N. The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers with Applications to Space Vehicle Technology NASA SP-106 / H. N. Abramson. – Washington, D.C., 1966. – 468 p.
4. Колесников К.С. Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде / К.С. Колесников. – М.: Машиностроение, 1964. – 370 с.
5. Йи К.К. Свободные и вынужденные колебания жидкости в осесимметричном резервуаре в условиях слабого тяготения / К.К. Йи // «Прикладная механика». – М.: 1967. - №1. – С. 98-106.
6. Кочин Н.Б. Теоретическая гидромеханика / Н.Б. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М.: Гостехтеориздат, 1955 – Т. 1. – 510 с.
7. Богомаз Г.И. Колебания жидкости в баках. Методы и результаты экспериментальных исследований / Г.И. Богомаз, С.А. Сирота. – Днепропетровск: Ин-т техн. механики НАНУ и НКАУ, 2002. – 306 с.
8. Dodge F. T. Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers / F. T. Dodge,

D.D. Kana, H.N. Abramson // AIAA Journal. – 1965. – Vol 3. – P. 685-695.

9. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – М., 1949. – 798 с.

10. Луковский И.А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью / И.А. Луковский. – К.: Наукова думка, 2010. – 408 с.

11. Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы / И.А. Луковский. – К.: Наукова думка, 1975. – 136 с.

12. Горелова К.В. Моделирование динамических процессов топлива в баках летательных аппаратов в условиях пониженной гравитации / К.В. Горелова // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». – Дніпропетровськ: ДНУ ім. О.Гончара, 2012. – Вип. 16, Т. 1. – С. 148-154.

13. Горелова К.В. Моделирование вынужденных колебаний свободной поверхности в баках космических летательных аппаратов / К.В. Горелова // Восточно-европейский журнал передовых технологий. Серия «Прикладная физика и материаловедение». – X., 2013. – Вып. 5. – С. 23-32.

Поступила в редколлегию 26.06.2013

**Рецензент:** д-р. техн. наук, проф. С.А. Давыдов, Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск.

## МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ В БАКАХ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ

К.В. Горелова

Розглядається рух рідини в баку циліндричної форми під дією постійної горизонтальної збурюючої сили. Дослідження проводяться з урахуванням вимушених коливань вільної поверхні для періоду першого сплеску рідини. Одержані результати чисельно-параметричних досліджень дозволяють побудувати профілі вільної поверхні і визначити межу переходу в збурені стани.

**Ключові слова:** профіль вільної поверхні, вимушені коливання рідини, збурююча сила.

## SIMULATION OF FLUID MOTION IN CYLINDRICAL TANKS

K.V. Gorielova

The fluid motion in a cylindrical tank is considered under the influence of constant horizontal disturbing force. Researches have been done with taking into account the forced oscillations of the free surface at the period of the fluid first burst. The results of obtained numerically-parametric investigations allow us to construct the free surface profiles and determine the boundary of transition in perturbed states.

**Keywords:** free surface profile, forced oscillations of the liquid, disturbing force.