УДК 621.51

С.М. Кучерук

Киевская государственная академия водного транспорта имени гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Киев

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОЦЕНОК ИХ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

В статье представлены результаты исследований относительно использования оценок чувствительности для параметрических инвариантных автоматизированных систем управления, особенностью которой является построение функциональных связях между качеством системы и ее параметрами.

Ключевые слова: *инвариантность, чувствительность, устойчивость, система, структура.*

Введение

Актуальность темы. Метода теории чувствительности широко применяются в теории и практике проектирования систем автоматического управления (САУ), особенно при синтезе параметрических инвариантных систем [1]. В этом случае требуется обеспечить независимость (инвариантность) или зависимость в допустимых пределах тех или иных свойств системы при изменении некоторых ее параметров, а аппарат теории чувствительности хорошо приспособленная изучения подобных зависимостей и выработки рекомендаций для влияния на них [2]. Задача обеспечения определенной чувствительности свойств динамической системы к изменению ее параметров родственна задаче получения инвариантности с точностью до ε при изменении тех же параметров и ряд проблем, возникающих при решении этих смежных задач, имеет общую природу и решение [3].

Анализ предметной области. Действительно, одной из основных проблем теории чувствительности и теории параметрической инвариантности является проблема обнаружения достаточно простых функциональных связей между определенными свойствами системы [1 – 4], для которых обеспечивается заданная чувствительность или инвариантность, и теми параметрами, от которых зависят эти свойства и влияние которых требуется уменьшить или направить в нужную сторону. Отсутствие подобных связей не является принципиальным препятствием применения, например, аппарата чувствительности, так как возможно использование различных численных методов, но эффективность этого аппарата существенно возрастает в том случае, когда в функцию чувствительности входят варьируемые параметры [4, 5].

Постановка задачи. В настоящей работе предлагаются некоторые оценки чувствительности показателей качества линейных параметрических инвариантных систем, основывающихся на новых функциональных связях между качеством системы и ее параметрами. Показаны возможности использования этих оценок чувствительности не только для выбора параметров регулятора системы исходя из минимизации чувствительности показателей качества к переменным параметрам объекта управления, но и для поиска наиболее рациональной в смысле чувствительности структуры системы управления.

Изложение основного материала

Выбор показателей качества линейной системы. Пусть имеются некоторые комбинации коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы.

$$\rho^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i = 0\,, \qquad (1)$$

вида

$$A_i = a_{i-1}a_{i+2} / a_i a_{i+1}, \quad i = 1, n-2\,; \qquad (2)$$

$$1/\delta_j = a_{j+1}a_{j-1} / a_j^2, \quad j = 1, n-1\,; \qquad (3)$$

$$\beta = a_0 / a_{\text{-}1}\,. \qquad (4)$$

В работах [2 – 4] показано, что n-2 показателя λ однозначно характеризуют устойчивость линейной системы, причем для устойчивости системы достаточно выполнения неравенств [3]

$$\lambda_i \le 0{,}465, \quad i = 1, n-2\,. \qquad (5)$$

При отсутствии полюсов в числителе передаточной функции замкнутой систему автоматического управления параметры δ_j и β полностью характеризуют качественные показатели системы [4, 5]. Независимо от величины β совокупность параметров δ_j однозначно задает форму переходных процессов и частотных характеристик системы, а также характер распределения корней ее характеристического уравнения. Как показано в [5], что параметры δ_j (j=1,2,3) вместе с параметром β позволяют с достаточно высокой степенью приближения оценивать основные показатели качества линейных систем любого порядка, а на остальные значения показателей формы δ_j (j=4, n-1) накладываются ограничения только из условий устойчивости (5). Найдена аналитические и графические (в виде номограмм) связи между качественными показателями и параметрами $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ и в частотной областях.

Если рассматривать качественные показатели, например, во временной области, то имеем следующие зависимости [5]

$$\rho = \rho(\delta_j), \quad j = 1, 2, 3 ; \tag{6}$$

$$\tau = \tau(\delta_j), \quad j = 1, 2, 3 , \tag{7}$$

где ρ и τ соответственно перерегулирование и время (в нормированном виде) переходного процесса по выходной координате.

При заданной системе параметров δ_j параметр β характеризует быстродействие системы и может служить некоторое коэффициентом масштаба. Пропорционально величине β меняются модули корней характеристического уравнения и частные интервалы на частотных характеристиках, а интервалы на временных характеристиках обратно пропорциональны величине показателе быстродействия β. Величины λ_i, δ_j, β достаточно легко выражаются через коэффициенты характеристического уравнения и, следовательно, через параметры системы – отсюда следует, что известные зависимости типа (6), (7) позволяют связать качественные показатели системы (перерегулирование, резонансная частота и т.п.) с теми или иными параметрами системы и исследовать их влияние на динамику системы.

Чувствительности показателей качества. Зависимости показателей качества от параметров системы позволяют применять понятие чувствительности этих показателей к некоторым из параметров системы [6, 7]. Используем следующие оценки чувствительности

$$S_\alpha^\rho = \partial F / \partial \alpha \tag{8}$$

или

$$\overline{S}_\alpha^F = \partial \ln F / \partial \ln \alpha , \tag{9}$$

где F – некоторый показатель качества системы; α – некоторый параметр.

Имея зависимости (6), (7) и используя (8), (9), можно получить чувствительности качественных показателей (например, ρ и τ) к некоторым из параметров [3, 5]

$$S_\alpha^\rho = \partial \rho / \partial \alpha = \sum_{j=1}^{3} S_{\delta_j}^\rho S_\alpha^{\delta_j} ; \tag{10}$$

$$S_\alpha^\tau = \partial \tau / \partial \alpha = \sum_{j=1}^{3} S_{\delta_j}^\tau S_\alpha^{\delta_j} ; \tag{11}$$

$$\overline{S}_\alpha^\rho = \partial \ln \rho / \partial \ln \alpha = \sum_{j=1}^{3} \overline{S}_{\delta_j}^\rho \overline{S}_\alpha^{\delta_j} ; \tag{12}$$

$$\overline{S}_\alpha^\tau = \partial \ln \tau / \partial \ln \alpha = \sum_{j=1}^{3} \overline{S}_{\delta_j}^\tau \overline{S}_\alpha^{\delta_j} . \tag{13}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда в системе имеется одон переменный параметр, принимающий все значения из некоторое заданного диапазона. В системах управления летательными аппаратами этот параметр, может, представлять собой некоторую обобщенную эффективность рулевых органов, изменяющуюся в зависимости от высоты, скорости полета и т.п. Этот параметр (обозначим его K_t) фактически является функцией времени, но будем считать, что он меняется достаточно медленно, чтобы допустимо было использовать метод “замороженных” коэффициентов. Будем считать, что величина K_t в некотором смысле нормирована и меняется в диапазоне $[1, \quad K_{max}]$.

В выражениях типа (10)÷(13) используется чувствительность показателей качества к величинам $\lambda_i, \delta_j, \beta$ и чувствительности величин $\lambda_i, \delta_j, \beta$ к интересующее нас параметру α. Первые из этих чувствительность не зависят от параметра α и при одинаковых качественных показателях имеют одно и то же значение для систем различных структур. Чувствительность величин $\lambda_i, \delta_j, \beta$, к параметру зависит от того, каким обрезом параметр α входит в эти величины, а это в свою очередь зависит при одном и том же объекте с переменным параметром от структуры системы управления этим объектом. Минимизация этих чувствительностей будет минимизировать при одах и тех же качественных показателях общие чувствительности (10)÷(13). Поэтому для оценок чувствительности тех или иных структур к переменному параметру K_t будут использоваться только чувствительности величин $\lambda_i, \delta_j, \beta$ от этого параметра.

Будем считать, что рассматриваемые системы могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями без производных в правой части и, следовательно, каждой структуре системы соответствует определенный характер вхождения переменного параметра K_t в коэффициенты этого уравнений.

Системы о полной информацией. Вели в системе *n*-го порядка имеется возможность измерять и использовать в регуляторе *n*-1 производную выходной координаты объекта, передаточная функция которого содержит множителем переменный параметр K_t то для некоторых структур характеристические уравнение можно записать так [1, 4]

$$\rho^n + \sum_{i=0}^{n-1} A_i K_t \rho^i = 0 ; \tag{14}$$

$$\rho^n + \sum_{i=0}^{n-1} A_i G_t^{n-1} \rho^i = 0 ; \tag{15}$$

$$K_t = G_t^{n-1} , \tag{16}$$

где K_t – "замороженное" в момент *t* значение переменного параметра $K_t \in [1, K_{max}]$.

Чувствительности показателей устойчивости, формы и быстродействия для уравнения (14) принимают вид

$$S_{K_t}^{\lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1, n-3} ; \tag{17}$$

$$S_{K_t}^{\lambda_{n-2}} = -A_{n-3} A_n / A_{n-2} A_{n-1} K_t^2 ; \tag{18}$$

$$S_{K_t}^{\delta_j} = 0, \quad i = \overline{1, n-2} ; \tag{19}$$

$$S_{K_t}^{\delta_{n-1}} = -A_n A_{n-2} / A_{n-1}^2 K_t^2; \quad (20)$$

$$S_{K_t}^{\beta} = 0. \quad (21)$$

В системе, описываемой уравнением (14), качественные показатели и запаса устойчивости (за исключением показателей λ_{n-2} и δ_{n-1} инвариантны к изменению K_t. Отрицательное значение оценки (18) указывает на увеличение запасов устойчивости при увеличении параметра K_t.Для уравнения (15)

$$S_{K_t}^{\lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1, n-2}; \quad (22)$$

$$S_{K_t}^{\delta_j} = 0, i = \overline{1, n-1}; \quad (23)$$

$$S_{K_t}^{\beta} = A_0 / nA_1 K_t^{\frac{n-1}{n}}. \quad (24)$$

При квазистационарном подходе в уравнении (15) множеству значений *t* соответствует множество решений уравнения и множитель σ_t можно рассматривать как коэффициент масштаба. Пропорционально величине σ_t будут меняться модули корней характеристического уравнения (без изменения характера их распределения) и частотные интервалы на любых частотных характеристиках (без изменения их формы). Обратно пропорционально меняются временные интервалы любых временных характеристик системы при сохранении их формы. Показатель быстродействия в (15) является функцией параметра K_t, тогда как остальные показатели системы не меняются* Бели обеспечить требуемое быстродействие для величины K_t, соответствующей минимальному значению σ_t, то при других значениях σ_t быстродействие не ухудшается.

<u>Системы о неполной информацией.</u> Уравнение системы имеет вид (14) или (15) в том случае, если используются производные выходных координат, высокого порядка. При реализации таких производных приходится сталкиваться с известными трудностями. Поэтому практически имеют дело с уравнениями следующего вида:

$$\rho^n + \sum_{i-m}^{n-1} A_i \rho^i + \sum_{j=0}^{m-1} A_j K_t \rho^j = 0 \quad (25)$$

или
$$\rho^n + \sum_{i-m}^{n-1} A_i \rho^i + \sum_{j=0}^{m-1} A_j G_t^{m-j} \rho^j = 0, \quad (26)$$

где $K_t = G_t^m$.

Тогда для (25) оценки чувствительности

$$S_{K_t}^{\lambda m} = A_{m-1} A_{m+2} / A_m A_{m+1}; \quad (27)$$

$$S_{K_t}^{\lambda m-2} = -A_{m-3} A_m / A_{m-2} A_{m-1} K_t^2; \quad (28)$$

$$S_{K_t}^{\delta m} = A_{m+1} A_{m-1} / A_m^2; \quad (29)$$

$$S_{K_t}^{\delta m-1} = -A_m A_{m-2} / A_{m-1}^2 K_t^2, \quad (30)$$

а для уравнения(26)

$$S_{K_t}^{\lambda m} = A_{m-1} A_{m+2} / mA_m A_{m+1} K_t^{\frac{m-1}{m}}; \quad (31)$$

$$S_{K_t}^{\lambda m-1} = A_{m+1} A_{m-2} / mA_m A_{m-1} K_t^{\frac{m-1}{m}}; \quad (32)$$

$$S_{K_t}^{\delta m} = A_{m+1} A_{m-1} / mA_m^2 K_t^{\frac{m-1}{m}}; \quad (33)$$

$$S_{K_t}^{\beta} = A_0 / mA_1 K_t^{\frac{m-1}{m}}. \quad (34)$$

Оценки чувствительности для остальных показателей λ_i и δ_j равны нулю, т.е. эти показатели нечувствительны к изменениям параметра K_t. Однако именно параметры δ_j с меньшими номерами j в основном характеризуют формы временных и частотных характеристик системы. Некоторое отличие может наблюдаться на начальном, близком к $t=t_0$ участке временных характеристик и в области высоких частот соответствующих частотных характеристик системы. Поэтому для систем, описываемых уравнением (26), колебательность практически остается неизменной, и быстродействие можно сделать не хуже заданного.

Если требуется обеспечить постоянство быстродействия системы, то характеристическое уравнение можно сформировать в виде

$$\rho^n + \sum_{i-m}^{n-1} A_i \rho^i + \sum_{j=1}^{m-1} A_j G_t^{m-j} \rho^j + A_0 G_t^{m-1} = 0, \quad (35)$$

где
$$K_t = G_t^{m-1}. \quad (37)$$

Тогда чувствительность показателя быстродействия $S_{K_t}^{\beta} = 0$. Но в этом случае

$$S_{K_t}^{\lambda_1} = -A_0 A_3 / (m-1) A_1 A_2 K_t^{\frac{m}{m-1}}; \quad (38)$$

$$S_{K_t}^{\delta 1} = A_2 A_0 / (m-1) A_1^2 K_t^{\frac{m-2}{m-1}}. \quad (39)$$

<u>Чувствительность а выбор структуры САУ.</u> Использование оценок чувствительности показателей устойчивости, формы переходного процесса и быстродействия позволяет не только выбирать параметры системы исходя из минимизации чувствительности ее качественных показателей к различным параметрам, но и дает возможность поиска наиболее рациональной структуры САУ.

Анализ выражений (27)÷(34) подзывает, что показатели устойчивости, формы переходного процесса и быстродействия зависят от величины m, причем чувствительность указанных показателей для систем, описываемых уравнениями (25) и (35), ниже, чем дня структур вида (26). Действительно, при увеличении m, т.е. при увеличении числа коэффициентов характеристического уравнения, в которые входит параметр K_t, чувствительности показателей устойчивости, формы переходного процесса и быстродействия уменьшаются. Практически увеличение значения m означает повышение порядка корректирующих устройств системы. При m=0 оценки чувствительности для уравнений (25) и (35) одинаковы.

Чувствительность рассматриваемых показателей зависит также и от величины сомножителя $K_t^{\frac{m-2}{m-1}}$, причем чем больше диапазон изменения параметра K_t, тем меньше будет чувствительность этих показателей к изменению параметра K_t при максимальных его значениях.

Следует отметить, что интенсивность уменьшения чувствительности показателей устойчивости, формы и быстродействия быстро падает при увеличении m. Если, например, для уравнения (35) принять $K_{max} = 100$, тогда (табл. 1) оказывается, что при заданном значении K_{max} нецелесообразно брать m>4, так как это значительно усложняет реализацию корректирующих устройств.

Таблица 1

Чувствительность показателя быстродействия

m	2	3	4	5	6
$S_{K_t}^{\lambda m} \dfrac{A_m A_{m+1}}{A_{m-1} A_{m+2}}$	1,0	0,050	0,015	0,008	0,005

Рассмотрим тетерь возможность снижения чувствительности путем изменения структуры характеристического уравнения. Пусть для некоторой структуры характеристическое уравнение

$$\begin{gathered} \rho^n + \sum_{i=m+1}^{n-1} A_i \rho^i + A_m \rho^m A_{m-1} G_t \rho^{m-1} + \\ \rho^n + \sum_{i=m+1}^{n-1} A_i \rho^i + A_m \rho^m A_{m-1} G_t \rho^{m-1} + \\ + \sum_{j=1}^{m-2} A_m G_t^{2j} \rho^{m-j-1} + A_0 G_t^{2m-3} = 0 \end{gathered}, \qquad (39)$$

где $K_t = G_t^{2m-3}$.

Для уравнения такого вида при m=5 чувствительность показателей устойчивости будет ненулевая для всех i≤m. Помажем, что для такой структуры характеристического уравнения представляется возможным существенно уменьшить оценки чувствительности по сравнению с уравнением (26).

Оценки чувствительности показателей устойчивости для уравнения (39) принимают такой вид

$$S_{K_t}^{\lambda i} = A_{i-1} A_{i+2} / (2m-3) A_i A_{i+1} K_t^{\frac{2m-4}{2m-3}}, \quad i = \overline{m-3, m}$$

$$S_{K_t}^{\lambda 1} = -A_0 A_3 / (2m-3) A_1 A_2 K_t^{\frac{2m-2}{2m-3}}; \qquad (41)$$

$$S_{K_t}^{\lambda j} = 0, \quad j = \overline{m+1, n-2}; \qquad (42)$$

$$S_{K_t}^{\lambda j} = 0, \quad j = 2, \overline{m-4} (m > 5). \qquad (43)$$

Тогда при K_{max} =100 соответственно для m=4, 5

$$S_{K_t}^{\lambda 4} /_{m=4} = 0{,}005 A_3 A_6 / A_4 A_5;$$

$$S_{K_t}^{\lambda 4} /_{m=5} = 0{,}027 A_3 A_6 / A_4 A_5,$$

т.е. чувствительность показателя устойчивости для уравнения (41) при m=5 почти в два раза меньше, чем при m=4. Дальнейшее повышение т не дает заметного преимущества и при формировании полинома в виде (39), тогда как сложность и в реализации, и в расчете существенно увеличивается.

Следует отметить, что каждому из типов рассмотренных характеристических уравнений соответствует определенная структура системы. В работе (7) показано, что управление многорежимными объектами можно с требуемой точностью осуществлять эквивалентными адаптивным САУ. К системам, реализующим уравнения вида (14) и (25), можно отнести САУ с обратной моделью в обратной связи, САУ, устойчивые при k→∞, СПС в скользящем режиме и др. Что же касается уравнений (15), (26), а также (35) и (39), то они реализуются в структурах параметрически инвариантных компенсационных систем (ПИКС) [6] при изменении параметра K_t в ограниченном диапазоне [7].

Выводы по работе

Таким образом, в работе проводилась оценка чувствительности различных показателей качества, соответствующая определению чувствительности (8). Понятие логарифмической чувствительности также может быть использовано для тех же целей, причем в этом случае получаются более простые выражения с потерей некоторой информации о чувствительности системы. Например, для уравнения (25) оценки чувствительности принимают следующие значения

$$\overline{S}_{K_t}^{\lambda m} = \overline{S}_{K_t}^{\partial m} = 1, \overline{S}_{K_t}^{\lambda m-2} = \overline{S}_{K_t}^{\lambda m-1} = -1, \qquad (44)$$

а для уравнения (26)

$$\overline{S}_{K_t}^{\lambda m} = \overline{S}_{K_t}^{\lambda m-1} = \overline{S}_{K_t}^{\partial m} = \overline{S}_{K_t}^{\beta} = 1/m. \qquad (45)$$

Остальные значения оценок чувствительности равны нулю.

Информация о зависимости чувствительности от параметра т сохраняется, хотя и теряется информация об изменении чувствительности от K_t.

Предлагаемые в работе оценки чувствительности могут быть использованы не только для выбора структуры системы, но и для определения параметров применения синтезируемой системы из условий минимума чувствительности их качественных показателей к переменным параметрам. При этом при наличии зависимостей типа (6), (7) и условий типа (5) задачу синтеза можно формулировать в виде задачи математического программирования, где минимизируемым функционалом может быть одна из чувствительностей качественных показателей системы к переменному параметру.

Список литературы

1. *Артамонов Д.В. Основы теории линейных систем автоматического управления / Д.В. Артамонов, А.Д. Семёнов // – Пенза: Пенз. гос. ун-т, 2003. – 135 с.*
2. *Основы автоматизации управления производством / И.М. Макаров, Н.Д. Дмитриева, Д.П. Ким [и др.]. – М.: Высшая школа, 1983. – 504 с.*

3. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы / А.Г. Александров. – М.: Высш. шк., 1986. – 262 с.
4. Теория автоматического управления / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев [и др.]. – М.: Высшая школа, 2003. – 567 с.
5. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления / А.А. Ерофеев. – СПб.: Политехника, 1998. – 295 с.
6. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин // – М.: Наука, 1979. – 430 с.
7. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы / Д.П. Ким. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

Поступила в редколлегию 4.01.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.Л. Баранов, Киевская государственная академия водного транспорта имени гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Киев.

ПРОЕКТУВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ ІНВАРІАНТНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ЗАСТОСУВАННЯ ОЦІНОК ЇХ ЧУТЛИВОСТІ

С.М. Кучерук

У статті представлені результати досліджень щодо використання оцінок чутливості для параметричних інваріантних автоматизованих систем управління, особливістю якої є побудова функціональних зв'язках між якістю системи і її параметрами.

Ключові слова: *інваріантність, чутливість, стійкість, система, структура.*

PLANNING OF PARAMETRICHESKIKH INVARIANT SYSTEMS ON BASIS OF APPLICATION OF ESTIMATIONS OF THEIR SENSITIVENESS

S.M. Kucheruk

In the article the results of researches are presented in relation to the use of estimations of sensitiveness for параметрических invariant automated control the system, the feature of which is a construction functional connections between quality of the system and its parameters.

Keywords: *invariance, sensitiveness, stability, system, structure.*