

---

УДК 623.41

В.І. Макеєв<sup>1</sup>, Ю.І. Пушкарьов<sup>1</sup>, В.В. Воронько<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сумський державний університет, Суми

<sup>2</sup> Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків

## **РУХ ЦЕНТРУ ВАГИ НЕКЕРОВАНОЇ РАКЕТИ НА АКТИВНІЙ ДІЛЯНЦІ ТРАЄКТОРІЇ**

*В статті розглядається система диференціальних рівнянь (СДУ) некерованої ракети на активній ділянці траєкторії та пропонуються методи вирішення СДУ.*

**Ключові слова:** активна ділянка траєкторії, початкові умови, метод Рунге-Кутта, вага ракети, вага порохового заряду, швидкість ракети, тяга двигуна.

### **Диференціальні рівняння руху центру ваги некерованої ракети на активній ділянці траєкторії**

Розглянемо поступальний рух або рух центра мас некерованої ракети на активній ділянці траєкто-

рії (АДТ) у вертикальній площині кидання або наступних припущеннях.

1. Ракета являє собою матеріальну точку змінної маси, що рухається під дією сили тяги двигуна  $P$ , сили лобового опору  $R_x$  і сили тяжіння  $G$ . Це припущення означає, що не враховуються коливання

ракети (кут нутації  $\delta = 0$ ), поздовжня вісь ракети і вектор сили тяги збігаються з напрямком вектора швидкості ракети.

2. Прискорення сили тяжіння постійного за величиною і напрямком і збігається з напрямком вертикалі в початковій точці траєкторії.

3. Поверхня Землі приймається за площину, збігається з площиною горизонту початкової точки траєкторії.

4. Обертання Землі не враховується.

5. Вітер відсутній.

При зроблених припущеннях ракета робить тільки поздовжнє поступальний рух, тобто її траєкторія буде розташована у вертикальній площині кидання.

Виходячи із зроблених припущень, складемо диференціальні рівняння руху центру мас ракети (поступального руху ракети) в проекціях на дотичну і нормаль до траєкторії. В якості вихідної залежності візьмемо векторне рівняння поступального руху ракети під дією трьох сил: тяги  $P$ , лобового опору  $R_x$  тяжіння  $G$ :

$$\overline{m\omega} = \overline{P} + \overline{R_x} + \overline{G}, \quad (1)$$

де  $\overline{\omega}$  – вектор повного прискорення центра мас ракети;  $m$  – маса ракети в розглянутий момент часу.

Векторне рівняння (1) виражає другий закон механіки: добуток маси ракети на її лінійне прискорення (вектор) дорівнює сумі діючих на ракету сил (векторів). Спроекуємо векторне рівняння руху центру мас ракети на дотичну  $\tau$  і нормаль  $n$  до траєкторії (рис. 1). У рівнянні поступального руху ракети в проекції на будь-яку вісь зліва записується добуток маси ракети на складову (проекцію) повного прискорення ракети по даній осі, а праворуч – сума проекцій на дану вісь всіх діючих на ракету сил.

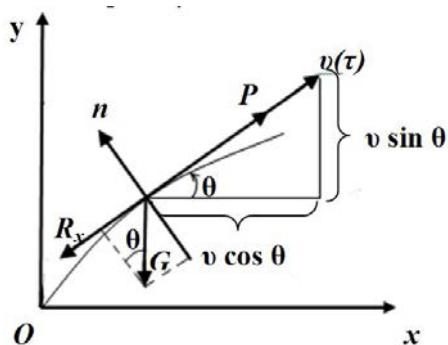


Рис. 1. Сили, що діють на ракету

Складові (проекції) повного прискорення центра мас ракети по дотичній  $\omega_\tau$  і по нормалі  $\omega_n$  до траєкторії визначаються наступними виразами:

$$\omega_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad \omega_n = v \frac{d\theta}{dt}. \quad (2)$$

Дотичне прискорення  $\omega_\tau$  є похідна модуля вектора швидкості за часом, а нормальне прискорення  $\omega_n$  можна представити як результат повороту векто-

ра швидкості у вертикальній площині з кутовою швидкістю  $\frac{d\theta}{dt}$ , обумовленої безперервною зміною кута  $\theta$  нахилу дотичної до траєкторії  $\tau$  (зниженням дотичної до траєкторії  $\tau$  під дією сили тяжіння).

Враховуючи проекції сил  $\overline{P}$ ,  $\overline{R_x}$ ,  $\overline{G}$ , на осі  $\tau$  і  $n$  (рис. 1):

$$P_\tau = P; \quad R_{x\tau} = -R_x; \quad G_\tau = -G \sin \theta;$$

$$P_n = 0; \quad R_{xn} = 0; \quad G_n = -G \cos \theta,$$

отримуємо рівняння поступального руху ракети в проекціях на дотичну і нормаль до траєкторії

$$m \frac{dv}{dt} = P - R_x - G \sin \theta; \quad m v \frac{d\theta}{dt} = -G \cos \theta. \quad (3)$$

До рівнянь поступального руху ракети необхідно додати рівняння зв'язку між координатами  $x$ , у земної стартової системи координат  $Ox$  і проекціями вектора поступальної швидкості ракети (рис. 1);

$$\frac{dy}{dt} = v \sin \theta; \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \theta. \quad (4)$$

Ці рівняння зв'язку показують, що похідна будь-якої координати за часом, тобто швидкість переміщення ракети по напрямку даної осі, дорівнює проекції швидкості центра мас ракети на дану координатну вісь. Поділивши ліву і праву частини першого рівняння (1) на масу ракети  $m$ , а другого – на добуток маси і швидкості  $mv$  та враховуючи, що  $G/m = g$ , запишемо систему диференціальних рівнянь руху центру мас некерованої ракети на АДТ в такому вигляді:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(P - R_x) - g \sin \theta; \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v};$$

$$\frac{dy}{dt} = v \sin \theta; \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \theta. \quad (5)$$

У загальному випадку система чотирьох диференціальних рівнянь (5), яка містить чотири шукані функції часу – елементи траєкторії  $v$ ,  $\theta$ ,  $y$  та  $x$ , вирішуються методом чисельного інтегрування. Для інтегрування отриманої системи диференціальних рівнянь руху центру мас ракети на АДТ маємо наступні початкові умови у момент сходу ракети з направляючої при  $t = 0$ :

$$v = v_0; \quad \theta = \theta_0; \quad y = y_0 = 0; \quad x = x_0 = 0.$$

В результаті чисельного інтегрування системи (4) диференціальних рівнянь руху центру мас ракети для послідовних значень часу польоту  $t$  будуть визначені чисельні значення всіх елементів поточних точок активної ділянки траєкторії.

## Розрахунок елементів траєкторії методом чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху

Застосування методів чисельного інтегрування рівнянь руху для розрахунків траєкторії ракет і снарядів обумовлено насамперед універсальністю цих методів, що дозволяють проводити розрахунки траєкторій в будь-яких умовах польоту з будь-якою

наперед заданою точністю. Крім того, необхідність застосування методів чисельного інтегрування для отримання найбільш точних результатів розрахунків траєкторій обумовлена тим, що сили і моменти, що входять в рівняння руху ракети, виражаються через функції параметрів стану повітря, параметрів ракети і елементів її руху. Ці функції, наприклад,  $c_x(M)$ ,  $H(y)$ ,  $\pi(y)$ ,  $a(y)$ ,  $|m|(t)$ , визначаються експериментальними або розрахунковими методами, не мають аналітичного вираження і зазвичай задаються у вигляді графіків або числових таблиць з постійним кроком аргументу.

Для пояснення ідеї розрахунку траєкторії методом чисельного інтегрування розглянемо як приклад як чисельно інтегрується система рівнянь (3) руху центру мас некерованої ракети на активній ділянці траєкторії найпростішим методом – методом Ейлера.

Замінюючи диференціали невеликими кінцевими приростами, запишемо систему рівнянь (5) в такому вигляді:

$$\Delta v = \left[ \frac{1}{m} (P - R_x) - g \sin \theta \right] \Delta t; \quad \Delta \theta = - \frac{g \cos \theta}{v} \Delta t;$$

$$\Delta y = v \sin \theta \Delta t; \quad \Delta x = v \cos \theta \Delta t. \quad (6)$$

Вирази (6) дозволяють визначити прирощення елементів руху (траєкторії) ракети  $\Delta v$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta y$  та  $\Delta x$  за інтервал часу руху  $\Delta t$ . Для цього необхідно знати параметри ракети, залежність секундного витрати маси від часу руху, залежність  $c_x(M)$ , залежність параметрів стану повітря від висоти (наприклад, у вигляді функцій  $H(y)$ ,  $\pi(y)$  та  $a(y)$  для нормальної артилерійської атмосфери), а також початкові умови польоту. Переймаючись деяким інтервалом часу  $\Delta t = h$  як кроком інтегрування, який можна змінювати в процесі розрахунку, і підставляючи в праві частини виразів (6) значення всіх параметрів при  $t = t_0 = 0$  ( $m_0$ ,  $P_0$ ,  $R_{x0}$ ,  $\theta_0$ ,  $v_0$ ), знаходять прирощення елементів руху за перший крок інтегрування:  $\Delta v_0$ ,  $\Delta \theta_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta x_0$  і отримують значення елементів руху в момент часу

$$t_1 = t_0 + \Delta t = t_0 + h = h; \quad v_1 = v_0 + \Delta v_0;$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \Delta \theta_0; \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0; \quad x_1 = x_0 + \Delta x_0.$$

Аналогічно обчислюють значення елементів траєкторії в наступні моменти часу.

Розглянутий найпростіший метод чисельного інтегрування рівнянь руху з використанням тільки перших різниць дає задовільні по точності результати тільки при малому кроці інтегрування.

У практиці неавтоматизованого розрахунку траєкторій ракет методом чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху зазвичай застосовується запропонований в 1917 р. академіком А.Н. Криловим більш точний і досконалий метод, заснований на теорії інтерполяції і кінцевих різниць [2].

Неавтоматизованих розрахунків траєкторій на клавішних обчислювальних машинах методом чисельного інтегрування застосовується для виконання порівняно невеликих за обсягом розрахунків, тобто

в умовах, коли використання ЕЦОМ економічно не виправдовується (враховуючи витрати на складання і налагодження програми). Однак і в разі розрахунків траєкторій на ЕЦОМ метод «ручного рахунку» знаходить застосування для розрахунку контрольних даних з метою налагодження програми рахунку на ЕЦОМ. Масові розрахунки траєкторій методом чисельного інтегрування рівнянь руху ракет і снарядів, наприклад при розрахунках Таблиць ракет або Таблиць стрільби, виробляють на ЕЦОМ.

## Аналітичний метод розрахунку активної ділянки траєкторії некерованої ракети

### Перетворення рівняння для швидкості ракети

Аналітичні методи розрахунку активної ділянки траєкторії некерованої ракети засновані на використанні системи рівнянь (5) і розрізняються способами її інтегрування. Зазвичай при цьому перетворюють рівняння для швидкості ракети [перше рівняння системи (5)], висловлюючи його праву частину в функції нової змінної  $\mu$  [2]:

$$m = \int_0^t \dot{m} |dt| / m_0, \quad (7)$$

причому  $\mu$  – відносний витрата маси ракети за час  $t$  по відношенню до початкової маси ракети  $m_0$ .

Поточна маса ракети при цьому

$$m = m_0 - \int_0^t \dot{m} |dt| = m_0 (1 - \mu). \quad (8)$$

У відповідності з виразом (7)

$$\dot{\mu} = \frac{d\mu}{dt} = \frac{|\dot{m}|}{m_0}. \quad (9)$$

Враховуючи вирази (8) і (9), а також вирази для сили тяги  $P = u_e |\dot{m}|$  і прискорення сили лобового опору, перетворимо перше рівняння системи (6):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P - R_x}{m} - g \sin \theta = \frac{P}{m} - \frac{R_x}{m} - g \sin \theta.$$

Маємо значення прискорень сили тяги і сили лобового опору:

$$\frac{P}{m} = \frac{u_e |\dot{m}|}{m_0 (1 - \mu)} = u_e \frac{\dot{\mu}}{1 - \mu};$$

$$\frac{R_x}{m} = \frac{R_x}{m_0 (1 - \mu)} = \frac{J_0}{1 - \mu} = \frac{c_0 H(y) F(v)}{1 - \mu},$$

причому  $J_0 = R_x / m_0$  – прискорення сили лобового опору повітря, віднесене до початкової маси ракети  $m_0$ ;  $c_0$  – початкове значення балістичного коефіцієнта ракети [3]:

$$c_0 = (id^2/Q) \cdot 10^3, \quad (10)$$

де  $Q = \omega + q$  – початкова вага ракети ( $\omega$  – вага порохового заряду,  $q$  – пасивна вага ракети).

Представляючи значення членів  $P/m$  та  $R_x/m$ , отримуємо рівняння для визначення швид-

кості ракети на активній ділянці траєкторії (рівняння поступального руху ракети в проекції на дотичну до траєкторії) в такому вигляді:

$$\frac{dv}{dt} = u_e \frac{\dot{\mu}}{1-\mu} - c_0 H(y) \frac{F(v)}{1-\mu} - g \sin \theta, \quad (11)$$

причому права частина цього рівняння виражається через відносний витрата маси  $\mu$ . Перший, другий і третій члени в правій частині рівняння (11) відображають відповідно вплив сили тяги  $P$ , сили лобового опору  $R_x$  і сили тяжіння  $G$  на величину прискорення ракети  $\frac{dv}{dt}$  по напрямку дотичної до траєкторії, тобто являють собою складові дотичного прискорення ракети, створені зазначеними силами.

Для розв'язання рівняння (11) в кінцевому вигляді потрібно вжити додаткових допущення. Отримаємо розв'язок рівняння (11) при наступних найпростіших припущеннях: опір повітря відсутній ( $R_x = 0$  або  $c_0 = 0$ ); сила тяжіння відсутня ( $g = 0$ ). При цих припущеннях рівняння руху ракети буде

$$\frac{dv}{dt} = u_e \frac{\dot{\mu}}{1-\mu}$$

або, оскільки  $\dot{\mu} dt = d\mu$ , отримуємо

$$dv = u_e \frac{d\mu}{1-\mu}. \quad (12)$$

Вирішуючи це рівняння при умові, що ефективна швидкість витікання постійна ( $u_e = \text{const}$ ) і вважаючи, що швидкість ракети змінюється від 0 до  $v$ , а відносна витрата маси – від 0 до  $\mu$ , отримуємо формулу для швидкості ракети в довільний момент польоту ракети на активній ділянці траєкторії

$$v = -u_e \ln(1-\mu) \Big|_0^\mu = u_e \ln \frac{1}{1-\mu} = u_e \Pi(\mu), \quad (13)$$

$$\text{де} \quad \Pi(\mu) = \ln \frac{1}{1-\mu}. \quad (14)$$

Максимальна швидкість ракети  $v_{\text{max}} = v_k$ , буде в момент закінчення роботи двигуна при  $\mu = \mu_k$ . Підставляючи значення  $\mu_k$ , рівне відношенню маси  $m_{\text{п}}$  (ваги  $\omega$ ) порохового заряду до початкової маси  $m_0$  (ваги  $Q$ ) ракети

$$M_k = \frac{m_{\text{п}}}{m_0} = \frac{\omega}{Q} = \frac{\omega}{\omega + q},$$

отримаємо формулу для максимальної швидкості ракети

$$v_k = u_e \ln \frac{1}{1-M_k} = u_e \ln \left( 1 + \frac{\omega}{q} \right), \quad (15)$$

яка показує, що збільшення максимальної швидкості ракети (в кінці роботи двигуна) досягається: за рахунок збільшення ефективної швидкості витікання  $u_e$  або одиничного імпульсу  $I_1$ , порохового заряду (двигуна), тобто за рахунок збільшення енергетичної характеристики палива; за рахунок збільшення відносного ваги палива  $\omega/q$ .

## Розрахунок елементів кінця активної ділянки траєкторії

Розглянемо рух ракети по направляючій при наступних припущеннях.

1. Ракету здійснює тільки поступальний рух по прямолінійній направляючій під дією сили тяги двигуна  $P$ , сили тяжіння  $G$ , і сили тертя  $T$  між провідними пристроями ракети і направляючої (рис. 2).

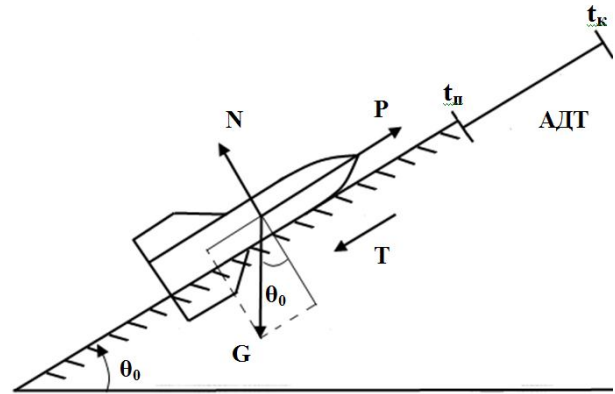


Рис. 2. Рух ракети по направляючій

2. При малій швидкості руху ракети по направляючій сила лобового опору пренебрежимо мала і не враховується.

Складемо рівняння поступального руху ракети вздовж направляючої, яка має кут піднесення  $\theta_0$  (рис. 2):

$$m\omega = P - G \sin \theta_0 - T. \quad (16)$$

Сила тертя  $T = fN$  дорівнює добутку коефіцієнта тертя  $f$  на величину нормальної реакції направляючої  $N$ , яку визначимо з умови рівноваги сил по нормалі до направляючої:

$$N - G \cos \theta_0 = 0 \quad \text{або} \quad N = G \cos \theta_0.$$

Підставляючи в рівняння (16) значення сили тертя  $T = fN = fG \cos \theta_0$ , визначимо прискорення поступального руху ракети по направляючій:

$$\overset{я}{v} = \omega = \frac{P}{m} - g(\sin \theta_0 + f \cos \theta_0). \quad (17)$$

У загальному випадку при змінних значеннях маси  $m$  ракети і сили тяги  $P$  двигуна визначимо швидкість  $v$  і шлях  $s$  ракети по напрямній методом чисельного інтегрування рівняння (17), використовуючи співвідношення між прискоренням  $\omega$ , швидкістю  $v$  і шляхом  $s$ :

$$v = \int_0^t \omega dt; \quad s = \int_0^t v dt. \quad (18)$$

Для наближеного розрахунку елементів руху ракети в момент сходу з направляючої приймаю постійні осереднені значення сили тяги  $P$  і маси ракети за час руху по направляючій. У цьому випадку вважають, що рух ракети по направляючій відбувається з постійним прискоренням

$$j = \frac{P_{\text{ср}}}{m_{\text{ср}}} - g(\sin \theta_0 + f \cos \theta_0). \quad (19)$$

Вважаючи при  $|\dot{m}| = \text{const} = \omega / (g\tau_a)$ , що  $P_{cp} = u_e \dot{m} = u_e \cdot \omega / (g\tau_a)$  і  $m_{cp} \approx m_0$ , отримаємо розрахункове вираз для постійного (середнього) прискорення ракети по напрямній:

$$j = \frac{u_e \omega}{Q\tau_a} - g(\sin\theta_0 + f \cos\theta_0). \quad (20)$$

Користуючись формулами для рівноприскореного руху, визначимо швидкість  $v_0$  та час  $t_0$  сходу ракети з направляючої:

$$v_0 = \sqrt{2js_0}; \quad t_0 = \sqrt{2s_0/j}. \quad (21)$$

де  $s_0$  – величина повного шляху ракети по направляючій.

Знаючи  $t_0$  визначимо відносну частину порохового заряду  $\mu_0$ , згорілу до моменту сходу ракети з направляючої:

$$\mu_0 = \frac{|\dot{m}| t_0}{m_0} = \frac{\omega t_0}{Q\tau_a}. \quad (22)$$

Величину  $\mu_0$  необхідно знати для розрахунку елементів активної ділянки траєкторії ракети аналітичним методом.

### Приклад розрахунку елементів кінця активної ділянки траєкторії некерованої ракети аналітичним методом

Вихідні дані

Калібр ракети .....  $d = 0,182$  м  
Повна початкова вага ракети .....  $Q = 160$  кг  
Вага реактивного (порохового) заряду .....  $\omega = 42,5$  кг  
Час роботи двигуна (повний час горіння порохового заряду) .....  $\tau_a = 2,96$  сек  
Ефективна швидкість витікання .....  $u_e = 2020$  м/сек  
Коефіцієнт форми ракети по відношенню до еталонної функції опору повітря 1943 р. ...  $i_{43} = 1,4$   
Кут кидання .....  $\theta_0 = 40^\circ$   
Довжина шляху ракети по направляючій ..  $s_0 = 2,66$  м  
Перше наближення. Визначимо швидкість  $v_k$  ракети:

$$v_k = u_e \zeta(\mu_k) - \alpha \Phi_1(u_e^*, \mu_k) - \beta \mu_k. \quad (23)$$

Обчислюємо  $\alpha$  і  $\beta$ :

$$\alpha = c_0 H(y)_{cp} \frac{Q\tau_a}{\omega}; \quad \beta = g \sin\theta_{cp} \frac{Q\tau_a}{\omega}.$$

У першому наближенні приймемо  $H(y)_{cp} = 1$ ;  $\sin\theta_{cp} = \sin\theta_0 = 0,6428$ :

$$1. c_0 = \frac{id^2}{Q} \cdot 10^3 = \frac{1,4 \cdot 0,182^2}{160} \cdot 10^3 = 0,290.$$

$$2. \beta = 0,290 \cdot 1 \cdot \frac{160 \cdot 2,96}{42,5} = 3,23.$$

$$3. \beta = 9,81 \cdot 0,6428 \cdot \frac{160 \cdot 2,96}{42,5} = 70,3.$$

$$4. \mu_k = \frac{\omega}{Q} = \frac{42,5}{160} = 0,2655.$$

За табл. 9 [3] знаходимо:

$$5. \zeta(\mu_k) = \zeta(0,2655) = 0,3085.$$

Приймаючи в першому наближенні  $u_e^* = u_e = 2020$ , за табл. 10 [3] визначаємо:

$$6. \Phi_1(u_e, \mu_k) = \Phi_1(2020; 0,2655) = 6,25.$$

Обчислюємо наближене значення швидкості ракети  $v_{knp}$ :

$$7. v_{knp} = u_e \zeta(\mu_k) - \alpha \Phi_1(u_e, \mu_k) - \beta \mu_k = \\ = 2020 \cdot 0,3085 - 3,23 \cdot 6,25 - 70,3 \cdot 0,2655 = \\ = 623,2 - 20,2 - 18,7 = 584,3 \text{ м/сек.}$$

Уточнюємо значення  $u_e^*$ ,  $\Phi_1(u_e^*, \mu_k)$  і  $v_k$ :

$$8. u_e^* = \frac{v_{knp}}{\zeta(\mu_k)} = \frac{584,3}{0,3085} = 1895.$$

$$9. \Phi_1(u_e^*, \mu_k) = \Phi_1(1895; 0,2655) = 5,477;$$

$$10. v_k = 623,2 - 3,23 \cdot 5,477 - 18,7 = 623,2 - 17,7 - 18,7 = 586,8 \text{ м/сек.}$$

Цей приклад показує, що сила опору повітря і сила тяжіння спільно зменшують максимальну швидкість ракети приблизно на 6%.

Визначимо довжину дуги траєкторії  $s_k$  при  $\mu = \mu_k$ :

$$s_k = \frac{Q\tau_a}{\omega} \left[ u_e \Phi_2(\mu_k) - \alpha \Phi_3(u_e^*, \mu_k) - \frac{\beta \mu_k^2}{2} \right]. \quad (24)$$

За табл. 9 і 11 [3] знаходимо:

$$11. \Phi_2(\mu_k) = \Phi_2(0,2655) = 0,0389.$$

$$12. \Phi_3(u_e^*, \mu_k) = \Phi_3(1895; 0,2655) = 0,285.$$

За формулою (19) обчислюємо довжину дуги активної ділянки траєкторії  $s_k$ .

$$13. s_k = \frac{160 \cdot 2,96}{42,5} (2020 \cdot 0,0389 - 3,23 \cdot 0,285 - 0,5 \times \\ \times 70,3 \cdot 0,2655^2) = 11,14(78,58 - 0,92 - 2,48) = 837,5 \text{ м}$$

Визначимо кут нахилу дотичної  $\theta_k$  в кінці активної ділянки траєкторії, при  $\mu = \mu_k$ :

$$\xi(\theta)_k = \xi(\theta_0) - \frac{gQ\tau_a}{\omega u_e} [\Phi_4(\mu_k) - \Phi_4(\mu_0)]. \quad (25)$$

Попередньо визначимо величину  $\mu_0$ .

Підрахуємо прискорення ракети при русі по направляючій, приймаючи коефіцієнт тертя  $f=0,1$ :

$$14. j = \frac{u_e \omega}{Q\tau_a} - g(\sin\theta_0 + f \cos\theta_0) = \frac{2020 \cdot 42,5}{160 \cdot 2,96} - \\ - 9,81(0,6428 + 0,1 \cdot 0,766) = 174,2 \text{ м / сек}^2.$$

Визначимо час сходу ракети з направляючої після початку руху:

$$15. t_0 = \sqrt{\frac{2s_0}{j}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,66}{174,2}} = 0,1748 \text{ сек.}$$

Знаходимо  $\mu_0$ :

$$16. \mu_0 = \frac{\omega \cdot t_0}{Q\tau_a} = \frac{42,5 \cdot 0,1748}{160 \cdot 2,96} = 0,0157.$$

За табл. 9 і 12 [3] знаходимо:

$$17. \Phi_4(\mu_0) = \Phi_4(0,0157) = 0,392.$$

$$18. \Phi_4(\mu_k) = \Phi_4(0,2655) = 3,150.$$

$$19. \xi(\theta_0) = \xi(40^\circ) = 0,7629.$$

Визначаємо  $\bar{u}_e$ :

$$20. \bar{u}_e = 0,5(u_e + u_e^*) = 0,5(2020 + 1895) = 1958 \text{ м/сек.}$$

Обчислюємо  $\xi(\theta_k)$ :

$$21. \xi(\theta_k) = 0,7629 - \frac{9,81 \cdot 160 \cdot 2,96}{42,5 \cdot 1958} (3,150 - 0,392) = 0,6089.$$

За табл. 12 [3] знаходимо  $\theta_k$ :

$$22. \theta_k = 32^\circ 55'.$$

Визначимо координати  $y_k$  і  $x_k$  кінця кінця активної ділянки траєкторії для точки К:

$$y_k = s_k \sin \theta_{cp}; \quad x_k = s_k \cos \theta_{cp}; \quad \theta_{cp} = \gamma \theta_0 + (1 - \gamma) \theta_k.$$

$$23. \gamma = \frac{1}{2 \cdot 2,303 \lg \frac{\tau_a}{t_0}} = \frac{1}{2 \cdot 2,303 \lg \frac{2,96}{0,1748}} = 0,177.$$

$$24. \theta_{cp} = 0,177 \cdot 40^\circ + 0,823 \cdot 32^\circ 55' = 34^\circ 11'.$$

$$25. \sin \theta_{cp} = \sin 34^\circ 11' = 0,5619; \quad \cos \theta_{cp} = \cos 34^\circ 11' = 0,8273.$$

$$26. y_k = 837,5 \cdot 0,5619 = 471 \text{ м}; \quad x_k = 837,5 \cdot 0,8273 = 692 \text{ м.}$$

Друге наближення. Уточнюємо розрахунок, враховуючи отримані значення  $y_k$  і  $\theta_{cp}$ .

$$27. \text{Для } y_k = 471 \text{ м прийmemo } u_{cp} = 0,5 u_k = 236 \text{ м.}$$

За табл. 3 [3] знаходимо  $H(y)_{cp} = H(u_{cp}) = H(236) = 0,977$ . Підставляючи в вираз для  $\alpha$   $H(y)_{cp} = 0,977$  замість  $H(y)_{cp} = 1$  і в вираз для  $\beta$  значення  $\sin \theta_{cp}$  замість  $\sin \theta_0$ , отримаємо

$$28. \alpha = c_0 H(y)_{cp} \frac{Q\tau_a}{\omega} = 0,290 \cdot 0,977 \frac{160 \cdot 2,96}{42,5} = 3,16.$$

$$29. \beta = g \sin \theta_{cp} \frac{Q\tau_a}{\omega} = 9,81 \cdot 0,5619 \cdot \frac{160 \cdot 2,96}{42,5} = 61,4.$$

Обчислюємо значення  $v_k$ , підставляючи в формулу  $v_k$  уточнені значення коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$  і отри-

мане раніше уточнене значення функції

$$\Phi_1(u_e^*, \mu_k) = 5,477.$$

$$30. v_k = 623,2 - 3,16 \cdot 5,477 - 61,4 \cdot 0,2655 = 623,2 - 17,3 - 16,3 = 589,6 \text{ м/сек (замість } v_k = 586,8 \text{ м/сек в першому наближенні).}$$

Обчислюємо уточнене значення довжини дуги

$$s_k \left( \frac{Q\tau_a}{\omega} = 11,14 \right):$$

$$31. s_k = 11,14(78,58 - 3,16 \cdot 0,285 - 0,5 \cdot 61,4 \times \times 0,2655^2) = 11,14(78,58 - 0,90 - 2,16) = 841,3 \text{ м (замість } s_k = 837,5 \text{ м в першому наближенні).}$$

Величини  $\theta_k$  і  $\theta_{cp}$ , обчислені раніше, залишаються незмінними. Уточнюємо координати  $y_k$  і  $x_k$ :

$$32. y_k = s_k \sin \theta_{cp} = 841,3 \cdot 0,5619 = 473 \text{ м};$$

$$x_k = s_k \cos \theta_{cp} = 841,3 \cdot 0,8273 = 696 \text{ м.}$$

## Висновки

1. У статті запропонована система диференціальних рівнянь руху центру мас для некерованих ракет на твердому паливі.

2. Розкрито аналітичний метод розрахунку параметрів активної ділянки траєкторії.

3. Показаний розрахунок параметрів активної ділянки траєкторії.

## Список літератури

1. Гантмахер Ю.И., Левин Л.М. Теория полета неуправляемых ракет. – М.: Издательство физико-математической литературы, 1959. – 355 с.
2. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика. – М.: Издательство «Машиностроение», 2005. – 607 с.
3. Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуправляемых ракет и снарядов. – МО СССР, 1976. – 184 с.

Надійшла до редколегії 15.04.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, доц. І.В. Шостак, Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «ХАІ», Харків.

## ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАССЫ НЕУПРАВЛЯЕМОЙ РАКЕТЫ НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ

В.И. Макеев, Ю.И. Пушкарев, В.В. Воронько

*В статье рассматривается система дифференциальных уравнений (СДУ) неуправляемой ракеты на активном участке траектории и предлагаются методы решения СДУ.*

**Ключевые слова:** активный участок траектории, начальные условия, метод Рунге-Кутты, вес ракеты, вес порохового заряда, скорость ракеты, тяга двигателя.

## THE CENTER OF MASS OF UNMANAGED ROCKETS AT THE BOOST PHASE

V.I. Makeev, Y.I. Pushkarev, V.V. Voronko

*In this article we consider a system of differential equations (SDE) rockets at the boost phase and suggests methods for solving the SDE.*

**Keywords:** active phase of the trajectory, the initial conditions, Runge-Kutt method, the weight of the rocket, the weight of the powder charge, rocket speed, engine thrust.