

УДК 621.391

А.Н. Барсуков, В.Ж. Ященко, В.В. Парфило

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ D<sub>t</sub>-СТАТИСТИКИ В ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ ХАОТИЧЕСКОГО СИГНАЛА, ИСКАЖЕННОГО ШУМОМ

В статье предлагается непараметрический алгоритм обнаружения хаотических процессов, сформированных нелинейной динамической системой Маккея-Гласса и логистическим отображением, с использованием D<sub>t</sub>-статистик.

**Ключевые слова:** хаотический процесс, фазовое пространство, D<sub>t</sub>-статистика, корреляционный интеграл.

### Введение

Стремительное развитие, за последнее время, современных систем передачи информации (СПИ) с использованием хаотических несущих для повышения помехозащищенности показало, что для их анализа требуются дополнительные подходы, опирающиеся на методы из теории нелинейного анализа временных рядов [1, 2].

Из теории систем связи известно, что помехозащищенность включает в себя скрытность (способность противостоять мерам радиотехнической разведки) и помехоустойчивость [1, 3]. Скрытность системы, в свою очередь, обеспечивается работой СПИ «под шум» и количественно определяется вероятностями обнаружения сигнала и раскрытия его структуры [1 – 3]. На практике задачу обнаружения сигнала, как правило, приходится решать исходя из условия ограниченной длительности принятой реализации наблюдения без априорной информации ее характеристик и параметров передаваемого сигнала [3]. Поиск решения подобных задач привел разработчиков к необходимому использованию подходов, связанных с геометрическим представлением хаотических несущих в фазовом (псевдофазовом) пространстве [1 – 3]. Фазовое пространство оказалось достаточно наглядным [3], и его свойства дают больше информации о структуре процесса, чем, например, при анализе только энергетического спектра наблюдения [3].

Активное применение методов основанных на теореме Такенса (Takens) [4] позволило по наблюдаемой временной реализации

$$\bar{x} = x(t_1) = \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)\}$$

восстанавливать модель аттрактора состояний в фазовом пространстве исходной динамической системы. Такая модель имеет такую же динамику и неизменные топологические свойства [4]. Идея процедуры восстановления заключалась в том, что недостающие динамические переменные связаны с производной исходного фазового пространства  $[x(t_1), dx(t_1)/dt, \dots, d^{m-1}x(t_1)/dt^{m-1}]$  [4]. Для этого

необходимо построить зависимость наблюдаемой переменной  $\bar{x} = x(t_1)$  от ее же величины в другой момент времени, отстающий на постоянную величину  $\tau$ :  $[x(t_1), x(t_1 + \tau), \dots, x(t_1 + (m-1)\tau)]$ , где  $m$  – размерность «пространства вложения» (псевдофазового пространства), определяемая условием:  $m \geq 2d_c + 1$ , в котором  $d_c$  – корреляционная размерность [4], вычисляемая как соотношение  $d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log C_{m,N}(\varepsilon) / \log(\varepsilon))$ , где  $C_{m,N}(\varepsilon)$  – «корреляционный интеграл» [5], а  $\varepsilon$  – радиус «покрытия» в фазовом пространстве [5].

Оценка корреляционной размерности  $d_c$  наблюдаемого процесса наиболее широко используется в нелинейном анализе характеристик динамических систем, позволило в некоторых случаях классифицировать природу процесса (шум или нелинейность) [5, 6]. Кроме того с точки зрения применения в задаче обнаружения хаотических сигналов, оценки  $d_c$  обладает рядом существенных недостатков:

- точность оценки корреляционной размерности  $d_c$  и пространства вложения  $m$  зависит от длины временного ряда и часто опирается на графический анализ;

- нет практического способа различить хаотический процесс с высокой корреляционной размерностью (большей, чем 5) и действительно случайный процесс, так как графики логарифма корреляционной суммы относительно логарифма покрытия  $\varepsilon$  не имеет отчетливого линейного участка [6];

- в случае зашумления или усложнения структуры хаотических несущих для их классификации или обнаружения требуются дополнительные исследования.

Вышеперечисленные недостатки стали причиной к поискам новых подходов для решений в задачах обнаружений, которое привело исследователей к применению модифицированных методов оценки корреляционной размерности [5], основанных на свойствах корреляционного интеграла  $C_{m,N}(\varepsilon)$ , перечислим некоторые из них [5]:

1. Оценка Такенса

$$w^{ML}_{m,N}(\varepsilon) = \frac{C_{m,N}(\varepsilon)}{\int_0^\varepsilon \frac{C_{m,N}(\varepsilon')}{\varepsilon'} d\varepsilon'}$$

2. BDS-статистика (BDS)

$$w^{BDS}_{m,N}(\varepsilon) = \sqrt{N-m} \frac{C_{m,N}(\varepsilon) - C_{1,N-m}(\varepsilon)^m}{\sigma_{m,N}(\varepsilon)} \quad (1)$$

3. Dechert-статистика

$$w^{Dt}_{m,N}(\varepsilon, \varepsilon_1) = \sqrt{N-m} \times \frac{C_{m,N-m}(\varepsilon, \varepsilon_1) - C_{1,N-m}(\varepsilon)C_{1,N-m}(\varepsilon_1)}{\sigma_{m,N}(\varepsilon, \varepsilon_1)} \quad (2)$$

В работах [1, 2] рассматривался алгоритм обнаружения хаотического сигнала на фоне шума с помощью BDS-статистики, его характеристики обнаружения не уступили в эффективности традиционному энергетическому обнаружителю [1]. Однако, как стало понятно, применение BDS-обнаружителя [1] привело к дополнительным расчетам характеристик, связанных с перебором вариаций значений радиуса покрытий  $\varepsilon$  и вложений  $m$  в фазовом пространстве.

**Цель работы.** В данной работе предлагается алгоритм непараметрического обнаружения хаотического процесса на фоне измерительного шума с применением Dechert-статистик (Dt-статистик).

**Основная часть**

Рассмотрим алгоритм обнаружения хаотического сигнала  $f(t_i)$ , основанный на Dt-статистике (2) [5], опирающийся на «корреляционный интеграл»  $C_{m,N}(\varepsilon, \varepsilon_1)$  с двойным интервалом «покрытия»  $\varepsilon, \varepsilon_1$ , для  $m \geq 1$ , описываемый следующим образом:

$$C_{m,N}(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{2}{(N-m+1)(N-m)} \times \sum_{s=1}^{N-m} \sum_{t=s+1}^{N-m} I_\varepsilon(\xi_s, \xi_t) I_{\varepsilon_1}(\xi_{s+m}, \xi_{t+m})$$

где  $I_\varepsilon(\xi_s, \xi_t)$  è  $I_{\varepsilon_1}(\xi_{s+m}, \xi_{t+m})$  – функция Хэвисайда:

$$I_\varepsilon(\xi_s, \xi_t) = \begin{cases} 1, & \|\xi_s^m - \xi_t^m\| \leq \varepsilon \\ 0, & \|\xi_s^m - \xi_t^m\| > \varepsilon \end{cases} \text{ и}$$

$$I_{\varepsilon_1}(\xi_{s+m}, \xi_{t+m}) = \begin{cases} 1, & \|\xi_{s+m}^m - \xi_{t+m}^m\| \leq \varepsilon_1 \\ 0, & \|\xi_{s+m}^m - \xi_{t+m}^m\| > \varepsilon_1 \end{cases};$$

$$(0 \leq s \leq N, 0 \leq t \leq N),$$

определяющих частоту попадания всех пар точек  $\xi_t^m$  и  $\xi_s^m$ , заданных своими проекциями  $(\xi_s, \xi_{s+1}, \dots, \xi_{s+m})$

и  $(\xi_t, \xi_{t+1}, \dots, \xi_{t+m})$  при условии, что  $|s-t| > m$  [5],  $N$  – число элементов наблюдаемой последовательности временного ряда  $\vec{\xi} = \{\xi_i\}_{i=1}^{N-m} = (\xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \xi_{i+m})$ , состоящей из аддитивной смеси хаотического процесса и шума  $\xi(t_i) = f(t_i) + n(t_i)$ . Знаменатель  $\sigma_{m,N}(\varepsilon, \varepsilon_1)$  (2) равен среднеквадратическому отклонению числителя [5].

В работе [5] автор показал, если наблюдаемые случайные значения принадлежат генеральной совокупности независимы и тождественно распределены (I.I.D.), то предел разности их интегралов равен

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ C_{m,N-m}(\varepsilon, \varepsilon_1) - C_{1,N-m}(\varepsilon)C_{1,N-m}(\varepsilon_1) \right] = 0,$$

с нулевым средним и дисперсией, определяется как:

$$\hat{\sigma}_{m,N}^2(\varepsilon, \varepsilon_1) = 4 \left[ R_{1,N-m}(\varepsilon) - C_{1,N-m}(\varepsilon)^2 \right] \times \left[ R_{1,N-m}(\varepsilon_1) - C_{1,N-m}(\varepsilon_1)^2 \right];$$

$$R_{1,N} = \frac{1}{N(N-1)(N-2)} \sum_{t=1}^N \left[ \sum_{s=1}^N I_\varepsilon(\xi_t, \xi_s) \right]^2$$

На основании этого, с точки зрения применения  $w^{Dt}_{m,N}(\varepsilon, \varepsilon_1)$  (2) для обнаружения хаотического сигнала разведприемником, можно сформулировать статистический критерий проверки гипотез, если принимается  $H_0$ , то данные  $\vec{\xi} = \{\xi_i\}_{i=1}^{N-m}$  являются I.I.D. в случае же отвержения – наблюдаемая реализация состоит из аддитивной смеси шума и сигнала [5].

Ниже по контексту приводятся результаты расчета характеристик вероятности обнаружения хаотического процесса  $p_\beta(\delta, \varepsilon)$  (рис. 1 и 3) при различных значениях отношения сигнал/шума  $\delta = \sigma_f / \sigma_n$ , где  $\sigma_f$  и  $\sigma_n$  – среднеквадратичные отклонения хаотического процесса  $f(t_i)$  и белого гауссова шума  $n(t_i)$  с нулевым математическим ожиданием соответственно. Проверяется гипотеза  $H_0$  об отсутствии в наблюдении  $\{\xi_i\}_{i=1}^{N-m}$  хаотического процесса  $f(t_i)$ , т. е. принимается неравенства  $|w^{Dt}_{m,N}(\varepsilon, \varepsilon_1)| \leq 1,96$ , что соответствует уровню значимости  $\alpha$  (вероятности ошибки первого рода) и, тогда с 95% уверенностью можно принять гипотезу  $H_0$  о независимости и тождественном распределении (I.I.D.) [1]. В случае отклонения  $H_0$  данные не I.I.D, что соответствует появлению на фоне белого шума хаотического сигнала  $f(t_i)$ , поскольку изменяются вероятностные свойства не только наблюдения  $\{\xi_i\}_{i=1}^{N-m}$

[1], но и Dt-статистики. Следует напомнить, что при проверке статистической гипотезы недостаточно опираться на критерий значимости  $\alpha$  [1]. Поэтому определяется мощность критерия  $1-\beta$  ( $\beta = P(\xi_i \in G_\alpha | H_1)$ ) [1], где  $G_\alpha$  – критическая область уровня значимости  $\alpha = 0,05$ ) и  $\beta$  – вероятность ошибки второго рода [1].

В качестве примера используется хаотический процесс  $f(t_i)$ , сформированный нелинейной динамической системой Маккея-Гласса (Mackey-Glass)

$$\dot{f}(t) = -bf(t) + \frac{af(t-\tau)}{1+(f(t-\tau))^{10}},$$

описываемой дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом [1]. Его решение проводилось численным методом Рунге – Кутты четвертого порядка с шагом дискретизации  $h = 0,1$  при значениях параметров  $a = 0,2$ ,  $b = 0,1$ ,  $\tau = 100$ , которые обеспечивают хаотический режим, и задании  $\tau/h$  начальных значений  $\{f_i\}_{i=1}^{\tau/h}$  [1].

В целях экономии машинных ресурсов при моделировании статистических характеристик обнаружения хаотического процесса реализация прореживалась взятием каждого ее десятого отсчета [1]. В результате полученное число элементов временного ряда составило  $N = 1000$  оказалось достаточным для сохранения свойств хаотического процесса [1]. Аддитивная смесь  $\xi(t_i) = f(t_i) + n(t_i)$  формировалась из  $M=100$  реализаций шума с фиксированной дисперсией, которые добавлялись к хаотическому процессу, что позволило получить выборку из 100 значений  $w^{Dt}$  Dt-статистик. Наблюдение  $\xi(t_i) = f(t_i) + n(t_i)$  задается на интервале времени  $T_\xi = Nh$  со значениями в моменты  $t_i = ih$  с шагом  $h$ .

На рис. 1 приведены характеристики обнаружения  $p_\beta(\delta, \varepsilon)$ , рассчитанные с привлечением Dt-статистик при значениях  $m = 1$ .

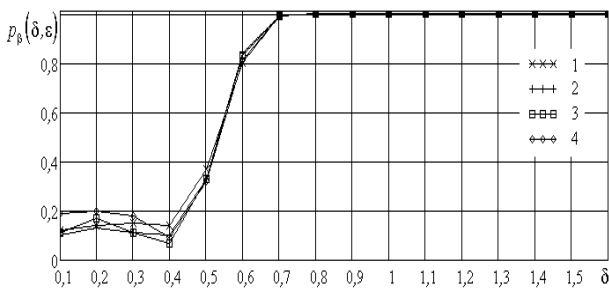


Рис. 1. Характеристики обнаружения хаотического сигнала сформированного динамической системой Маккея-Гласса

Пользуясь рекомендациями [1], интервалы «покрытий» принимались со значениями  $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_i$ ;  $\varepsilon_1 = 0,2\sigma_\xi$ ;  $\varepsilon_2 = 0,4\sigma_\xi$ ;  $\varepsilon_3 = 0,6\sigma_\xi$ ;  $\varepsilon_4 = 0,8\sigma_\xi$

(кривые 1 – 4, рис 1), где  $\sigma_\xi$  – среднее квадратичное отклонение  $\xi(t_i)$ .

Легко заметить, что на рис. 1 (зависимости 1 – 4) гипотеза  $H_0$  отвергается с вероятностью  $p_\beta \approx 0,95$  при значении отношения сигнал/шум сосредоточенной в интервале равной  $\delta \approx 0,7$ , т.е. можно говорить о присутствии нелинейных зависимостей между значениями в наблюдении  $\xi(t_i)$ . Кроме этого, на рис. 1 наблюдается устойчивость вычислений зависимостей 1 – 4 к вариациям параметра  $\varepsilon$ .

При выборке небольшого объема точная оценка  $w^{Dt}$  может существенно отличаться от истинного значения, т.е. приводить к грубым ошибкам. В таком случае часто используют интервальные оценки. По интервальной оценке, определяемой по результатам выборки, можно утверждать с вероятностью близкой к единице, значение оцениваемого параметра  $w^{Dt}$ ,  $P(\tilde{w}_i^{Dt(1)} \leq w^{Dt} \leq \tilde{w}_i^{Dt(2)}) = \gamma$ , где  $\tilde{w}_i^{Dt(1)}$  и  $\tilde{w}_i^{Dt(2)}$  нижние и верхние границы доверительного интервала значения  $w^{Dt}$ , под вероятностью  $\gamma = 1-\alpha$  понимается как доверительная вероятность [7]. Для получения представления о точности и надежности оценки  $w_i^{Dt}$ , для каждой вероятности  $\gamma$  нужно указать такое значение  $\Delta$ , при котором  $P(|\tilde{w}_n^{Dt} - w^{Dt}| < \Delta) = P(\tilde{w}_n^{Dt} - \Delta \leq w^{Dt} \leq \tilde{w}_n^{Dt} + \Delta) = \gamma$ , следовательно, чем меньше заданная доверительная вероятность  $\gamma$ , тем больше будет точность оценки  $\Delta$  [7]. В нашем случае, при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и выборке объема  $M=100$  с вероятностью 0,95 эмпирическая вероятность правильного обнаружения отличается от истинной не более чем на  $\Delta = 0,061$ , соответственно ширина доверительный интервала будет равна  $2\Delta = 0,122$ .

На рис. 2 приведены в качестве примера реализации аддитивной смеси  $\xi(t_i) = f(t_i) + n(t_i)$  (кривая 1) при отношении сигнал/шум  $\delta = 0,7$  и хаотического процесса  $f(t_i)$  (кривая 2), сформированного динамической системой Маккея-Гласса.

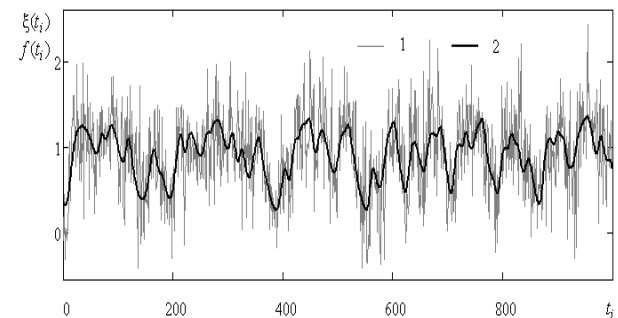


Рис. 2. Реализации наблюдения  $\xi(t_i) = f(t_i) + n(t_i)$  и хаотического процесса  $f(t_i)$

Нижче по контексту приводяться на рис. 3 характеристики вероятности обнаружения  $p_B(\delta, \varepsilon)$  хаотической последовательности, сформированной логистическим отображением  $f_{i+1} = \lambda \cdot f_i \cdot (1 - f_i)$  ( $i = 0, \dots, N = 1000$ ) с параметром  $\lambda = 3,999$  и начальным значением  $f_0 = 0,06$  [4], а на рис. 4 приведены реализации аддитивной смеси  $\xi_i = f_i + n_i$  (кривая 1) при отношении сигнал/шум  $\delta = 1,3$  и хаотической последовательности  $f_i$  (кривая 2), сформированной логистическим отображением.

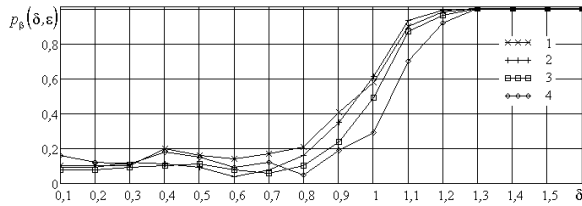


Рис. 3. Характеристики обнаружения хаотической последовательности сформированной логистическим отображением

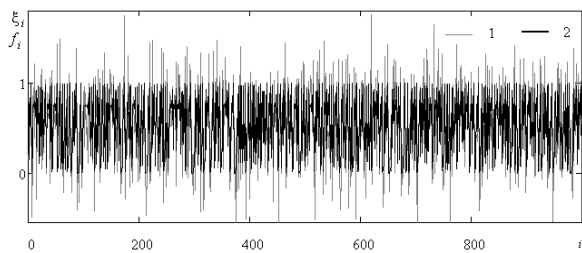


Рис. 4. Реализации наблюдения  $\xi_i = f_i + n_i$  и хаотической последовательности  $f_i$

Из рис. 3 (кривые 1 – 4) видно, что с вероятностью  $p_B \approx 0,95$  отвергается гипотеза  $H_0$  при большем значении отношения сигнал/шум равному  $\delta \approx 1,3$ , чем представленному на рис. 1. Это обусловлено свойством логистического отображения, у которого текущее значение зависит от одного предыдущего значения и корреляционная функция близка в дельтаобразной форме. Вместе с этим следует подчеркнуть, что кривые отстоящие друг от друга не выходят за ширину доверительного интервала.

#### ВИКОРИСТАННЯ Dt-СТАТИСТИКИ В ЗАДАЧАХ ВИЯВЛЕННЯ ХАОТИЧНОГО СИГНАЛУ, СПОТВОРЕНОГО ШУМОМ

О.М. Барсуков, В.Ж. Ященко, В.В. Парфіло

У статті пропонується непараметричний алгоритм виявлення хаотичних процесів, сформованих нелінійною динамічною системою Маккея-Гласса та логістичним відображенням, з використанням Dt-статистик.

**Ключові слова:** хаотичний процес, фазовий простір, Dt-статистика, кореляційний інтеграл.

#### DETECTION OF THE CHAOTIC PROCESS DISTORTED BY THE WHITE NOISE USING Dt-STATISTIC

A.N. Barsukov, V.Zh. Yachenok, V.V. Parfilo

*Abstract.* The article deals with the nonparametric detection algorithm of the chaotic signal generated logistic map and a dynamical system Mackay-Glass with detection using Dt-statistic.

**Keyword:** chaotic process, phase space, Dt-statistic, correlation integral.

#### Выводы

Таким образом, применение алгоритма непараметрического обнаружения хаотического процесса искаженного гауссовым шумом с использованием Dt-статистик позволяет без знания априорной плотности распределения выявить наличие сигнала неприродного происхождения. Кроме этого, алгоритм обнаружения хаотического процесса, сформированного потоковой и каскадных систем, не нуждается в выборе значения интервала  $\varepsilon$  и пространства вложения  $m$ , обусловленного использованием двойного интервала при вычислении «корреляционного интеграла».

#### Список литературы

- 1 Костенко П.Ю. Обнаружение хаотического процесса искаженного белым шумом с использованием BDS-статистик / П.Ю. Костенко, А.Р. Барсуков, К.С. Васюта, С.Н. Симоненко // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2009. – Т. 52, № 11. – С. 41-50.
- 2 Костенко П.Ю. Непараметрический BDS-обнаружитель хаотических сигналов на фоне белого шума / К.С. Васюта, С.Н. Симоненко, А.Н. Барсуков // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 23-31.
- 3 Фалькович С.Е. Основы статистической теории радиотехнических систем. Учеб. пособие / С.Е. Фалькович, П.Ю. Костенко. – Х.: Нац. аэрокосмический ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2005. – 390 с.
- 4 Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров / Ф. Мун; пер. с англ. Ю.А. Данилова, А.М. Шукурова. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
- 5 Dechert W.D. An application of chaos theory to stochastic and deterministic observations // Working paper, University of Houston. – 1995. – P. 1-24.
- 6 Hsieh D. Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets / D. Hsieh // Journal of Finance. – 1991. – V. 46, No 5. – P. 1839-1877.
- 7 Мхитарян В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Мхитарян Л.И. Трошин Е.В. Адамова, К.К. Шевченко, Н.Я. Бамбаева. – М.: Московский международ. институт эконометрики, информатики, финансов и права, 2003. – 130 с.

Поступила в редколлегию 17.07.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук проф. С.А. Калкманов, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.