

УДК 530.1.537.86

Р.Е. Пашенко, В.І. Новіков, О.В. Карпенко, О.В. Шаповалов

Харківський університет Повітряних Сил імені І. Кожедуба

ШВИДКОДІЮЧИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ АЕРОКОСМІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Розглянуто метод визначення фрактальної розмірності аерокосмічного зображення по меншій кількості точок, що дозволяє зменшити число операцій складання і множення, а, отже, часу побудови поля фрактальних розмірностей. Проведена оцінка виграшу у швидкості побудови поля фрактальних розмірностей під час обробки типових зображень.

фрактальна розмірність, поле фрактальних розмірностей, аерокосмічне зображення

Вступ

Постановка проблеми та аналіз літератури. Однією з найбільш складних і актуальних проблем комп'ютерної обробки аерокосмічних зображень є рішення задачі виділення і розпізнавання природних і антропогенних об'єктів. Часто, навіть для об'єктів, що порівняно легко дешифруються при візуальному аналізі, буває важко побудувати формалізований алгоритм комп'ютерної сегментації зображення.

Останні дослідження показали можливість застосування теорії фракталів для обробки аерокосмічних зображень [1 – 5]. Одним з основних понять теорії фракталів є поняття розмірності – числа ви-

мірювань, за допомогою яких можна задати положення точки на геометричному об'єкті. Причому, первинне визначення фракталу через розмірність Хаусдорфа-Безіковича [1]: фрактал – множина, розмірність Хаусдорфа-Безіковича D , якої строго більше за її топологічну розмірність, зіграло свою конструктивну роль. Фрактальна розмірність є дробовою величиною і показує як форма або часовий ряд заповнює простір. Існує багато методів розрахунку розмірності, але всі вони включають підрахунок об'єму або площі фрактальної форми і того, як вона змінюється в масштабах у тому випадку, якщо цей об'єм або форма збільшуються.

Залежно від цього існують різні типи фрактальної розмірності. Найбільш поширеною фрактальною розмірністю є розмірність Хаусдорфа-Безіковича [6, 7]. До альтернативних фрактальних розмірностей можна віднести: інформаційну розмірність [6, 7], кореляційну розмірність [8, 9] і поточкову розмірність [6, 7]. Перераховані типи фрактальної розмірності входять в сімейство розмірностей Реньї [10]. Для підрахунку розмірності необхідно точно задати деякий набір операцій (метод або спосіб) вимірювання та інтерпретації розмірності.

При реалізації методів розрахунку фрактальних розмірностей важливим є оцінка їх складності, тому що це безпосередньо пов'язано із швидкістю роботи алгоритмів та їх реалізацією в реальному масштабі часу.

Мета статті: розглянути удосконалений метод визначення фрактальної розмірності аерокосмічного зображення по меншій кількості точок, що дозволяє зменшити число операцій складання і множення, і за рахунок цього підвищити швидкість побудови поля фрактальних розмірностей.

Розрахунок фрактальної розмірності зображення методом покриття

Для визначення розмірності методом покриття [2, 7] діють таким чином. Вибирають деякий куб із стороною ε і покривають їм тривимірне представлення зображення (множина I). Нехай $N(\varepsilon)$ мінімальна кількість кубів із стороною ε необхідних для покриття множини I . Тоді міра $\mu_D(I)$ приблизно рівна

$$\mu_D(I) \approx N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^D. \quad (1)$$

Вважаючи, що міра $\mu_D(I) > 0$, для деякої константи $C > 0$ перетворюємо (1) до вигляду

$$N(\varepsilon) \approx \frac{C}{\varepsilon^D}. \quad (2)$$

Логарифмуючи праву і ліву частину (2), одержимо

$$\lg N(\varepsilon) = \lg C - D \cdot \lg \varepsilon, \quad (3)$$

тобто
$$D = -\frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg \varepsilon} + \frac{\lg C}{\lg \varepsilon}.$$

Оскільки $\lg \varepsilon \rightarrow -\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, то вираз для визначення розмірності D з формули (3) має вигляд

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)}. \quad (4)$$

Для розрахунку фрактальної розмірності методом покриття на комп'ютерах використовують вираз (4). Як видно з цього виразу, графік залежності $\lg N(\varepsilon)$ від $\lg(1/\varepsilon)$ представляє пряму лінію з кутовим коефіцієнтом D (рис. 1).

Для визначення невідомих параметрів C і D необхідно оцінити $N(\varepsilon)$ для декількох значень ε . Якщо

використовуються куби тільки двох розмірів (ε_1 і ε_2) то невідомі C і D визначаються з системи рівнянь

$$\lg N(\varepsilon_1) = \lg C - D \cdot \lg \varepsilon_1;$$

$$\lg N(\varepsilon_2) = \lg C - D \cdot \lg \varepsilon_2.$$

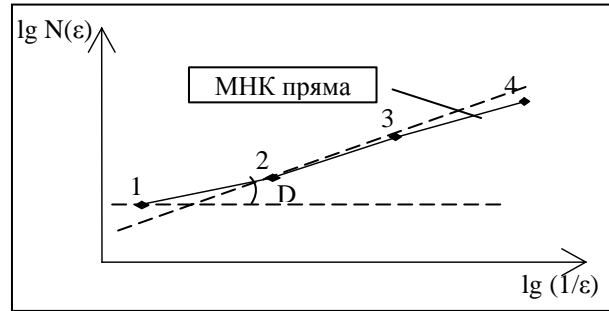


Рис. 1. Графік залежності $\lg N(\varepsilon)$ від $\lg(1/\varepsilon)$ з кутовим коефіцієнтом D

На практиці для пошуку значень $\lg C$ і D використовують метод найменших квадратів (МНК). Якщо розглядають пряму, що проходить через початок координат, то величину $\lg C$ не використовують.

Нехай в результаті обробки отримані значення $x_1 = N(\varepsilon_1)$, $x_2 = N(\varepsilon_2)$, ..., $x_n = N(\varepsilon_n)$ і $y_1 = \varepsilon_1$, $y_2 = \varepsilon_2$, ..., $y_n = \varepsilon_n$. По цих точках можна побудувати графік залежності $y = f(x)$. Одержана крива дає можливість судити про вид функції $f(x)$. Але постійні коефіцієнти, які входять в цю функцію, залишаються невідомими.

Одержані точки, як правило, не лягають точно на криву. Метод найменших квадратів вимагає, щоб сума квадратів відхилень одержаних точок від кривої, тобто $[y_i - f(x_i)]^2$ була найменшою.

Потрібно знайти рівняння прямої $y = \lg C + D \cdot x$, яка найкращим чином узгоджується з одержаними точками, тобто щоб по наявному набору значень x_i і y_i знайти найкращі значення $\lg C$ і D . Складемо квадратичну формулу ϕ , рівну сумі квадратів відхилень точок x_i і y_i від прямої

$$\phi = \sum_{i=1}^n (y_i - \lg C - D \cdot x_i)^2.$$

Величина ϕ завжди позитивна і виявляється тим менше, чим ближче до рівняння прямої лежать одержані точки. Іншими словами, знаходяться такі значення $\lg C$ і D , при яких функція ϕ досягає мінімуму. Значення цих параметрів знаходяться з рішення системи рівнянь

$$\frac{\partial \phi}{\partial (\lg C)} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \lg C - D \cdot x_i) = 0;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial D} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \lg C - D \cdot x_i) = 0.$$

Сумісне рішення цих рівнянь дає

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) \cdot y_i]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \lg C = \bar{y} - D \cdot \bar{x}, \quad (5)$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ – середні значення.

Таким чином, підрахунок кількості кубів різних розмірів, необхідних для покриття тривимірного представлення зображення, і використання виразів (3) і (5) дозволяє розрахувати фрактальну розмірність методом покриття.

Аналіз арифметичної складності методу розрахунку фрактальної розмірності

Звичайно арифметичну складність прийнято вимірювати кількістю арифметичних операцій (складань, віднімань, множень і ділень із залишком) [11]. У розглянутому вище методі арифметична складність, в основному, визначається складністю обчислення кута нахилу прямої МНК і складається з двох складових: арифметичної складності отримання значення точки на прямій МНК і самої арифметичної складності МНК.

Проведемо оцінку арифметичної складності знаходження кута нахилу прямої МНК, що розраховується по формулі (5) при визначенні фрактальної розмірності. З виразу (5) видно, що при розрахунках виконуються наступні арифметичні операції: складання, множення і ділення. Їх кількість залежить від кількості точок прямої МНК, яку позначатимемо n . Оцінимо арифметичну складність для різної кількості точок на графіку.

Пряма МНК може бути проведена мінімум через дві точки. Кількість точок прямої залежить від розмірів “вікна”, в якому визначається фрактальна розмірність. Для побудови прямої (отримання двох точок) мінімальний розмір “вікна” при розрахунку методом покриття повинен бути рівний 2×2 пікселя. Залежність кількості точок МНК прямої від розміру “вікна”, в якому визначається фрактальна розмірність методом покриття наведена у табл. 1.

Таблиця 1
Залежність числа точок прямої МНК від розміру “вікна”

Розмір „вікна”	2×2	4×4	8×8	16×16
Кількість точок	2	3	4	5

Розглянемо який вигляд матиме вираз (5) при проведенні розрахунків для певної кількості точок прямої МНК, наприклад $n = 2, 3$.

При $n = 2$ вираз (5) має наступний вигляд

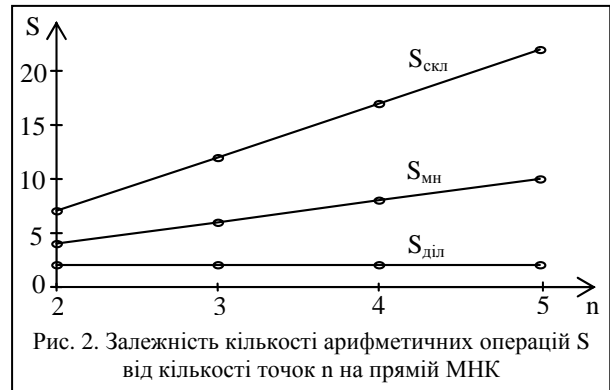
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; D = \frac{(x_1 - \bar{x}) \cdot y_1 + (x_2 - \bar{x}) \cdot y_2}{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2}, \quad (6)$$

при $n = 3$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};$$

$$D = \frac{(x_1 - \bar{x}) \cdot y_1 + (x_2 - \bar{x}) \cdot y_2 + (x_3 - \bar{x}) \cdot y_3}{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2}. \quad (7)$$

Аналогічно можуть бути отримані вирази для $n = 4, 5$. Результати розрахунку арифметичної складності визначення кутового коефіцієнта (D) (підрахунок кількості операцій складання, множення і ділення для $n = 2, 3, 4, 5$ представлені на рис. 2 у вигляді графічної залежності кількості арифметичних операцій (S) від кількості точок на прямій МНК (n).



На рис. 2 введені наступні позначення: $S_{скл}$ – кількість операцій складання; $S_{мн}$ – кількість операцій множення; $S_{діл}$ – кількість операцій ділення.

Аналіз ходу кривих на рис. 2 показує, що, як і очікувалося, із зростанням кількості точок прямої МНК спостерігається збільшення арифметичної складності алгоритму розрахунку кутового коефіцієнта D. При цьому найбільший внесок в арифметичну складність вносять операції складання ($S_{скл}$) і множення ($S_{мн}$). Відзначимо, що кількість операцій ділення із збільшенням числа точок залишається незмінною ($S_{діл}(n) = const$) і складає дві операції. З кожним наступним збільшенням кількості точок на одиницю, число операцій складання збільшується на п'ять, множення – на дві операції, а загальна кількість – на сім операцій ($S(n) = S(n - 1) + 7$).

Збільшення арифметичної складності розрахунку D приводить до збільшення часу розрахунку фрактальної розмірності зображення, що аналізується. У табл. 2 приведені чисельні значення часу розрахунку одного значення фрактальної розмірності при використанні “вікон” різних розмірів, тобто при побудові прямої МНК по $n = 2, 3, 4, 5$ точкам.

Таблиця 2
Залежність швидкості розрахунку D від числа точок прямої МНК

Кількість точок, n	Час розрахунку нахилу, t, мс
2	0,000641
3	0,001421
4	0,001994
5	0,002360

Чисельне значення часу розрахунку D отримане в результаті проведення комп'ютерного експерименту. При цьому використовувався комп'ютер наступної конфігурації: процесор Intel® Celeron®, 3,0 ГГц; ОЗУ 2x256, двоканальний режим; чипсет i865PE. Як видно з табл. 2, при збільшенні кількості точок прямої МНК у два рази (з 2 до 4 точок) час визначення кутового коефіцієнта збільшується у три рази.

Таким чином, арифметична складність алгоритму і час визначення фрактальної розмірності залежить від кількості використовуваних точок при побудові прямої МНК.

Швидкодійчий метод визначення фрактальної розмірності

Для зменшення числа операцій і, отже, для збільшення швидкості розрахунку пропонується удосконалити метод визначення фрактальної розмірності за рахунок використання меншої кількості точок. Розглянемо можливі варіанти зменшення кількості точок і одержувану при цьому помилку визначення фрактальної розмірності.

Удосконалений метод розрахунку передбачає побудову прямої МНК по двом точкам, тобто час розрахунку буде мінімальним, і не залежить від величини використовуваного "вікна". Але логічно припустити, що за наявності більшої кількості точок точність побудови прямої МНК буде вища, тобто використання тільки двох точок приводитиме до помилок визначення фрактальних розмірностей.

Оцінимо помилки визначення фрактальної розмірності на прикладі використання "вікна" розміром 8×8 пікселів. При отриманні чотирьох точок для побудови прямої МНК може бути одинадцять варіантів проведення лінії: 1-2-3-4 точки (по 4 точкам), 1-2-3 точки, 1-2-4 точки, 1-3-4 точки, 2-3-4 точки (по 3 точкам), 1-2 точки, 1-3 точки, 1-4 точки, 2-3 точки, 2-4 точки, 3-4 точки (по 2 точкам).

Аналіз точності проводився таким чином. На початку генерувалося зображення розміром 8×8 пікселів, що має рівномірний розподіл яскравості. Потім визначалася фрактальна розмірність одержаного зображення, при цьому для різних наборів точок будувалися прямі і знаходилися за допомогою МНК їх кутові коефіцієнти D . За дійсне значення брався кутовий коефіцієнт D прямої, побудованої по максимальній кількості точок (по чотирьох точках).

У табл. 3 представлені усереднені значення величини фрактальної розмірності при різній кількості точок прямої МНК. Усереднювання проводилося по 1000 зображенням розміром 8×8 пікселів.

Аналіз даних представлених у табл. 3 показує, що із зменшенням кількості точок прямої МНК точність визначення фрактальної розмірності в основному погіршується. Але, побудова прямої тільки по двом крайнім точкам дозволяє оцінити фрактальну

розмірність з погрешністю меншої, ніж при побудові прямої по трьом точкам (1-2-3 і 2-3-4).

Таблиця 3

Залежність відносної помилки визначення фрактальної розмірності від кількості точок прямої МНК

Набір точок	Точки	Фрактальна розмірність	Відносна помилка визначення фрактальної розмірності, %
1	1-2-3-4	2,5118	0
2	1-2-3	2,5139	8,3610
3	1-2-4	2,5111	2,7868
4	1-3-4	2,5112	2,3887
5	2-3-4	2,5131	5,1760
6	1-2	2,5061	22,6929
7	1-3	2,5139	8,3610
8	1-4	2,5108	3,9812
9	2-3	2,5216	39,0160
10	2-4	2,5131	5,1760
11	3-4	2,5045	29,0628

Таким чином, запропонований метод розрахунку фрактальної розмірності по двом крайнім точкам (1,4) прямої МНК дозволяє зменшити арифметичну складність алгоритму у 2,08 рази (див. табл. 2) в порівнянні з розрахунком по чотирьом точкам. Виграш у часі розрахунку в цьому випадку складає 3,11 рази. При цьому відносна помилка визначення фрактальної розмірності збільшуватиметься не більше ніж на 4 %.

На рис. 3 показана залежність абсолютної помилки визначення фрактальної розмірності (ΔD) (розрахунок проводиться по двом крайнім точкам для зображень розмірами: 8×8 , 16×16 і 32×32 пікселя, усереднювання проводилося по 1000 зображенням для кожного розміру) від діапазону розподілу яскравості зображення, що генерувалося (ΔI).



Рис. 3. Залежність абсолютної помилки визначення фрактальної розмірності по двом крайнім точкам від діапазону градацій яскравості

Як видно з рис. 3, при малих значеннях градацій яскравості зображення очікується максимальна помилка визначення фрактальної розмірності. При чому із збільшенням розміру зображення ця помилка зростає. Таким чином, при аналізі аерокосмічних зображень рекомендується використовувати "вікна" розміром не більше 16×16 пікселів.

Оцінка швидкості побудови поля фрактальних розмірностей типових зображень

При побудові поля фрактальних розмірностей (ПФР) фрактальні розмірності необхідно розраховувати велике число раз, тобто арифметична складність і швидкість побудови залежатиме від розміру зображення. Порядок побудови ПФР розглянутий у [3].

Відзначимо, що типовими розмірами аерокосмічних зображень є розміри 256×256 , 512×512 , 800×600 , 1024×768 пікселів. У табл. 4 представлені чисельні значення часу побудови ПФР у мілісекундах при використанні методу покриття для різних розмірів зображення і “ковзаючого вікна”. Величина фрактальної розмірності у “вікні” розраховувалася по максимальній кількості точок прямої МНК. Чисельні значення часу побудови ПФР отримані у результаті проведення комп'ютерного експерименту, параметри використовуваного при цьому комп'ютера наведені вище.

Таблиця 4

Час побудови ПФР при використанні методу покриття для різних розмірів зображення і “ковзаючого вікна”, мс

Розмір зображення	Розмір “ковзаючого вікна”			
	2x2	4x4	8x8	16x16
256x256	41	90	123	136
512x512	167	367	507	581
800x600	306	674	935	1081
1024x768	502	1107	1540	1789

З даних табл. 4 видно, що при збільшенні розмірів зображення і величини “ковзаючого вікна” спостерігається значне збільшення часу, необхідного для побудови ПФР.

Оцінимо виграш у часі побудови ПФР при використанні методу розрахунку фрактальної розмірності по двом крайнім точкам прямої МНК. Результати розрахунку виграшу у разях приведені в табл. 5.

Таблиця 5

Виграш у часі побудови ПФР при використанні методу розрахунку фрактальної розмірності по двом крайнім точкам прямої МНК, рази

Розмір зображення	Розмір “ковзаючого вікна”			
	2x2	4x4	8x8	16x16
256x256	1,0	2,18	2,97	3,29
512x512	1,0	2,20	3,04	3,48
800x600	1,0	2,21	3,06	3,53
1024x768	1,0	2,21	3,07	3,57

Аналіз даних табл. 5 показує, що із збільшенням розміру “ковзаючого вікна” виграш у часі побудови ПФР збільшується. При розмірі “вікна” 2×2 пікселя виграшу немає, тому що при такому розмірі “вікна” пряма МНК і так будується по двом точкам. Виграш у швидкості побудови ПФР практично не залежить від розміру зображення при невеликих розмірах “вікна”, але при збільшенні розміру “вікна” збільшення виграшу стає значнішим.

Висновки

1. При аналізі аерокосмічного зображення його розглядають у вигляді тривимірного розподілу градацій сірого. Фрактальна розмірність є дробовою величиною і характеризує ступінь заповнення простору, в якому існує система.

2. Удосконалений метод розрахунку фрактальної розмірності по двом крайнім точкам прямої МНК дозволяє зменшити у два рази арифметичну складність алгоритму і збільшити у три рази швидкість визначення фрактальної розмірності у порівнянні з використанням чотирьох точок прямої МНК. При цьому відносна помилка визначення фрактальної розмірності збільшуватиметься не більше ніж на 4 %.

3. Основою аналізу аерокосмічних зображень з використанням фрактальної розмірності є побудова ПФР. При використанні методу розрахунку фрактальної розмірності по двом крайнім точкам прямої МНК виграш у часі побудови ПФР складає від двох до трьох з половиною разів для різних значень розміру зображення і “ковзаючого вікна”.

4. Доцільно провести аналіз виграшу у часі побудови ПФР при застосуванні запропонованого методу і „стрибаючого вікна” замість „ковзаючого”.

Список літератури

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: ИКИ, 2002. – 656 с.
2. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
3. Фрактальный анализ процессов, структур и сигналов. Коллективная монография / Под ред. Р.Э. Пащенко. – Х.: ХООО „НЭО „ЕкоПерспектива”, 2006. – 348 с.
4. Пащенко Р.Э., Шаповалов А.В. Сегментация изображений методом ранжирования поля фрактальных размерностей // Системы обработки информации. – Х.: ХВУ, 2004. – Вып. 8 (36). – С. 103-107.
5. Грушенко М.В., Пащенко Р.Э., Шаповалов А.В. Мониторинг морской поверхности с использованием метода “к-дерева” поля фрактальных размерностей // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2006. – № 1/2 (19). – С. 100-104.
6. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности: Пер. с франц. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
7. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
8. Williams G.P. Chaos Theory Tamed. – Washington D.C.: Joseph Henry Press, 1997. – 407 p.
9. Grassberger P. Generalized Dimension of Strange Attractors. // Phys. Lett. – 1983. – V.97A. – № 6. – P. 227-231.
10. Renyi A. Probability Theory. – Amsterdam: North-Holland, 1970. – 238 p.
11. Гашков С.Б., Чубариков В.Н. Арифметика, алгоритмы, сложность вычислений. – М.: Высшая школа, 2000. – 231 с.

Надійшла до редколегії 14.03.2007

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співр. В.К. Иванов, Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усікова НАН України, Харків.