УДК 519:681

О.В. Серая, Амер Шади

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

АДАПТИВНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ БЕЗОТКАЗНОСТИ ОБЪЕКТОВ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Рассмотрена задача оценки качества обработки реальных данных об отказах объектов эксплуатации. Показано, что искомую плотность распределения интервала между отказами целесообразно выбирать из универсального трехпараметрического семейства распределений.

объект эксплуатации, прогнозирование безотказности, универсальное семейство распределений, плотность распределения

Введение

Постановка проблемы. Анализ литературы. Как известно, оценка и прогнозирование безотказности объектов эксплуатации (ОЭ) сводится к отысканию закона изменения интенсивности отказов [1 – 3]. Пусть этот закон аппроксимируется соотношением

$$\lambda(t)=\sum_{i=0}^{d} a_i t^i . \qquad (1)$$

Тогда вероятность безотказной работы ОЭ на интервале $[0,T]$ вычисляется по формуле

$$P(T)=\exp\left\{-\int_0^T \lambda(t)dt\right\}. \qquad (2)$$

Для оценивания параметров $\{a_i\}$, $i=0,...,d$, полинома (1) используется статистический материал об отказах ОЭ, получаемый в результате контроля их работоспособности. При этом вводят [4]: $A^T=(a_0,a_1,...,a_d)$ – вектор оцениваемых параметров, $H=(h_1,h_2,...,h_m)$ – набор случайных величин, отображающих случайные результаты соответствующих контролей работоспособности, причем

$$h_k=\begin{cases}1 & \text{- если в результате проведения} \\ & \text{k-го контроля выявлен отказ;}\\ 0 & \text{- в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть, кроме того, $T=(t_1,t_2,...,t_m)$ – набор значений наработок ОЭ между контролями.

Для получения оценок вектора A применяется метод максимума правдоподобия. Функция правдоподобия имеет вид

$$P(A)=\prod_{k=1}^{m}\left(\exp\left\{-\int_0^{t_k}\lambda(t)dt\right\}\right)^{1-h_k}\times$$
$$\times\left(1-\exp\left\{-\int_0^{t_k}\lambda(t)dt\right\}\right)^{h_k}.$$

Отсюда

$$L=\ln P(A)=$$
$$=\sum_{k=1}^{m} h_k \ln\left(1-\exp\left\{-\sum_{i=0}^{d}\frac{a_i}{i+1}t_k^{i+1}\right\}\right)- \qquad (3)$$
$$-\sum_{k=1}^{m}(1-h_k)\sum_{i=0}^{d}\frac{a_i}{i+1}t_k^{i+1}.$$

Далее, дифференцируя (3) по компонентам вектора A и приравнивая результаты к нулю, получаем систему уравнений

$$\sum_{k\in E_1}\frac{t_k^{l+1}\exp\left\{-\sum_{i=0}^{d}\frac{a_i}{i+1}t_k^{i+1}\right\}}{1-\exp\left\{-\sum_{i=0}^{d}\frac{a_i}{i+1}t_k^{i+1}\right\}}=\sum_{k\in E_0}t_k^{l+1}, \qquad (4)$$

$l=0,1,...,d$; $E_0=\{k: h_k=0\}$; $E_1=\{k: h_k=1\}$.

Для решения полученной системы нелинейных уравнений может быть использован любой численный метод [5].

Точность оценок параметров уравнения регрессии (1), получаемых при использовании описанного похода, не является высокой, поскольку здесь не используется важная информация о законе распределения случайной продолжительности интервала между отказами.

Введем:

$f(\theta,t)$ – плотность распределения интервала между отказами;

θ – набор параметров, определяющих эту плотность;

$T=(t_1,t_2,...,t_n)$ – набор случайных интервалов между отказами.

Теперь формируется функция правдоподобия [2]

$$\Phi(\theta)=\prod_{j=1}^{n} f(\theta,t_j), \qquad (5)$$

максимизация которой по θ определяет искомую плотность. Далее полученная плотность распределения используется для расчета закона изменения интенсивности отказов по формуле

$$\lambda(\theta,t)=\frac{f(\theta,t)}{1-F(\theta,t)};$$
$$F(\theta,t)=\int_0^t f(\theta,\tau)d\tau. \qquad (6)$$

Принципиальный недостаток приведенной традиционной методики расчета закона изменения интенсивности $\lambda(\theta,t)$ состоит в том, что хорошие по качеству оценки параметров плотности $f(\theta,t)$ могут быть получены, если будет точно «угадан» характер соответствующего закона распределения случайных величин. Неверный выбор характера плотности $f(\theta,t)$ приводит к непрогнозируемым ошибкам.

Цель статьи. Во-первых, исследовать влияние неправильного выбора характера плотности распределения $f(\theta,t)$ интервала между отказами на уровень ошибок в оценивании параметров этой плотности; во-вторых, разработать методику элиминации последствий неправильного выбора характера плотности распределения.

Основные результаты

Зададим типичный набор плотностей распределения случайных величин, традиционно используемых для описания интервалов между отказами:

– экспоненциальная

$$f_1(\lambda,t)=\lambda e^{-\lambda t},\ t\ge 0; \qquad (7)$$

– релеевская

$$f_2(\sigma,t)=\frac{t}{\sigma^2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},\ t\ge 0; \qquad (8)$$

– Вейбулла – Гнеденко

$$f_3(\lambda,h,t)=\lambda h t^{h-1}e^{-\lambda t^h},\ t\ge 0; \qquad (9)$$

(при $h=1$ $f_3(\lambda,h,t)$ вырождается к $f_1(\lambda,t)$);

– нормальная

$$f_4(m,\sigma,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (10)$$

Теперь построим имитационную модель формирования последовательностей случайных величин, распределенных в соответствии с (7) – (10). Обозначим соответствующие последовательности следующим образом:

$$T_1^{(Э)}=\left\{T_1^{(Э)},T_2^{(Э)},...,T_n^{(Э)}\right\}; \qquad (11)$$

$$T_2^{(P)}=\left\{T_1^{(P)},T_2^{(P)},...,T_n^{(P)}\right\}; \qquad (12)$$

$$T_1^{(B)}=\left\{T_1^{(B)},T_2^{(B)},...,T_n^{(B)}\right\}; \qquad (13)$$

$$T_1^{(H)}=\left\{T_1^{(H)},T_2^{(H)},...,T_n^{(H)}\right\}. \qquad (14)$$

При этом параметры плотностей распределения зададим таким образом, чтобы математическое ожидание продолжительности случайного интервала между отказами во всех случаях было одинаково и равно m.

Проведем оценивание параметров каждой из плотностей (7) – (10) при независимой обработке последовательностей (11) – (14), и проанализируем результаты.

Для каждой пары (плотность распределения – последовательность интервалов), используя функцию правдоподобия (5), осуществим оценивание параметров соответствующей плотности.

Теперь, с целью объективного сравнения качества этих оценок, для каждой из полученных плотностей рассчитаем вероятность безотказной работы на интервале $[0,T_0]$ и сопоставим с эталонной вероятностью, вычисляемой с использованием истинных значений параметров. При этом введем:

$P_{qs}(T>T_0)$ – вероятность безотказной работы, вычисленная с использованием плотности $\hat{f}_q(\theta,t)$, рассчитанной по результатам обработки s-й последовательности интервалов между отказами;

$P_{q0}(T>T_0)$ – эталонная вероятность безотказной работы, вычисленная для эталонной плотности $f_q(\theta,t)$.

Тогда коэффициент

$$\eta_{qs}=\frac{\left|P_{qs}(T>T_0)-P_{q0}(T>T_0)\right|}{P_{q0}(T>T_0)}, \qquad (15)$$

$$q=1,2,3,4,\ s=1,2,3,4,$$

объективно отражает качество оценивания q-й плотности по данным s-й последовательности.

Результаты расчетов сведены в табл. 1.

Таблица 1

Оценка качества восстановления плотностей распределения по экспериментальным данным (матрица значений η_{qs})

Плотности распределения	Последовательности			
	1	2	3	4
$f_1(\lambda,t)=\lambda e^{-\lambda t}$	0,08	0,16	0,18	0,38
$f_2(\sigma,t)=\frac{t}{\sigma^2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	0,15	0,06	0,11	0,21

Продолжение табл. 1

Плотности распределения	Последовательности			
	1	2	3	4
$f_3(\lambda, h, t) = \lambda h t^{h-1} e^{-\lambda t^h}$	0,19	0,13	0,05	0,16
$f_4(m, \sigma, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	0,36	0,23	0,18	0,04

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. В тех случаях, когда экспериментальная плотность по характеру совпадает с эталонной, ошибка мала.

2. В остальных случаях уровень ошибки существенно зависит от степени подобия экспериментальной и эталонной плотностей. Так, например, для пары (релеевская – Вейбулла-Гнеденко) ошибка невелика. Напротив, для пары (экспоненциальная – нормальная) эта ошибка существенно выше.

Выявленная существенная зависимость ошибки оценивания параметров плотности распределения интервала между отказами и, следовательно, вероятности безотказной работы от правильности выбора плотности распределения инициирует поиск пути снижения этих ошибок. Одно из возможных направлений решения этой задачи состоит в следующем. Для описания плотности распределения продолжительности безотказной работы может быть использовано введенное в [6] универсальное трехпараметрическое семейство распределений

$$f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) = \left[\theta_2\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2(1+\theta_3)}} + \frac{1}{\sqrt{2(1-\theta_3)}}\right)\right]^{-1} \times \exp\left\{-\frac{(t-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\left(1+\text{sign}(t-\theta_1)\right)\right\}. \quad (16)$$

Принципиальное достоинство распределений (16) состоит в том, что вариацией значений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ можно существенно изменять математическое ожидание, дисперсию и асимметрию распределения, делая его, в случае необходимости, подобным каждой из плотностей (7) – (10). Таким образом, использование распределения (16), по существу, обеспечивает адаптацию плотности распределения к реальным статистическим данным. Для оценки эффективности использования этой плотности распределения было проведено оценивание параметров плотности (16) для каждой из последовательностей (11) – (14). Затем полученные плотности использовались для расчета вероятности безотказной работы на интервале $[0, T]$. Результаты сравнения расчетов с эталонными, полученными по формуле (16), приведены в табл. 2.

Таблица 2

Оценка качества универсального распределения

Плотность	Последовательности			
	1	2	3	4
$f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t)$	0,09	0,08	0,06	0,05

Из полученных результатов следует: если присутствует неопределенность относительно выбора описания плотности распределения интервала между отказами, то целесообразно использовать универсальное распределение (16).

Выводы

Таким образом, установлено, что качество оценивания параметров плотности распределения случайного интервала между отказами по экспериментальным данным существенно зависит от того, насколько правильно установлен вид плотности распределения.

Показано, что снижение ошибки может быть достигнуто при выборе искомой плотности из универсального трехпараметрического семейства распределений.

Список литературы

1. *Лавриненко В.Ю. Основы эксплуатации аппаратуры. – М.: Высшая школа, 1978. – 320с.*

2. *Вопросы математической теории надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Радио и связь, 1983. – 376 с.*

3. *Широков А.М. Надежность радиоэлектронных устройств. – М.: Высшая школа, 1972. – 272 с.*

4. *Костенко Ю.Т., Раскин Л.Г. Прогнозирование технического состояния систем управления. – Х.: Основа, 1996. – 303 с.*

5. *Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.*

6. *Серая О.В. Аппроксимация гистограмм трехпараметрическим распределением случайных величин // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – Х.: ІКСЗТ. – 2001. – № 3. – С. 81-83.*

Поступила в редколлегию 3.04.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков.