

УДК 006.91

И.П. Захаров, М.П. Сергиенко

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРОНИ

В работе метод Прони адаптирован для идентификации переходных характеристик средств измерительной техники, описываемых апериодическими звеньями любого порядка. С целью повышения точности к нему применен метод наименьших квадратов. Исследованы погрешности данного метода и рассмотрены возможности его применения.

средство измерительной техники, динамическая характеристика переходная характеристика, идентификация, метод Прони, метод наименьших квадратов, погрешность метода

Вступление

Постановка проблемы. Современное состояние метрологии, характеризующееся стремлением к одновременному повышению быстродействия и точности измерительной аппаратуры в условиях расширения областей применения точных измерений в динамических режимах изменения параметров физических объектов (в том числе и динамические измерения величин, считающихся постоянными) приводят к необходимости изучения динамических свойств средств измерительной техники (СИТ) [1]. Динамические свойства СИТ, проявляющиеся в том, что уровень переменного воздействия на СИТ в какой-либо момент времени обуславливает выходной сигнал СИТ в последующие моменты времени [2], описываются динамическими характеристиками, которые являются одними из числа нормируемых метрологических характеристик аналоговых СИТ [2 – 7]. В общем случае динамические свойства СИТ влияют на результат измерений характеристик динамических объектов, из чего следует необходимость их изучения. К полным ДХ, которые отражают динамические свойства линейных СИТ, относят дифференциальное уравнение, импульсную характеристику, переходную характеристику, передаточную функцию и совокупность амплитудно- и фазочастотной характеристик. Взаимосвязь между ДХ подробно анализируется в [7]. Основными этапами идентификации СИТ при исследовании ДХ являются [6]:

- 1) проведение измерительного эксперимента;
- 2) обработка результатов измерительного эксперимента и получение значений параметров ДХ;
- 3) оценивание погрешностей идентификации ДХ.

В ряде случаев для описания динамических свойств СИТ наиболее удобными являются переходная и импульсная характеристики. При этом лучше реализуемой является переходная характеристика (ПХ), то есть реакция СИТ на ступенчатое воздействие. Она легко воспроизводится для боль-

шинства электрических и неэлектрических величин.

Цель работы – разработка метода, позволяющего осуществлять идентификацию ПХ СИТ по результатам ее дискретного измерения с необходимой точностью.

Множество СИТ, моделируемых инерционными звеньями апериодического типа, с необходимой точностью могут быть описаны выражением

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1 - \sum_{m=1}^M A_m \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right), & t \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $h(t)$ – переходная характеристика СИТ;

A_m – постоянные коэффициенты;

τ_m – постоянные времена СИТ.

При дискретном измерении ПХ

$$h(j\Delta t) = 1 - \sum_{m=1}^m A_m \exp\left(-j \frac{\Delta t}{\tau_m}\right), \quad (2)$$

где $j=1, 2, \dots, k$ (k – количество дискретных отсчетов);

Δt – период дискретизации ПХ СИТ.

Метод Прони нашел широкое применение в теории и практике цифрового спектрального анализа сигналов [8]. В работе [9] было предложено применить используемый в нем математический аппарат для решения задачи идентификации ПХ.

Метод Прони

В рамках метода Прони [8, 10] после замен

$$1 - h\left(j \frac{T}{N}\right) = C_j, \quad (3)$$

$$\exp\left(-\frac{T}{N\tau_m}\right) = X_m, \quad (4)$$

система (2) преобразуется к виду

$$C_j = \sum_{m=1}^M A_m X_m^j. \quad (5)$$

Для определения параметров A_m и X_m методом Прони необходимо:

1) измерить ПХ в $k = 2M$ точках через интервал дискретизации Δt и рассчитать параметры C_j согласно выражению (3);

2) записать $M \times M$ матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} C_M & C_{M-1} & \dots & C_1 \\ C_{M+1} & C_M & \dots & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2M-1} & C_{2M-2} & \dots & C_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_{M+1} \\ C_{M+2} \\ \vdots \\ C_{2M} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

из которого вычислить вспомогательные параметры a_i ($i = 1, 2, \dots, M$) по формуле

$$a_i = \frac{D_i}{D}, \quad (7)$$

где $D = \begin{vmatrix} C_M & C_{M-1} & \dots & C_1 \\ C_{M-1} & C_M & \dots & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2M-1} & C_{2M-2} & \dots & C_M \end{vmatrix}$ – главный определитель системы (6);

D_i – определитель, образующийся путем замены i -го столбца главного определителя столбцом свободных членов;

3) рассчитать X_m как корни характеристического уравнения

$$\Phi(X) = \sum_{i=0}^M a_i X^{M-i} = 0, \quad (8)$$

в котором $a_0 = 1$;

4) рассчитать по формуле (4) постоянные времени

$$\tau_m = \frac{\Delta t}{\ln X_m}; \quad (9)$$

5) определить коэффициенты A_m путем подстановки найденных значений X_m в первые M уравнений системы (6).

Исследования [8, 9] показали, что в таком виде метод Прони имеет очень низкую точность и помехозащищенность, поэтому к нему необходимо применить метод наименьших квадратов (МНК).

МНК Прони

В этом случае необходимо увеличить количество отсчетов ПХ так, чтобы $k = K \gg 2M$.

Тогда система (6) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} C_M & C_{M-1} & \dots & C_1 \\ C_{M+1} & C_M & \dots & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2M-1} & C_{2M-2} & \dots & C_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{K-1} & C_{K-2} & \dots & C_{K-M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_{M+1} \\ C_{M+2} \\ \vdots \\ C_{2M} \\ \vdots \\ C_K \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Система (10) является несовместной, однако к ней можно применить МНК.

С учетом невязок δ_k система (4.10) имеет вид

$$a_1 C_{M+k-1} + a_2 C_{M+k-2} + \dots + a_M C_k + C_{M+k} = \delta_k, \quad k = 1 \dots K - M$$

В соответствии с МНК для получения оптимальных значений коэффициентов a_i необходимо минимизировать сумму квадратов невязок.

Используя обозначения Гаусса

$$[C_{M+k}] = \sum_{k=1}^{K-M} C_{M+k}; \quad [C_{M+k-i}] = \sum_{k=1}^{K-M} C_{M+k-i},$$

система нормальных уравнений определится следующим образом

$$d \cdot a = y, \quad (11)$$

где

$$d = \begin{pmatrix} [C_{M+k-1}^2] & [C_{M+k-2}C_{M+k-1}] & \dots & [C_k C_{M+k-1}] \\ [C_{M+k-1}C_{M+k-2}] & [C_{M+k-2}^2] & \dots & [C_k C_{M+k-2}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [C_{M+k-1}C_k] & [C_{M+k-2}C_k] & \dots & [C_k^2] \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов нормальной системы уравнений;

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix}, \quad y = - \begin{pmatrix} [C_{M+k}C_{M+k-1}] \\ [C_{M+k}C_{M+k-2}] \\ \vdots \\ [C_{M+k}C_k] \end{pmatrix} \text{ – искомые коэф-}$$

фициенты и столбец свободных членов нормальной системы уравнений соответственно.

Дальнейшая обработка производится по алгоритму, приведенному выше.

Так, для СИТ с ПХ

$$h(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (12)$$

система (11) имеет вид

$$[C_{M+k-1}^2] a_1 = -[C_{M+k}C_{M+k-1}], \quad (13)$$

корень характеристического уравнения (8) равен

$$X_1 = -a_1, \quad (14)$$

постоянная времени рассчитывается по формуле (9).

Для СИТ с ПХ

$$h(t) = 1 - A_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - A_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \quad (15)$$

система (12)

$$\begin{pmatrix} [C_{M+k-1}^2] & [C_{M+k-2}C_{M+k-1}] \\ [C_{M+k-2}C_{M+k-1}] & [C_{M+k-2}^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [C_{M+k}C_{M+k-1}] \\ [C_{M+k}C_{M+k-2}] \end{pmatrix}, \quad (16)$$

корни характеристического уравнения (8) определяются как

$$X_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \quad (17)$$

постоянные времени τ_1 и τ_2 рассчитываются по формулам (9).

Для нахождения коэффициентов A_1 и A_2 используется система уравнений (5).

Таким образом, метод Прони с использованием МНК позволяет осуществлять идентификацию ПХ СИТ, моделируемых инерционными звеньями апериодического типа произвольного порядка, при условии постоянства коэффициентов A_m по измеренной экспериментально характеристике при использовании большого числа данных.

Недостатком метода Прони является невозможность применения для моделей измерительного канала с кратными корнями.

Исследование погрешностей МНК Прони

Рассмотрим систематическую и случайную составляющие погрешности идентификации ПХ СИТ, моделируемых инерционными звеньями апериодического типа, МНК Прони.

Поскольку значения ПХ при реализации метода Прони являются отдельными параметрами, ограничение времени измерения и дискретизация ПХ не влияют на результат идентификации, то есть систематическая погрешность при использовании метода Прони отсутствует. Это является значительным преимуществом данного метода по сравнению с другими методами идентификации ПХ СИТ.

Случайная составляющая погрешности идентификации ПХ вызвана наличием аддитивных шумов во входном и выходном сигналах СИТ.

Среднее квадратическое отклонение (СКО) постоянных времени определяются следующим образом

$$\sigma_{\tau_m} = \sqrt{\sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial \tau_m}{\partial X_m} \right)^2 \sigma_{X_m}^2}; \quad (18)$$

$$\sigma_{X_m} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial X_m}{\partial a_i} \right)^2 \sigma_{a_i}^2}; \quad (19)$$

$$\sigma_{a_i} = \sqrt{\sum_{j=1}^K (\partial a_i / \partial C(j\Delta t))^2 \sigma_C^2}, \quad (20)$$

где σ_C – СКО шума.

Рассмотрим случайную составляющую погрешности идентификации ПХ СИТ, моделируемых инерционными звеньями апериодического типа первого и второго порядков, методом Прони с использованием МНК.

Для СИТ с ПХ (12) выражения (18) – (20) с учетом выражений (9) и (13) примут вид

$$\sigma_{\tau_1} = \frac{\Delta t}{X_1 \ln^2(X_1)} \sigma_{X_1}; \quad (21)$$

$$\sigma_{X_1} = -\sigma_{a_1}; \quad (22)$$

$$\sigma_{a_1} = - \left[\frac{(C_{j-1} + C_{j+1}) [C_{M+k-1}^2]}{[C_{M+k-1}^2]^2} - \frac{2C_j [C_{M+k} C_{M+k-1}]}{[C_{M+k-1}^2]^2} \right] \sigma_C. \quad (23)$$

Исследования показали, что отношение приведенного СКО постоянной времени к СКО шума $\tilde{\sigma}_{\tau_1} / \sigma_C$ имеет минимумы при оптимальном выборе времени измерения T ПХ и количества отсчетов. Зависимость оптимальных соотношений T/τ_1 , при которых $\tilde{\sigma}_{\tau_1} / \sigma_C$ минимальны, для разного числа отсчетов k показана на рис. 1, а, зависимость минимумов $\tilde{\sigma}_{\tau_1} / \sigma_C$ от k – на рис. 1, б.

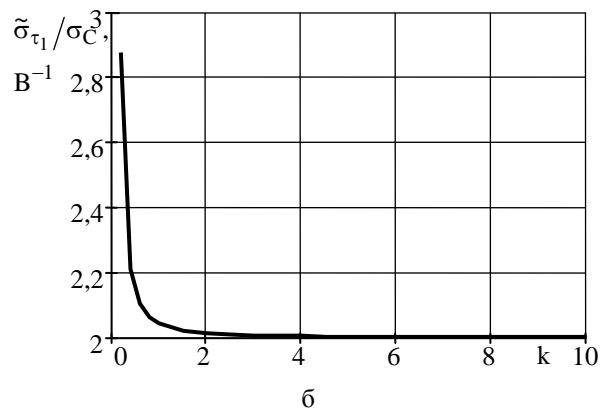
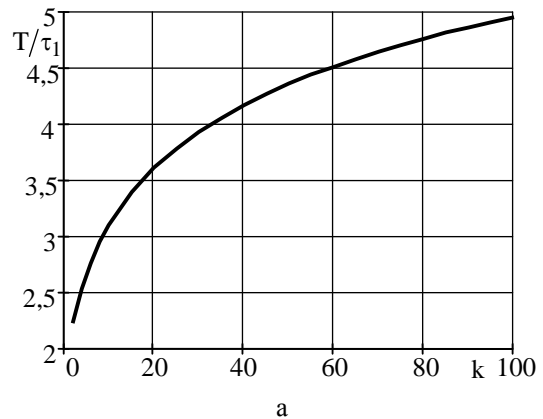


Рис. 1. Зависимости оптимальных соотношений T/τ_1 (а) и минимумов $\tilde{\sigma}_{\tau_1} / \sigma_C$ (б) от числа отсчетов k

Для СИТ с ПХ (15) выражение (18) примет вид (21), выражение (19) будет иметь вид

$$\sigma_{X_{1,2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial X_{1,2}}{\partial a_i} \right)^2 \sigma_{a_i}^2}, \quad (24)$$

где частные производные равны

$$\frac{\partial X_1}{\partial a_1} = -\frac{1}{2} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}; \quad \frac{\partial X_1}{\partial a_2} = -\frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}};$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial a_1} = -\frac{1}{2} - \frac{a_1}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}; \quad \frac{\partial X_2}{\partial a_2} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}.$$

Выражение (20) примет вид

$$\sigma_{a_{1,2}} = \sigma_C \sqrt{\sum_{j=1}^K (\partial a_{1,2} / \partial C(j\Delta t))^2}, \quad (25)$$

где частные производные рассчитываются аналогично выражению (23).

Зависимости оптимальных соотношений T/τ_1 , при которых $\tilde{\sigma}_{\tau_{1,2}}/\sigma_C$ минимальны, для разного числа отсчетов k показаны на рис. 2, а, минимумы $\tilde{\sigma}_{\tau_1}/\sigma_C$, $\tilde{\sigma}_{\tau_2}/\sigma_C$ показаны на рис. 2, б.

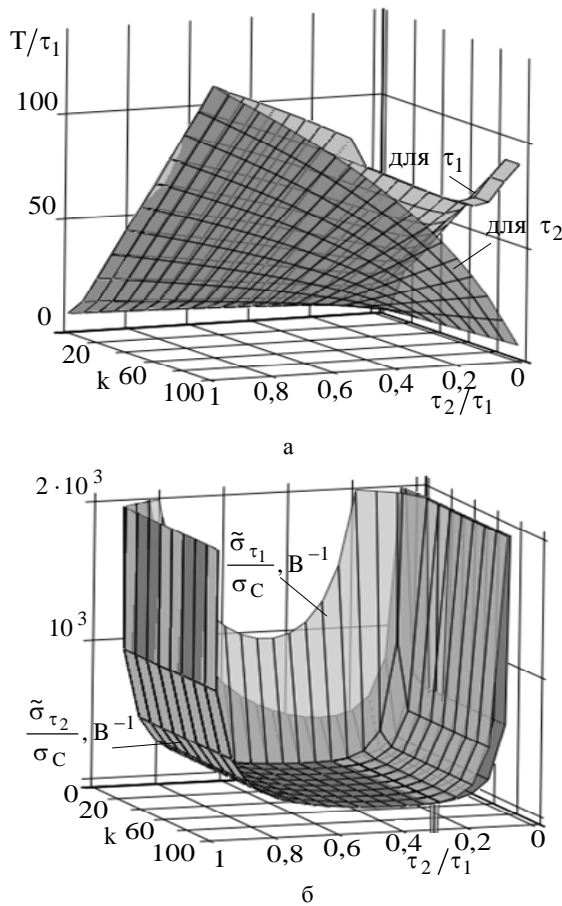


Рис. 2. Зависимости оптимальных соотношений T/τ_1 (а) и минимальных отношений $\tilde{\sigma}_{\tau_{1,2}}/\sigma_C$ (б) от соотношений τ_2/τ_1 и количества отсчетов k

Выводы

Таким образом, был разработан метод, основными достоинствами которого являются отсутствие

систематической составляющей погрешности идентификации ПХ и возможность идентификации ПХ без обязательного достижения установленного режима (при условии, что известен статический коэффициент преобразования СИТ). Основными недостатками МНК Прони является невозможность его применения для ПХ с передаточной функцией, имеющей кратные корни, а также низкая помехозащищенность при использовании его для идентификации ПХ СИТ с передаточной функцией выше первого порядка. Однако этот метод может найти применение при исследовании экспоненциальных зависимостей для решения многих экспериментальных и теоретических задач.

Список литературы

1. Бугаков И.А. Использование метода динамических измерений физических величин для построения быстродействующих средств измерений// Измерительная техника. – 2001. – № 10. – С. 6-9.
2. ГОСТ 8.009-84 ГСИ. Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1988. – 38 с.
3. ГОСТ 8.256-77 ГСИ. Нормирование и определение динамических характеристик аналоговых средств измерений. Основные положения. – М.: Изд-во стандартов, 1980. – 8 с.
4. МИ 02-001-96 ГСИ. Методика оценивания погрешностей измерения динамических характеристик линейных средств измерений. – Львов: ГНИИ «Система», 1996. – 77 с.
5. МИ 1951-88 ГСИ. Динамические измерения. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 17 с.
6. РТМ 25.191-75 Средства измерения и автоматизации ГСП. Определение динамических характеристик. – М.: Изд-во стандартов, 1977. – 44 с.
7. МИ 2090-90 Определение динамических характеристик линейных аналоговых средств измерений с сосредоточенными параметрами. Общие положения. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 64 с.
8. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
9. Захаров И.П., Сергиенко М.П. Исследование погрешностей идентификации переходных характеристик апериодических измерительных преобразователей методом Прони // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 1 (26). – С.44-47.
10. Илюхин А.Г., Коваленко В.П. Численные методы обработки информации при исследовании динамических систем. – К.: Наук. думка, 1971. – 175 с.

Поступила в редколлегию 28.03.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.