УДК 519.23

О.В. Серая[1], Е.А. Макогон[2]

[1]*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»*
[2]*Харьковский институт танковых войск НТУ «ХПИ»*

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИЦИРУЕМОГО МЕТОДА ПОПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Рассматривается методика использования результатов экспертного оценивания попарных сравнений значимости факторов для оценки эффективности системы. Для этого проводится модификация метода анализа иерархий. В результате получается согласованная матрица попарных сравнений для расчета коэффициентов уравнения регрессии, описывающего эффективность системы в зависимости от значений его характеристик.

модифицируемый метод попарных сравнений, эффективность, сложная система

Введение

Эффективность сложных систем зависит от численных значений набора их тактико-технических характеристик (ТТХ). На практике для количественного оценивания соответствующей зависимости вводят уравнение регрессии

$$y = w_1F_1 + w_2F_2 + ... + w_nF_n , \qquad (1)$$

где F_j – значение j-й ТТХ, $j = 1,2,...,n$; w_j – весовой коэффициент, задающий важность (вес, значимость) j-й ТТХ (фактора).

Непосредственное оценивание набора $(w_1, w_2,..., w_n)$ осуществляется, например, методом наименьших квадратов [1] по результатам реальных (или имитационных) экспериментов для разных образцов исследуемых систем. Так, в частности, для оценивания боевой мощи танка может быть построена имитационная модель боя двух групп танков. Результаты многократной имитации боев танковых подразделений разных типов с разными ТТХ создают достаточную информационную базу, обработка данных которой известными методами обеспечивает восстановление параметров уравнения регрессии (1). При этом следует заметить, что точность оценивания параметров уравнения регрессии (1) существенно зависит от объема выборки наблюдений, формируемого имитационной моделью боя двух групп боевых единиц. При этом очень важно, чтобы набор участвующих в исследовании типов боевых единиц был максимально представительным, то есть совокупности их тактико-технических характеристик, возможно, более заметно отличались друг от друга. В рассматриваемой задаче достоверно известны ТТХ ограниченного перечня типов танков, бои которых имитировались моделью. Результаты оценки параметров соотношения (1) представлены выше. Поскольку реальный объем выборки не слишком велик, рассмотрим альтернативную процедуру оценивания параметров уравнения регрессии (1), использующую результаты опроса экспертов. При этом, как известно, качество непосредственного экспертного оценивания параметров соотношения (1) не будет высоким ввиду традиционно плохой согласованности мнений экспертов. Гораздо лучшие результаты могут быть получены, если для расчета весовых коэффициентов использовать данные о попарных сравнениях значимости контролируемых факторов.

Сформируем задачу использования результатов экспертного оценивания попарных сравнений значимости факторов для оценки эффективности системы.

Постановка задачи. Пусть группа экспертов проводит попарные сравнения значимости факторов. Усреднение результатов таких сравнений задает некоторую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – усредненный уровень значимости фактора i перед фактором j.

Поставим задачу разработки методики использования получаемой в результате экспертного оценивания матрицы A попарных сравнений для расчета параметров уравнения регрессии (1), задающего зависимость эффективности системы от численного значения набора ее ТТХ (факторов).

Основные результаты

Потребуем, чтобы матрица A обладала следующими свойствами: во-первых, для любого элемента матрицы имеет место $a_{ij} = 1/a_{ji}$, то есть A – обратносимметричная матрица; во-вторых, для любой тройки (i, j, k) элементов матрицы a_{ij}, a_{ik}, a_{jk} должно выполняться соотношение

$$a_{ik} = a_{ij} a_{jk} . \tag{2}$$

Матрицу А, элементы которой удовлетворяют (2), назовем согласованной. Просуммируем левую и правую части этого равенства по j. При этом получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk}, \ \ i = \overline{1,n}, k = \overline{1,n} .$$

Из этого соотношения следует

$$n \cdot a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk}$$

и

$$a_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk} \ , \ i = \overline{1,n}, \ k = \overline{1,n} . \tag{3}$$

Введем матричный аналог совокупности скалярных формул (3):

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} a_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} a_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} a_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} a_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . .$$

Откуда следует, что

$$\frac{1}{n} AA = A . \tag{4}$$

Предположим теперь, что весовые коэффициенты $w_1, w_2, \dots, w_n$ в уравнении (1), задающие значимости (важность, ценность) факторов, известны. Тогда значимость i-го фактора по сравнению с j-м естественно оценивать по формуле

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \ i, j = \overline{1,n} . \tag{5}$$

Тогда

$$a_{ij} a_{jk} = \frac{w_i}{w_j} \frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = a_{ik} ; \tag{6}$$

$$a_{ji} = \frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{\frac{w_i}{w_j}} = \frac{1}{a_{ij}} . \tag{7}$$

Таким образом, установлено, что матрица (a_{ij}), составленная по правилу (5), является обратносимметричной и согласованной.

Из (5) получим

$$a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = 1, \ i, j = \overline{1,n}$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \frac{1}{w_i} = \frac{1}{w_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = n \ , \ i = \overline{1,n} ,$$

то есть

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = n w_i ,$$

что соответствует уравнению в матричной форме

$$AW = nW ; \ W^T = (w_1, w_2, \dots, w_n).$$

Отсюда следует, что для обратносимметричной согласованной матрицы А имеется собственное число, равное n, и соответствующий этому числу положительный собственный вектор W, компонентами которого являются веса факторов. Таким образом, полученное соотношение устанавливает связь между матрицей попарных сравнений значимости параметров и набором весовых коэффициентов. Понятно, что если задана матрица А, то неизвестный вектор W может быть получен путем расчета собственного вектора этой матрицы, соответствующего собственному числу, равному n. Этот результат лежит в основе предложенного Т. Саати [2] метода анализа иерархий. Вместе с тем искомый вектор W может быть получен и гораздо более простым способом.

В соответствии с (5) матрица А имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} .$$

Вычислим суммы элементов для каждой из строк матрицы А.

Для произвольной i-й строки имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_i}{w_j} = w_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j} = Cw_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

Из соотношения (8) следует, что собственный вектор w с точностью до константы может быть рассчитан непосредственно по элементам матрицы A. Константу C определим, исходя из естественного требования к нормировке вектора W, в соответствии с которым должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \qquad (9)$$

Просуммируем левую и правую части соотношения (8) по i. При этом, с учетом (9) получим

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} Cw_i = C\sum_{i=1}^{n} w_i = C.$$

Тогда

$$w_i = \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (10)$$

Легко проверить, что получаемый в соответствии с (10) вектор

$$W^T = (w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n)$$

является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу, равному n. Действительно, вычислим

$$AW = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{w_1}{w_j} \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{w_2}{w_j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{w_n}{w_j} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{w_i}{w_j}} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{w_i}{w_j}} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_1}{w_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}\right) \\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_2}{w_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}\right) \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_n}{w_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{w_i}{w_j}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1}\cdot w_1\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j} + \frac{w_1}{w_2}\cdot w_2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j} + \ldots + \frac{w_1}{w_n}\cdot w_n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j} \\ \frac{w_2}{w_1}\cdot w_1\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j} + \frac{w_2}{w_2}\cdot w_2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j} + \ldots + \frac{w_2}{w_n}\cdot w_n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{w_n}{w_1}\cdot w_1\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j} + \frac{w_n}{w_2}\cdot w_2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j} + \ldots + \frac{w_n}{w_n}\cdot w_n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{w_i}{w_j}} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{w_1}{w_j} \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{w_2}{w_j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{w_2}{w_j} \end{pmatrix} = nw,$$

что и требовалось.

Понятно, что соотношение (10) позволит точно оценить веса сравниваемых факторов только, если матрица A является обратносимметричной и согласованной. Однако, на практике матрица A, содержащая результаты попарных сравнений значимости факторов, формируемых экспертами, конечно, таковой не является. В связи с этим, вектор, определяемый в соответствии с (10), оценивает весовые коэффициенты с погрешностью тем большей, чем сильнее реальная матрица A отличается от требуемой. В связи с этим поставим задачу отыскания согласованной матрицы X, минимально в смысле наименьших квадратов, отличающейся от заданной матрицы A.

Пусть $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ – исходная матрица попарных сравнений, $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ – искомая согласованная матрица попарных сравнений.

Используем то обстоятельство, что в согласованной матрице A для всех пар i, j выполняются равенства:

$$a_{ij} = a_{ik}a_{kj}; \; na_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}; \; a_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj},$$

$$i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}, \; k = \overline{1,n}.$$

Реальная матрица попарных сравнений является обратносимметричной, но не удовлетворяет (2). Рассмотрим процедуру коррекции реальной матрицы, приближающую эту матрицу к согласованной. Прежде всего, убедимся в том, что для любой обратносимметричной матрицы A диагональные элементы матрицы

$$\frac{1}{n}AA = A_1 = \left\{a_{ij}^{(1)}\right\}$$

равны единице.

Действительно, в соответствии с (10)

$$a_{ii}^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{ki} = \frac{n}{n} = 1, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (11)$$

Теперь, с использованием [3] введем процедуру коррекции следующим образом. Вычислительная схема является итерационной. Пусть проделано l итераций коррекции, в результате которых получена матрица $A_l = \left(a_{ij}^{(l)}\right)$.

На очередной $(l+1)$-й итерации выполняются следующие вычисления.

$$a_{ij}^{(l+1)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)} \cdot a_{kj}^{(l)}}{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)} \cdot a_{kj}^{(l)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{ik}^{(l)} \cdot a_{kj}^{(l)}}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)} \cdot a_{kj}^{(l)}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{ik}^{(l)} \cdot a_{kj}^{(l)}}} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$a_{ji}^{(l+1)} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{ik}^{(l)} \cdot a_{kj}^{(l)}}}{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)} \cdot a_{kj}^{(l)}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_{ij}^{(l+1)}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Приведенные соотношения позволяют рассчитать элементы матрицы A_{l+1} непосредственно через элементы матрицы A_l. Сходимость предложенной процедуры проверена экспериментально.

Полученная согласованная матрица попарных сравнений используется далее для расчета, в соответствии с (10), коэффициентов уравнения регрессии (1), описывающего зависимость эффективности системы от численных значений набора тактико-технических характеристик.

Выводы

Таким, описана методика оценки эффективности сложных систем с использованием данных о попарных сравнениях значимости основных характеристик систем. Для решения задачи предложена модификация метода анализа иерархий, обеспечивающая приведение реальной матрицы попарных сравнений к согласованной матрице попарных сравнений для расчета коэффициентов уравнения регрессии, описывающего эффективность системы в зависимости от значений его характеристик.

Список литературы

1. *Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.*
2. *Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1984. – 316 с.*
3. *Раскин Л.Г., Серая О.В. Формирование скалярного критерия предпочтения по результатам попарных сравнений объектов // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ». – 2003. – № 6. – С. 37-41.*

Поступила в редколлегию 29.08 2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет "ХПИ", Харьков.