

УДК 624.07

А.Ф. Санін

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск

## МОДЕЛЬ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИВАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ОТ ДЕЙСТВИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

*Расчет круговых цилиндрических оболочек представляет собой достаточно сложную инженерную задачу. Предложенный алгоритм решения задачи позволяет свести бесконечную систему алгоритмических уравнений к бесконечному числу уже не связанных между собой уравнений, что ведет к существенному упрощению задачи в целом.*

*круговые цилиндрические оболочки, силы взаимодействия*

### Введение

**Постановка проблемы.** Существо проблемы заключается в том, что благодаря специальному представлению нагрузки, действующей между оболочкой двумя силовыми элементами, предоставляется свести решение задачи вместо бесконечного числа связанных алгебраических уравнений к бесконечному числу уже не связанных между собой алгебраических уравнений. **Цель работы** состоит в том, чтобы предоставить силы взаимодействия между оболочкой и продольными силовыми элементами таким образом, при котором бесконечная система связанных алгебраических уравнений, обеспечивающих эффективное решение важной в практическом отношении задачи; распространять применяемый подход к решению более сложных составных задач: оболочки – силовые элементы, включающих не только задачи статики, но и динамики.

**Анализ литературы.** Развитие авиации, подводного флота и особенно ракетной техники привело к резкому стимулированию исследований оболочных конструкций как при статическом, динамическом режимах, так и при режимах, связанных устойчивостью оболочек. Обзор литературы по широкому кругу вопросов расчета оболочек приводится отчасти в [4, 5]. Применение ЭВМ позволило существенно расширить круг решаемых задач и точности получаемых результатов. В то же время применение и развитие аналитических (в сочетании) с численными методами расчета позволяли получать расчеты при существенно мень-

ших затратах машинного времени, что в ряде случаев могло являться критичной величиной.

### Основная часть

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться известными дифференциальными зависимостями, описывающими напряженно-деформированное состояние как цилиндрической оболочки, так и продольных усиливающих элементов от действия произвольной внешней нагрузки.

В частности, расчет цилиндрической оболочки можно проводить, используя следующие уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \nabla^8 \Phi_x + \frac{1-v^2}{C^2} \cdot \frac{\partial^4 \Phi_x}{\partial \alpha^4} &= -\frac{R^4}{D} X; \\ \nabla^8 \Phi_y + \frac{1-v^2}{C^2} \cdot \frac{\partial^4 \Phi_y}{\partial \alpha^4} &= -\frac{R^4}{D} Y; \\ \nabla^8 \Phi_z + \frac{1-v^2}{C^2} \cdot \frac{\partial^4 \Phi_z}{\partial \alpha^4} &= -\frac{R^4}{D} Z; \end{aligned} \quad (1)$$

Положительное направление координатных осей, перемещений, внутренних усилий и моментов, а также внешних нагрузок показаны на рис. 1. Обычно усиливающие продольные элементы выполняются в виде тонкостенных стержней. Для их расчета можно воспользоваться системой уравнений, представленных в табл. 1, где

$$\bar{D}^i = \frac{d^i}{dx^i}; \quad S_z = \int_F z dF; \quad I_{zz} = \int_F z^2 dF \quad \text{и т. д.}$$

Таблица 1

Расчет усиливающих продольных элементов

u	v	ω	θ	Q
$F\bar{D}^2$	$-S_y\bar{D}^3$	$-S_z\bar{D}^3$	$-S_{\omega}\bar{D}^3$	$= -\frac{1}{E}(g_x + T_L - T_K);$
$S_y\bar{D}^3$	$-I_{yy}\bar{D}^4$	$-I_{yz}\bar{D}^4$	$-I_{\omega y}\bar{D}^4$	$= -\frac{1}{E}(q_{y+}T'_L y_L - T'_k y_k + \int_{\ell} y \frac{\partial p_x}{\partial x} ds);$
$S_z\bar{D}^3$	$-I_{zy}\bar{D}^4$	$-I_{zz}\bar{D}^4$	$I_{z\omega}\bar{D}^4$	$= -\frac{1}{E}(q_z + T'_L z_1 - T'_k z_k + \int_{\ell} z \frac{\partial p_x}{\partial x} ds);$
$S_{\omega}\bar{D}^3$	$-I_{\omega y}\bar{D}^4$	$-I_{\omega z}\bar{D}^4$	$-I_{\omega\omega}\bar{D}^4 + \frac{GI_d}{E}\bar{D}^2$	$= -\frac{1}{E}(m_k + T'_L \omega_L - T'_k \omega_k + \int_{\ell} \omega \frac{\partial p_x}{\partial x} ds);$

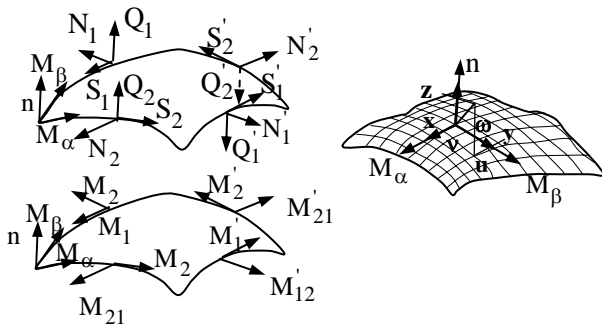


Рис. 1. Схема положительных направлений

Отметим, что все характеристики усиливающих элементов определяются относительно местной системы координат (рис. 2).

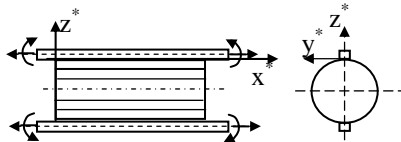


Рис. 2. Определение характеристик усиливающих элементов

Более подробное пояснение к табл. 1 можно найти в работах [2, 3].

В целом ряде практически важных случаев система уравнений, представленная таблицей 1, существенно может быть упрощена. Например, при наличии симметрии геометрии сечения и деформации тонкостенного стержня относительно оси  $Z^*$  (рис. 2), а также при отсутствии деформации поперечного сечения система уравнений может быть сведена к более простому виду:

$$F\bar{D}^2 u - S_z\bar{D}^3 \omega = -\frac{1}{E} \cdot (g_x + T_L - T_K); \quad (2)$$

$$S_2\bar{D}^3 u - I_{zz}\bar{D}^4 \omega = -\frac{1}{E} \cdot (g_z + T'_L z_L - T'_k z_k + \int_1 \frac{dp_x}{dx} ds).$$

Если на продольные элементы действует лишь краевая нагрузка и реакция оболочки, то в этом случае возможны дальнейшие упрощения:

$$F\bar{D}^2 u - S_z\bar{D}^3 \omega = -\frac{1}{E} T_k; \quad S_2\bar{D}^3 u - I_{zz}\bar{D}^4 \omega = -\frac{1}{E} g_z, \quad (3)$$

где  $T_k$  и  $g_z$  – составляющие реакции со стороны оболочки на стержень в направлении осей  $X^*$  и  $Z^*$ .

Излагаемая методика решения задачи принципиально позволяет производить расчеты цилиндрической оболочки, подкрепленной различными по геометрии и расположенными на произвольных расстояниях относительно друг друга продольными элементами. Однако в дальнейшем будет рассмотрен частный случай, когда продольные элементы расположены по контуру поперечного сечения на равных расстояниях друг от друга, имеют одинаковую геометрию сечения и загрузка одинаковой внешней нагрузкой. Заметим, что уравнения (1) и (2) легко можно было бы проинтегрировать,

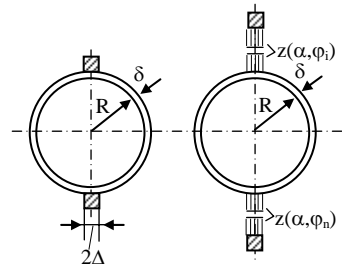


Рис. 3. Всплеск нагрузки

если бы были известны силы взаимодействия между оболочкой и продольными элементами. Поскольку же последние неизвестны, то возникает дополнительная необходимость в их определении. При этом целесообразно воспользоваться тем обстоятельством, что характер распределения сил взаимодействия по поперечным сечениям оказывается известным и имеет вид всплеска нагрузки (рис. 3). В этом случае поверхностную нагрузку на оболочку от действия продольных элементов можно представить как:

$$X(\alpha, \varphi) = \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m A_n \cos \frac{m\pi\alpha R}{L} \cdot \cos n\varphi; \quad Y(\alpha\varphi) = 0; \quad (4)$$

$$Z(\alpha, \varphi) = \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m A_n \sin \frac{m\pi\alpha R}{L} \cdot \cos n\varphi;$$

где  $A_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sin} \sin n\varphi_0$ ;  $A_0 = \frac{2}{\pi} \varphi_0$ ;  $\alpha = \frac{x}{R}$ ;  $2\varphi_0$  – центральный угол, характеризующий ширину контактируемого участка оболочки с продольным элементом;  $s$  – число продольных элементов.

Подобное представление поверхностной нагрузки позволяет существенным образом сократить объем вычислительных работ, так как сводит определение сил взаимодействия к решению бесконеч-

ного числа не связанных между собой систем алгебраических уравнений лишь третьего порядка. В общем случае требовалось бы решение бесконечной системы алгебраических уравнений при задании поверхностной нагрузки в виде:

$$X = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mn} \cos \frac{m\pi\alpha R}{L} \cdot \cos \beta_n \varphi; \quad (5)$$

$$Z = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha R}{L} \cdot \cos \beta_n \varphi.$$

Если считать, что загрузка оболочки происходит только через продольные элементы, то для шарнирно опертой оболочки можно записать следующие выражения для потенциальной функции:

$$\Phi_x(\alpha, \varphi) = -\frac{R^4}{D} \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m \theta_{mn} \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi;$$

$$\Phi_z(\alpha, \varphi) = \frac{R^4}{D} \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m \theta_{mn} \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi, \quad (6)$$

где  $X_m, Z_m$  – определяемые величины, характеризующие взаимодействие оболочки с продольными элементами;  $\theta_{mn} = A_n / \left( (\lambda_m^2 + \beta_n^2)^4 + ((1-\nu^2)/C^2) \lambda_m^4 \right)$ ;

$$\lambda_m = \frac{m\pi R}{L}; \beta_n = \text{sn}; c^2 = \frac{\delta^2}{12R^2}; D = \frac{\delta^3 E}{12(1-\nu^2)};$$

Располагая выражениями для потенциальной функции (6), можно вычислить перемещения цилиндрической оболочки по линии контакта ее с продольным элементом [1]:

$$u_x^0 = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m u_{xmn}^0 \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi;$$

$$\omega_x^0 = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m \omega_{xmn}^0 \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi; \quad (7)$$

$$u_z^0 = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m u_{zmn}^0 \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi;$$

$$\omega_z^0 = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m \omega_{zmn}^0 \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi;$$

$$\text{где } u_{xmn}^0 = \frac{R^4}{D} \left\{ \lambda_m^2 + c^2 \left[ \lambda_m^2 + \frac{2}{1-\nu} \beta_n^2 \right] (\lambda_m^2 + \beta_n^2) \right\} \theta_{mn};$$

$$\omega_{xmn}^0 = -\frac{R^4}{D} \left\{ \lambda_m \beta_n^2 - \nu \lambda_m^3 \right\} \theta_{mn}; \omega_{zmn}^0 = \frac{R^4}{D} \left\{ \lambda_m^2 + \beta_n^2 \right\}^2 \theta_{mn};$$

$$u_{zmn}^0 = -\frac{R^4}{D} \left\{ \lambda_m \beta_n - \nu \lambda_m^3 \right\} \theta_{mn};$$

Введенная индексация в обозначении перемещений  $u_{x0}, \omega_{x0} \dots$  означает, во-первых, что речь идет о перемещениях оболочки, и во-вторых, что данное перемещение соответствует поверхностной нагрузке либо  $X(\alpha, \varphi)$ , либо  $Z(\alpha, \varphi)$ . Аналогичная индексация применяется и при определении перемещений продольных элементов (стрингеров).

Таким образом, для рассматриваемого случая, когда поверхностная нагрузка имеет лишь две со-

ставляющие:  $X(\alpha, \varphi)$  и  $Z(\alpha, \varphi)$ , суммарные перемещения в оболочке от действия сил со стороны продольных элементов можно представить как

$$u^0 = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m u_{xmn}^0 + Z_m u_{zmn}^0) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi; \quad (8)$$

$$\omega^0 = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m \omega_{xmn}^0 + Z_m \omega_{zmn}^0) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi.$$

Обращаясь к интегрированию системы дифференциальных уравнений (3), описывающих напряженно-деформированное состояние тонкостенного стержня, и учитывая (3), что

$$T_k(\alpha) = X(\alpha, \varphi_i) \cdot 2\Delta; \quad g_z(\alpha) = Z(\alpha, \varphi_i) \cdot 2\Delta, \quad (9)$$

получим следующие выражения осевых и радиальных перемещений усиливающего элемента по линии контакта его с оболочкой:

$$u^c = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m u_{xmn}^c + Z_m u_{zmn}^c) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + A_0 + A_1 \alpha R + A_2 \frac{(\alpha R)^2}{2}; \quad (10)$$

$$\omega^c = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m \omega_{xmn}^c + Z_m \omega_{zmn}^c) \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + B_0 + B_1 \alpha R + B_2 \frac{(\alpha R)^2}{2} + B_3 \frac{(\alpha R)^3}{6};$$

$$\text{где } u_{xmn}^c = \frac{2\Delta R^3}{E} \lambda_m^{-2} \frac{\rho_0}{R} A_n; \quad u_{zmn}^c = \frac{2\Delta R^3}{E} \cdot \frac{r_0}{\lambda_m^3} A_n;$$

$$\omega_{xmn}^c = \frac{2\Delta R^4}{E} \lambda_m^{-3} \frac{r_0}{R} A_n; \quad \omega_{zmn}^c = -\frac{2\Delta R^3}{E} \cdot \frac{S_0}{\lambda_m^4} A_n; \quad (11)$$

$$\rho_0 = \frac{I_{zz}}{-FI_{zz} + S_z^2}; \quad r_0 = \frac{S_z}{-FI_{zz} + S_z^2}; \quad S_0 = \frac{F}{-FI_{zz} + S_z^2}.$$

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $B_1$  легко определяются из граничных условий. Удовлетворение граничным условиям приводит к следующим окончательным выражениям для осевых и радиальных перемещений усиливающих элементов:

$$u^c = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m u_{xmn}^c + Z_m u_{zmn}^c) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} u'_{0m} \cos \lambda_m \alpha;$$

$$\omega^c = \sum_{m=1,3,5...n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m \omega_{xmn}^c + Z_m \omega_{zmn}^c) \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \omega''_{0m} \sin \lambda_m \alpha;$$

$$\text{где } u'_{0m} = -\frac{4}{\alpha_0} [u^c]' \cdot R \left( \frac{\alpha_0}{m\pi} \right)^2; \quad \omega''_{0m} = -\frac{4}{\alpha_0} [\omega^c]'' \cdot R^2 \cdot \left( \frac{\alpha_0}{m\pi} \right)^3.$$

Таким образом, в выражения для осевых и радиальных перемещений оболочки, а также для продольных элементов вошли неизвестные величины  $X_m$  и  $Z_m$ . Для их определения можно воспользоваться условием равенства перемещений оболочки и продоль-

ных элементов по линии их контакта. Поскольку все необходимые величины известны, то из условия

$$u^0(\alpha, \varphi_i) = u_i^c(\alpha, \varphi_i); \quad \omega^0(\alpha, \varphi_i) = \omega^c(\alpha, \varphi_i); \quad (15)$$

можно получить следующие уравнения для определения неизвестных  $X_m$  и  $Z_m$ :

$$\begin{cases} X_m \sum_{n=0}^{\infty} (-u_{Xmn}^c + u_{Xmn}^0) \cos \beta_n \varphi_i + \\ + Z_m \sum_{n=0}^{\infty} (u_{Zmn}^c + u_{Zmn}^0) \cos \beta_n \varphi_i = u'_{0m}; \\ X_m \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega_{Xmn}^c + \omega_{Xmn}^0) \cos \beta_n \varphi_i + \\ + Z_m \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_{Zmn}^c + \omega_{Zmn}^0) \cos \beta_n \varphi_i = \omega'_{0m}. \end{cases} \quad (16)$$

Основные характеристики испытываемой конструкции:  $L=100$  см;  $R=12,5$  см;  $\delta=0,08$  см, материал оболочки ст-3;  $2\Delta=1,7$  см;  $H=1,8$  см; материал стрингера Д=16. На основании проведенных расчетов можно заключить, что при выбранных соотношениях жесткостей оболочки и усиливающих элементов, которые принимались при исследованиях, оболочка очень медленно включается в работу.

При некоторых видах загрузки продольных элементов внешней нагрузки нормальная составляющая сил взаимодействия оболочки с продольными элементами может оказать существенное влияние на напряженное состояние конструкции.

### Выводы

1. Приведенные в работе расчеты круговой цилиндрической оболочки соединенной двумя продольными силовыми элементами, расположенные диаметрально на поверхности оболочки позволили

сделать следующие основные выводы.

2. Применение уравнений теории пологих оболочек, разработанных Власовым В.В. [1], в форме Гольденвейзера А.Л. [4] показали, что решения, проведенные на их основе, приводят к практически совпадающим результатам, выполненных автором в эксперименте.

3. При выбранных для проведения экспериментов соотношения жесткостей оболочки и продольных силовых элементов отмечается весьма медленное включение оболочки в работу.

4. При имеющих место растяжениях продольных силовых элементов в оболочке (между силовыми элементами) возникали зоны сжатия, которые при определенных условиях могут являться очагами локальной потери устойчивости оболочки.

### Список литературы

1. Власов В.З. *Избранные труды, т.1.* – М.: АН СССР, 1962. – 528 с.
2. Власов В.З. *Избранные труды, т.2.* – М.: АН СССР, 1963. – 503 с.
3. Власов В.З. *Избранные труды, т.3.* – М.: АН СССР, 1963. – 472 с.
4. Гольденвейзер А.Л., *Теория упругих тонких оболочек.* – М.: ГИИТЛ, 1953. – 544 с.
5. Кац С.Н. *Строительная механика оболочек.* – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.

Поступила в редколлегию 13.03.2007

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. О.Н. Фоменко, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.