УДК 621.37:621.391

С.Г. Рассомахин[1], Л.С. Сорока[2]

[1]*Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков*
[2]*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков*

НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ КВАЗИГАУССОВЫХ СИГНАЛОВ

Дано определение квазигауссовых сигналов, как одного класса полунепрерывных процессов. На основе нелинейной задачи оптимизации и метода вариационного исчисления определена переходная характеристика нелинейного фильтра-дискриминатора, который выполняет функции селективной фильтрации и оценки значения сигнала. Данная переходная характеристика учитывает априорные статистические сведения об ожидаемом сигнале и реальный уровень мощности помехи. Показаны преимущества полученного результата по показателю среднего квадрата ошибки по сравнению с известными методами фильтрации.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, средний квадрат ошибки, полунепрерывные сигналы, функция правдоподобия.

Введение

Постановка проблемы. Построение эффективных систем передачи информации (СПИ) в настоящее время неразрывно связано с проблемой интенсификации использования частотно-энергетического ресурса физических каналов связи. Это объясняется перегрузкой пригодных для радиосвязи участков радиочастотного спектра в условиях постоянно растущего числа одновременно работающих сетей множественного доступа, что обостряет негативное влияние взаимно мешающих факторов [1, 2]. Одним из направлений решения этой проблемы является применение сложных сигналов с комбинированными видами модуляции в сочетании с методами сужения спектра и помехоустойчивым кодированием [3]. Совместное применение амплитудной, частотной и фазовой манипуляции в дискретных каналах является базой для многоосновного кодирования и повышает частотную эффективность систем за счет снижения удельных затрат полосы на передачу единицы информации. Однако при этом достаточно тяжело сохранить показатели энергетической эффективности в допустимых пределах. Поэтому потенциальные характеристики дискретных каналов принципиально уступают характеристикам непрерывного канала. Это является прямым следствием определения пропускной способности непрерывного канала, которая, как известно, всегда превышает аналогичную характеристику дискретных каналов СПИ.

Анализ последних исследований. Одним из направлений повышения эффективности СПИ является переход к использованию непрерывных каналов для передачи дискретных сообщений. При этом непрерывный сигнал, обладающий функцией распределения $\varphi(s)$, обладает информативными признаками из дискретного (конечного или счетного) множества. Приближение распределения $\varphi(s)$ к нормальному обеспечивает, в условиях гауссова канала и ограничения на среднюю мощность передатчика, повышение энтропии сигнала, а, следовательно, и скорости передачи информации. Ввиду квантованного характера изменения информативных параметров таких сигналов, применение оптимальной линейной фильтрации [4] в процессе первичной обработки не всегда приводит к наилучшему результату. Это связано с тем, что определение оптимального избирательного фильтра обычно осуществляется решением интегрального уравнения Винера-Хопфа [4], получаемого при рассмотрении (в качестве сигнала и помехи) непрерывных случайных процессов с дробно-рациональным спектром.

Цель статьи. Целью статьи является получение аналитической характеристики нелинейного фильтра-дискриминатора, предназначенного для максимизации отношения сигнал/шум при обработке квазигауссовых сигнальных конструкций на выходе канала.

Основная часть

Произвольный сигнал $x(t)$ может быть представлен в виде временного ряда на основе отсчетных функций

$$x(t)=\sum_{i} a_{j}\left(\frac{i}{2F}\right)\cdot \operatorname{sinc}\left(t-\frac{i}{2F}\right), \qquad (1)$$

где $a_j\left(\frac{i}{2F}\right)$ – j-е значение амплитуды отсчета в i-й момент времени $t_i = i/(2F)$; F – верхняя частота в спектре. Квазигауссовым сигналом, обладающим плоским спектром в полосе [0, F], будем называть аналитическую функцию времени (1) в случае, если распределение вероятностей амплитуд отсчетов a_i асимптотически подчинено нормальному закону, а множество возможных значений a_i является конечным или счетным. Необходимость передачи таких сигналов возникает при использовании аналогового представления числовых кодов, при этом значения амплитуд a_i соответствуют передаваемым действительным целым числам.

Рассмотрим процесс получения вектора $\vec{a}$ числового кода для построения (1) на примере преобразования представления стационарного эргодического двоичного источника с энтропией $H(x)=1$. Исходной является последовательность независимых равновероятных двоичных символов, которая разбивается на N блоков по k бит. Каждый из блоков трактуется, как код обычного целого числа c_i из диапазона $\left[0,2^k-1\right]$ и центрируется относительно нуля, что приводит к получению дробных чисел: $b_i = c_i - \left(2^k-1\right)/2$. Элементы b_i при $i=0\ldots N-1$ являются координатами вектора $\vec{b}$. Полученный вектор подвергается нормализующему преобразованию, которое приводит к получению вектора числового кода $\vec{z}=\{z_0, z_1, \ldots, z_N\}$:

$$\vec{z} = \|A_N\| \cdot \vec{b}, \qquad (2)$$

где A_N – матрица Адамара размером $N \times N$, состоящая из ортогональных строк и столбцов и получаемая с использованием рекуррентного правила

$$\|A_2\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \|A_N\| = \begin{vmatrix} A_{N/2} & A_{N/2} \\ A_{N/2} & -A_{N/2} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Несмотря на дробные значения координат вектора $\vec{b}$, получаемый на основании (2) вектор $\vec{z}$ содержит только целые числа, расположенные симметрично относительно нуля в диапазоне $\left[-N\left(2^k-1\right)/2, \ldots, 0, \ldots, N\left(2^k-1\right)/2\right]$. Формирование вектора амплитудных коэффициентов $\vec{a}$ для синтеза сигнала $x(t)$ производится с учетом ограничения P на среднюю мощность: $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{z}$, где α – коэффициент масштабирования. Если $Q(a_i) = Q(z_i)$ – распределение вероятностей координат вектора $\vec{a}$, то

$$\alpha = \sqrt{P} \left(\sum_{i=0}^{N\left(2^k-1\right)} Q(a_i) z_i^2 \right)^{-1/2}. \qquad (4)$$

При равной вероятности появления всех $2^{k \cdot N}$ комбинаций на выходе источника, распределение вероятностей $Q(a_i)$ с увеличением N асимптотически стремится к кусочно-определенному усеченному нормальному закону, что является следствием классической предельной теоремы:

$$Q(a_i) = Q(z_i) =$$

$$P\left\{ \left(i - \frac{N\left(2^k-1\right)-1}{2} \right) < z_i < \left(i - \frac{N\left(2^k-1\right)+1}{2} \right) \right\} =$$

$$= \frac{\gamma}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \int\limits_{i-\frac{N}{2}\left(2^k-1\right)-0,5}^{i-\frac{N}{2}\left(2^k-1\right)+0,5} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\cdot\sigma^2} \right) d\eta, \qquad (5)$$

$$i = 0,1,\ldots N\left(2^k-1\right),$$

где γ – коэффициент усечения, определяемый выражением

$$\gamma = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \int\limits_0^{N\left(2^k-1\right)} \exp\left(-\frac{\left(\eta - \frac{N}{2}\left(2^k-1\right)\right)^2}{2\cdot\sigma^2} \right) d\eta \right]^{-1},$$

а σ^2 – дисперсия суммы N независимых, равномерно распределенных случайных величин b_i, которая, как следует из (2) и (3), определяется выражением $\sigma^2 = N\left[\left(2^{2k}-1\right)/12\right]$.

При передаче по гауссову каналу сигнал (1), обладающий средней мощностью

$$P = \sum_{i=0}^{N\left(2^k-1\right)} Q(a_i) \cdot a_i^2 \approx \alpha^2 \cdot N\left[\left(2^{2k}-1\right)/12\right],$$

складывается с белым шумом $\xi(t)$, обладающим спектральной плотностью мощности N_0. Поэтому на выходе канала наблюдению доступен сигнал $y(t) = x(t) + \xi(t)$. Оптимальный линейный фильтр, обеспечивающий минимальный средний квадрат ошибки при наблюдении сигнала на выходе канала, обладает передаточной функцией [4]:

$$K(\omega) = \frac{S(\omega)}{S(\omega)+N_0} = \begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{h}\right)^{-1}, & \text{при } 0 \le \omega \le 2\pi F, \\ 0 & \text{, при } \omega > 2\pi F, \end{cases} \qquad (6)$$

где $S(\omega)$ – спектр мощности сигнала, ω – круговая частота, $h = P/N_0$ – отношение сигнал/шум в канале. Фильтрация по правилу (6) определяет физически достижимый предел улучшения отношения сигнал/шум в случае, если сигнал является непрерывным, т.е. его измерения в отсчетных точках могут принимать любые значения на числовой оси. При этом оценка переданного сигнала после прохождения $y(t)$ через фильтр (6) в отсчетных точках на оси времени $x^*(t_j)$ обеспечивает дисперсию шума восстановления чисел a_i, породивших процесс, вычисляемую из выражения

$$D = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \left(x(t_j) - x^*(t_j) \right)^2 = \frac{P}{1+h}. \qquad (7)$$

Учет дискретного характера координат вектора $\vec{a}$ позволяет улучшить качество восстановления квазигауссова сигнала на выходе канала путем применения нелинейного дискриминатора в сочетании с обычной полосовой фильтрацией. В этом случае, если $\Phi(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика идеального фильтра нижних частот (ФНЧ), а $f(y)$ описывает амплитудный дискриминатор, то передаточная функция нелинейного фильтра-дискриминатора имеет вид

$$K_н(\omega, y) = \Phi(\omega) f(y), \; \Phi(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ при } \omega \le 2\pi F, \\ 0 \text{ при } \omega > 2\pi F. \end{cases} \quad (8)$$

Реализация полосовой фильтрации может осуществляться известными методами (например, быстрым преобразованием Фурье с последующим обнулением коэффициентов внеполосных гармоник, или вычислением свертки сигнала и переходной характеристики ФНЧ и т.д.) и не является предметом обсуждения данной статьи. Кроме того, будем предполагать, что при полосовой фильтрации ограниченной по времени, но достаточно продолжительной реализации сигнала (при больших значениях N) можно пренебречь искажениями, неизбежно возникающими на краях рассматриваемого временного интервала (из-за проявления, так называемого, эффекта Гиббса). Поэтому займемся определением характеристики оптимального дискриминатора $f_{опт}(y)$, обеспечивающего минимальный средний квадрат ошибки восстановления сигнала $x(t)$ в условиях гауссова шума. При передаче отсчета с амплитудой a_j, вероятность появления которого составляет $Q(a_i)$, на выходе канала после полосовой фильтрации в момент времени t_i присутствует измерение $y(t_i)$, на основании которого дискриминатором формируется оценка $x^* = f(y)$. Квадрат ошибки при получении данной оценки составляет величину $Q(a_j) \cdot [f(y) - a_j] \cdot d\Psi_{a_j}(y)$, где $d\Psi_{a_j}(y) = \Pr(y|a_j)$ – элементарная вероятность попадания измерения в окрестность точки y при условии передачи отсчета с амплитудой a_j; $\Psi_{a_j}(y)$ – функция правдоподобия или плотность распределения вероятностей случайной величины y при передаче a_j.

Вычисление математического ожидания квадрата ошибки для совокупности амплитуд

$$a_j, \quad j = 0, \ldots N(2^k - 1),$$

а также усреднение по всем возможным значениям y дает возможность определения дисперсии ошибки восстановления сигнала (1) при использовании дискриминатора $f(y)$ в виде

$$D_f = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N(2^k-1)} Q(a_j) [f(y) - a_j]^2 \Psi_{a_j}(y) dy. \quad (9)$$

В соответствии с рассмотренным алгоритмом получения вектора амплитуд, выражение (9) подразумевает $a_j = \alpha \left[j - \frac{N}{2}(2^k - 1) \right]$. При аддитивном воздействии шума в гауссовом канале функции правдоподобия при передаче отсчетов с амплитудами a_j, $j = 0, \ldots N(2^k - 1)$ определяются нормальным распределением с соответствующими математическими ожиданиями и дисперсией, равной N_0:

$$\Psi_{a_j}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y - a_j)^2}{2N_0} \right). \quad (10)$$

Поэтому

$$D_f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2N_0}}}{\sqrt{2\pi N_0}} \sum_{j=0}^{N(2^k-1)} \frac{Q(a_j)[f(y) - a_j]^2}{\exp\left[\frac{a_j(a_j - 2y)}{2N_0} \right]} dy.$$

Сделаем замену $f(y) = f(y) + \Delta$, найдем производную $\frac{dD_f}{d\Delta}$ и положим затем $\Delta = 0$:

$$\frac{dD_f}{d\Delta} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{y^2}{2N_0}}}{\sqrt{\pi N_0}} \sum_{j=0}^{N(2^k-1)} \frac{Q(a_j)[f(y) - a_j]}{\exp\left[\frac{a_j(a_j - 2y)}{2N_0} \right]} dy. \quad (11)$$

Минимум D_f найдем, приравнивая (11) к нулю и учитывая симметрию нормального распределения:

$$\sum_{j=0}^{N(2^k-1)} Q(a_j)[f_{опт}(y) - a_j] \cdot e^{-\frac{a_j(a_j - 2y)}{2N_0}} = 0.$$

Откуда следует, что характеристика оптимального дискриминатора определяется выражением

$$f_{опт}(y) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N(2^k-1)} \frac{a_j Q(a_j) \exp\left[-\frac{a_j(a_j - 2y)}{2N_0} \right]}{\sum_{j=0}^{N(2^k-1)} Q(a_j) e^{-\frac{a_j(a_j - 2y)}{2N_0}}}. \quad (12)$$

Аналогичная характеристика оптимального линейного фильтра (6) записывается в виде

$$f_л(y) = \frac{h}{1+h} y. \quad (13)$$

Различие между характеристиками дискриминаторов (12) и (13) при осуществлении "мягкого" решения о значении амплитуды принятого отсчета рассмотрим на примере, положив $k = 1,\ N = 4$, при ограничении на среднюю мощность квазигауссова сигнала $P = 1$.

Значения амплитуд и распределение вероятностей $Q\left(a_j\right)$ для выбранных значений параметров приведено в табл. 1.

Таблица 1

Распределение вероятностей а
мплитуд квазигауссова сигнала

j	0	1	2	3	4
$z_j = a_j$	-2	-1	0	1	2
$Q\left(a_j\right)$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

Для данного распределения, как следует из (4), $\alpha = 1$, что означает $a_j = z_j$.

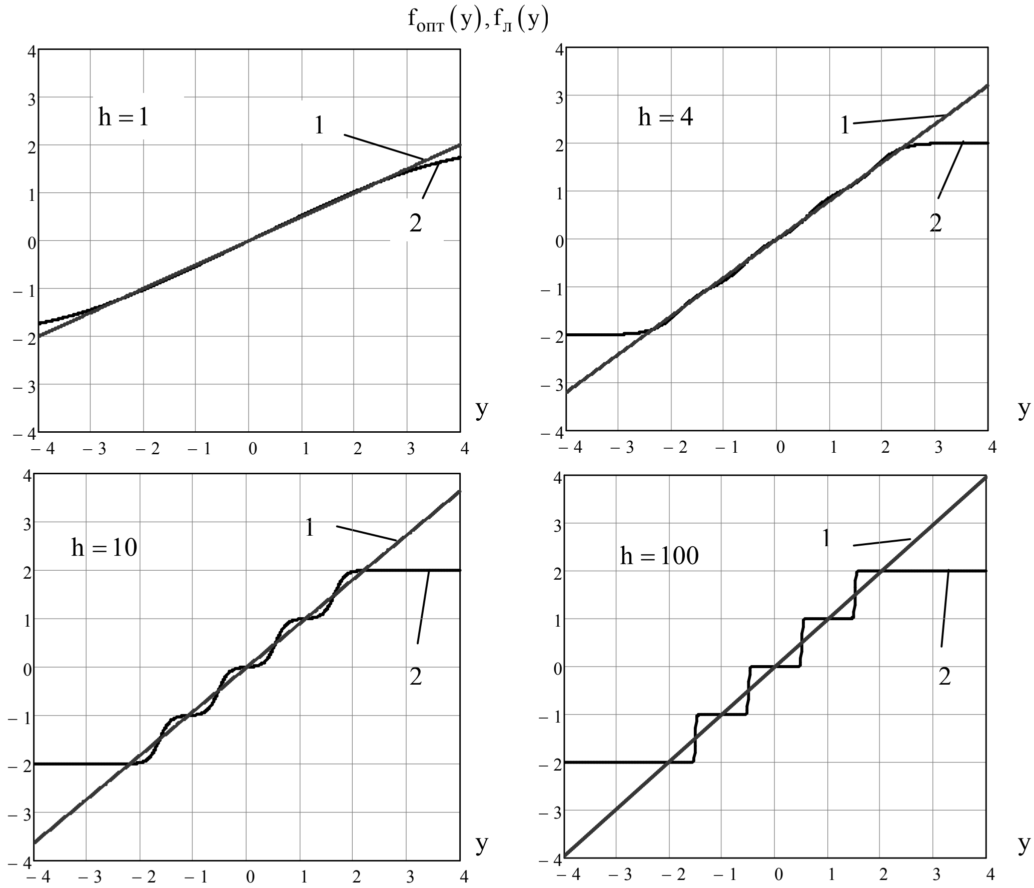

Рис. 1. Характеристики линейного $f_л(y)$ (кривые 1) и оптимального нелинейного $f_{опт}(y)$ (кривые 2) дискриминаторов при различном отношении сигнал/шум

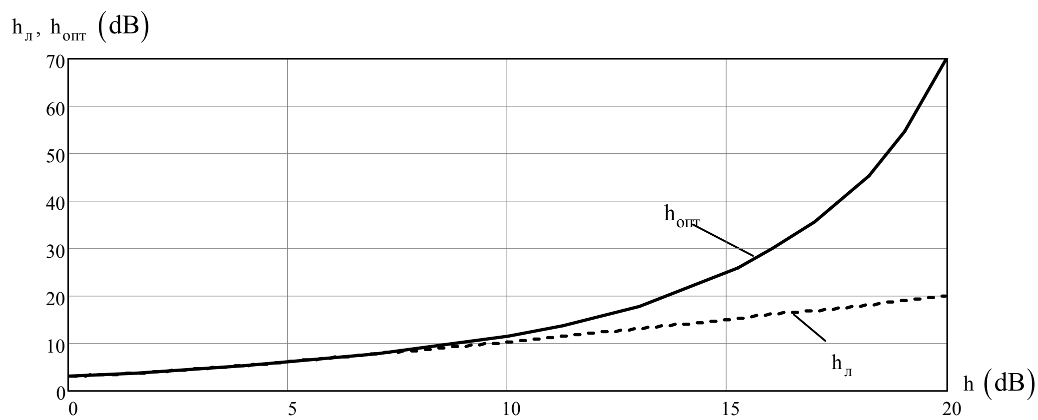

Рис. 2. Зависимости отношения сигнал/шум на выходе линейного фильтра и оптимального нелинейного фильтра-дискриминатора от отношения сигнал/шум в канале

Характеристики (12) и (13), рассчитанные для условий примера, представлены на рис. 1 для различных значений отношения сигнал/шум в канале. Графики показывают, что при малых значениях h отличие $f_{опт}(y)$ от $f_{л}(y)$ проявляется только в нелинейности на границах диапазона передаваемых чисел (амплитуд отсчетов). При этом в основном рабочем диапазоне изменения амплитуд отсчетов функция $f_{опт}(y)$ имеет практически линейный характер с крутизной наклона характеристики, совпадающей (13). С улучшением качества канала нелинейность оптимального дискриминатора проявляется сильнее, стремясь при $h \to \infty$ к характеристике идеального ступенчатого квантователя.

Отношение сигнал/шум, достигаемое на выходе фильтров (линейного и оптимального нелинейного), может быть найдено с использованием формул

$$h_{л} = P/D_{л}, \qquad h_{опт} = P/D_{опт}, \tag{14}$$

где $D_{л}$ и $D_{опт}$ определяются из выражения (9) при подстановке функций (13) и (12), соответственно.

Сравнение точности восстановления амплитуд отсчетов по показателю отношения сигнал/шум для этих двух случаев иллюстрируется на рис. 2 при различном качестве канала. Представленные зависимости свидетельствуют о том, что выигрыш от применения нелинейной фильтрации, совмещенной с процессом дискретизации, может достигать нескольких десятков децибел.

Выводы

Основной результат данной статьи заключается в получении универсального выражения (12), определяющего переходную характеристику устройства, которое обеспечивает наилучшее значение отношения сигнал/шум на выходе гауссова канала. Данная переходная характеристика учитывает априорные статистические сведения об ожидаемом сигнале и реальный уровень мощности помехи. Анализ результатов применения нелинейного фильтра-дискриминатора показывает, что для плохих каналов линейный и нелинейный алгоритмы обеспечивают практически одинаковый результат. Однако с улучшением качества канала выигрыш от использования нелинейного фильтра-дискриминатора становится существенным и достигает нескольких десятков децибел. Исходный и полученный алгоритмы фильтрации являются основой для реализации "мягких" решений при обработке дискретных сигналов, преобразованных к виду квазигауссовых процессов. Полученная функция оптимального нелинейного фильтра-дискриминатора (12) является предпочтительной альтернативой по сравнению с обычно используемым логарифмом отношения правдоподобия, как числовой характеристики при выработке "мягких" решений в декодерах-демодуляторах. В частности, целесообразно применение рассмотренного нелинейного фильтра-дискриминатора для осуществления алгоритмов принятия "мягких" решений при использовании многоосновных сигналов с амплитудно-фазовой модуляцией в сочетании с корректирующими турбо кодами.

Список литературы

1. *Вишневский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.*
2. *Григорьев В.А., Лагутенко О.И., Распаев Ю.А. Сети и системы радиодоступа. – М.: Эко-Трендз, 2005. – 384 с.*
3. *Феер К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра: Пер. с англ. / Под ред. В.И. Журавлева. − М.: Радио и связь, 2000. − 520 с.*
4. *Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. − М.: Радио и связь, 1983. − 320 с.*
5. *Рассомахин С.Г. Одномерные кодово-сигнальные конструкции на основе нормализующего преобразования двоичных последовательностей // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2007. – Вип. 7 (65). – С. 83-87.*

Поступила в редколлегию 25.02.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.И. Карпенко, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

НЕЛІНІЙНА ФІЛЬТРАЦІЯ КВАЗІГАУССОВИХ СИГНАЛІВ

С.Г. Рассомахін, Л.С. Сорока

Дано визначення квазігауссових сигналів, як одного класу напівбезперервних процесів. На основі нелінійної задачі оптимізації і методу варіаційного числення визначена перехідна характеристика нелінійного фільтру-дискримінатора, який виконує функції селективної фільтрації і оцінки значення сигналу. Дана перехідна характеристика враховує апріорні статистичні дані про очікуємий сигнал и реальний рівень потужності завади. Показані переваги одержаного результату по показнику середнього квадрата помилки в порівнянні з відомим лінійним методом фільтрації.

***Ключові слова:** нелінійна фільтрація, середній квадрат помилки, напівбезперервні сигнали, функція правдоподібності.*

NONLINEAR FILTRATION OF KVAZIGAUSSOVYKH OF SIGNALS

S.G. Rassomahin, L.S. Soroka

Determination of almost Gaussian signals is given, as one of types of semi continuous processes. On the basis of nonlinear task of minimization and method of variation calculation the decision, allowing to define transitional description of nonlinear filter - discriminator which carries out the functions of electoral filtration and estimation of value signal, is found. The given transitive characteristic takes into account aprioristic statistical data on an expected signal and a real level of capacity of a handicap. Advantage of the got result is shown on the indicator of the middle square of error, arrived at by comparison to the known linear method of filtration.

Keywords: nonlinear filtration, middle square of error, semicontinuous signals, function of verisimilitude.