

УДК 519.71

С.А. Ляшенко<sup>1</sup>, Т.С. Сакало<sup>2</sup><sup>1</sup>Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства, Харьков<sup>2</sup>Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

## ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ГАММЕРШТЕЙНА С ПОМОЩЬЮ РАДИАЛЬНО-БАЗИСНОЙ СЕТИ

Рассматривается нейросетевой подход к построению нелинейной динамической модели Гаммерштейна. Результаты исследования подтвердили эффективность применения сетей радиально-базисного типа для построения нелинейной модели Гаммерштейна. Применение обобщенно-регрессионной сети даже при настройке только весовых параметров сети обеспечивает получение приемлемых результатов. Настройка же всех параметров сетей позволяет существенно повысить точность решения задачи идентификации, значительно увеличивая при этом время обучения.

**Ключевые слова:** ИНС, модель Гаммерштейна, радиально-базисная сеть, моделирование процесса идентификации.

### Введение

**Постановка проблемы.** При исследовании нелинейных объектов в зависимости от цели исследования (изучение свойств объекта или управление) используют либо упрощенное их описание в виде статических моделей, либо более сложное, учитывающее динамические свойства объекта. Одним из наиболее общих описаний нелинейных объектов является описание в виде дискретного ряда Вольтерра [1, 2]

$$y[k] = V_n[u(k)] = \sum_{k_1=0}^k \dots \sum_{k_n=0}^k h_n(k_1, \dots, k_n) \prod_{j=1}^n u(k-k_j), \quad (1)$$

где  $y(i), u(i)$  – соответственно выходной и входной сигналы объекта в  $j$ -й момент времени;  $h_n(k_1, \dots, k_n)$  – ядра Вольтерра  $n$ -го порядка, определяемые в зависимости от того, как представлен входной сигнал. Задача идентификации заключается в определении ядер Вольтерра и сводится к минимизации некоторого (обычно квадратичного) функционала от рассогласования выходных сигналов объекта  $y(i)$  и модели  $\hat{y}(i)$ . Классическая дискретная модель Гаммерштейна является частным случаем модели Вольтерра (1) и представляет собой последовательно соединенные нелинейное статическое и линейное динамические звенья [1 – 3]. При этом статическая нелинейность представлена рядом

$$z(k) = \Phi(u(k)) = \sum_{l=0}^q \alpha_l u^l(k), \quad (2)$$

а линейная динамическая часть описывается соотношением

$$\hat{y}(k) = \alpha_0 \sum_{i=1}^m b_i + \alpha_1 \sum_{i=1}^m b_i z(k-i) + \alpha_q \sum_{i=1}^m b_i z^q(k-i). \quad (3)$$

Сравнение (3) и (1) позволяет представить модель Гаммерштейна в виде ряда Вольтерра, при этом

$$h_0 = \alpha_0 \sum_{i=1}^m b_i; \quad h_i = \alpha_1 b_i; \quad h_{\underbrace{i, \dots, i}_q} = \alpha_q b_i, \quad (4)$$

а выражение для выходного сигнала примет вид:

$$y(k) = h_0 + \sum_{i=1}^m h_i z(k-i) + \dots + \sum_{i=1}^m h_{\underbrace{i, \dots, i}_q} z^q(k-i).$$

Хотя данная модель является нелинейной относительно неизвестных параметров  $a_i (i = \overline{1, q})$ ,  $b_j (j = \overline{1, m})$ , она будет линейной относительно параметров  $h_0, h_1, \dots, h_{m, \dots, m}$ , что значительно упрощает решение задачи идентификации.

Более общим представлением нелинейного объекта в виде динамической модели Гаммерштейна является представление в виде

$$z(k) = \Phi(u(k)); \quad \hat{y}(k) = \sum_{i=1}^m b_i z(k-i) - \sum_{i=1}^m a_i y(k-i),$$

так как здесь учитываются запаздывания не только входного  $u(k)$ , но и выходного сигнала  $y(k)$ .

Учитывая нелинейность вида (2), получим следующую модель Гаммерштейна:

$$\hat{y}(k) = \gamma_0 + \gamma_1 \sum_{i=1}^m b_i u(k-i) + \dots + \gamma_1 \sum_{i=1}^m b_i u^l(k-i) - \sum_{i=1}^m a_i y(k-i), \quad (5)$$

которая является нелинейной относительно искомым параметров  $\gamma_j, b_j, j = 1, \dots, l; i = 1, \dots, m$ . В этом случае для решения задачи идентификации необходимо применение методов нелинейной оптимизации.

Если же ввести новые параметры  $\theta_i^{(l)} = \gamma_1 b_i, \theta_1(\tau_1) = \gamma_1 K \tau_1, \theta_0 = \gamma_0, \theta_1^{(i)} = \gamma_1 b_i$  то получим линейную относительно параметров  $\theta_j (j = 0, 1, \dots, l)$ ,  $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$  модель

$$\hat{y}(k) = \theta_0 + \sum_{i=1}^m \theta_i^{(1)} x(k-i) + \dots + \sum_{i=1}^m \theta_i^{(1)} x^l(k-i) - \sum_{i=1}^m a_i y(k-i), \quad (6)$$

что существенно упрощает решение задачи идентификации. Трудности, связанные с построением данного вида моделей традиционными методами, обусловили развитие альтернативного, нейросетевого, подхода к решению подобных задач. Так как с математической точки зрения задача идентификации представляет собой задачу аппроксимации некоторой в общем виде сложной нелинейной функции, для ее решения используются искусственные нейронные сети (ИНС), являющиеся, в первую очередь, хорошими аппроксиматорами. К числу наиболее популярных ИНС относятся радиально-базисные сети (РБС) [4, 5].

Однако наряду с рядом несомненных преимуществ по сравнению с традиционным нейросетевой подход обладает и таким существенным недостатком, как сложность интерпретации полученных результатов. В связи с этим актуальной является задача построения традиционных моделей, в частности, моделей Гаммерштейна, являющихся достаточно удобными в интерпретации, с помощью нейросетевых методов.

Целью данной работы является построение нелинейной модели Гаммерштейна с помощью РБС.

### 1. Реализация модели Гаммерштейна на основе радиально-базисной сети

Аппроксимируем статическую нелинейность модели Гаммерштейна  $\Phi(u)$  с помощью ИНС следующим образом:

$$\hat{x}(u) = \Phi(u) = w_1 f_1(u) + w_2 f_2(u) + \dots + w_q f_q(u) = w^T f(u), \quad (7)$$

где  $f_i(u)$  – выбранные базисные функции (БФ),  $i = \overline{1, q}$ . Выходной сигнал  $\hat{y}(k)$  модели, получающийся пропуском сигнала  $\hat{x}(u)$  через линейную динамическую систему и учитывающий запаздывание на  $m$  тактов, может быть представлен так:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^m h_i w^T f(u(k-i)) = w_1 \sum_{i=1}^m h_i f_1(u(k-i)) + w_2 \sum_{i=1}^m h_i f_2(u(k-i)) + w_q \sum_{i=1}^m h_i f_q(u(k-i)). \quad (8)$$

Сравнение (8) с выражением для ряда Вольтерра показывает, что полученное выражение не соответствует представлению в виде ряда Вольтерра. Однако важное преимущество модели в виде ряда Вольтерра – линейность относительно искомым параметров – остается. Если же БФ  $f_j(u(k-i))$ ,

$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, q}$  интерпретировать как входные сигналы модели, искомые параметры могут быть представлены аналогично ядрам Вольтерра первой степени. В этом случае введя обозначения

$$\tilde{w}_{1i} = w_1 h_i, \quad \tilde{w}_{2i} = w_2 h_i, \dots, \quad \tilde{w}_{qi} = w_q h_i,$$

получаем следующее соотношение, описывающее нейросетевую модель Гаммерштейна как нейросетевую модель Вольтерра:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^m \tilde{w}_{1i} f_1(u(k-i)) + \sum_{i=1}^m \tilde{w}_{2i} f_2(u(k-i)) + \dots + \sum_{i=1}^m \tilde{w}_{qi} f_q(u(k-i)) = \tilde{w}^T f(k), \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

где  $\tilde{w} = (\tilde{w}_1^T \tilde{w}_2^T \dots \tilde{w}_q^T)^T$  – вектор  $m q \times 1$ ;

$$\tilde{w}_i = (\tilde{w}_{i1} \tilde{w}_{i2} \dots \tilde{w}_{iq})^T \text{ – вектор } q \times 1;$$

$$f(k) = (f_1^T(k) f_2^T(k) \dots f_q^T(k))^T \text{ – вектор } m q \times 1;$$

$$f_i(k) = (f_i(u(k-1)) f_i(u(k-2)) \dots f_i(u(k-m)))^T \text{ – вектор } m \times 1.$$

Так как полученная модель (9) является линейной относительно неизвестных параметров, для обучения ИНС (оценивания параметров) может применяться, например, наиболее простой градиентный алгоритм, минимизирующий квадратичный функционал и имеющий вид

$$\hat{w}_i(k) = \hat{w}_i(k-1) - \gamma(k) e(k) \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \hat{w}_i}, \quad i = \overline{1, q}, \quad (10)$$

где  $\gamma$  – некоторый параметр, влияющий на скорость сходимости. При нейросетевой идентификации с использованием РБС с гауссовскими БФ и нормализованными  $\sigma$  с учетом того, что

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \hat{w}_i} = -e \frac{(u_i - c_j)^2}{2\sigma_{\text{норм}}^2 \Delta c}, \quad (11)$$

алгоритм (10) может быть записан так

$$\hat{w}_i(k) = \hat{w}_i(k-1) - \gamma(k) e(k) e \frac{(u_i - c_j)^2}{2\sigma_{\text{норм}}^2 \Delta c}. \quad (12)$$

Выбор оптимального значения  $\gamma(k)$ , обеспечивающего максимальную скорость процесса обучения, приводит к алгоритму Уидроу-Хоффа [4, 5]

$$\hat{w}_i(k) = \hat{w}_i(k-1) + \frac{y(k) - \hat{y}(k)}{\|f_i(u(k))\|^2} f_i(u(k)), \quad (13)$$

где  $f_i(u(k)) = e^{-(u_i - c_j)^2 / (2\sigma_{\text{норм}}^2 \Delta c)}$ .

Если в процессе обучения сети настраиваются все ее параметры (веса  $\hat{w}_i$ , центры  $\hat{c}_i$  и дисперсии  $\hat{\sigma}_i^2$ ) то введение вектора оценок этих параметров

$$\theta(k) = (\hat{w}_0(k), \hat{w}_1(k), \hat{c}_1(k), \hat{\sigma}_1(k), \dots, \hat{w}_m(k), \hat{c}_m(k), \hat{\sigma}_m(k))^T \quad (14)$$

позволяет записать градиентный алгоритм обучения, аналогичный (10)

$$\theta_i(k) = \theta_i(k-1) - \gamma(k)e(k) \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \theta_i}, \quad i = \overline{1, q}. \quad (15)$$

Алгоритм же (13) примет вид

$$\theta_i(k) = \theta_i(k-1) - \frac{y(k) - \hat{y}(k)}{\left\| \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \theta} \right\|^2} \cdot \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \theta_i}. \quad (16)$$

Развитием РБС является обобщенно-регрессионная сеть (ОРС), которая использует, в отличие от РБС, нормированные БФ [5]

$$f_i^H(u) = f_i(u) / \sum_{j=1}^m f_j(u). \quad (17)$$

Тот факт, что в ОРС  $\sum_{i=1}^m f_i^H(u) = 1$ , придает данной сети дополнительные положительные свойства.

Таким образом, если нейросетевая идентификация осуществляется на основе ОРС с гауссовскими БФ и нормализованными  $\sigma$ , то

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \hat{w}_i} = -e \frac{(u_i - c_j)^2}{2\sigma_{\text{норм}}^2 \Delta c} / \sum_{j=1}^m e \frac{(u_i - c_j)^2}{2\sigma_{\text{норм}}^2 \Delta c} \quad (18)$$

и в алгоритмах обучения вместо гауссовских БФ  $f_i(u(k))$  (17) будут стоять нормированные гауссовские БФ. Несложно видеть, что при выбранной степени нелинейности статической части модели, равной  $q$ , и использовании  $m$  БФ общее количество оцениваемых параметров будет равно  $m \cdot q$ , т.е. при больших значениях  $m$  и  $q$  количество подлежащих определению параметров достаточно велико, что существенно увеличивает длительность процесса обучения сети.

## 2. Моделирование процесса идентификации

Рассматривалась задача идентификации нелинейной модели Гаммерштейна со статической нелинейностью вида

$$\Phi(u) = 6,4 \arctg(10u) \quad (19)$$

и динамической линейной частью

$$w(s) = \frac{1}{30s^2 + 13s + 1}. \quad (20)$$

Входной сигнал  $u(k)$  представлял собой стационарную случайную последовательность с равномерным законом распределения в интервале  $[-1; 1]$ , генерируемую датчиком случайных чисел. Обучающий набор включал 5000 обучающих пар. Требуемая точность задавалась на уровне  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Результаты моделирования представлены на рис. 1 – 5.

Рис. 1 – 2 отражают результаты аппроксимации

функции (19) с помощью РБС и ОРС в зависимости от выбора различных дисперсий гауссовских функций при обучении только весовых параметров сетей. Центры же и радиусы БФ не настраивались. Количество БФ принималось равным 11. Вектор центров БФ имел вид  $c = (-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5)^T$ .

Вектор весовых коэффициентов настраивался по алгоритмам (13) и (16). Рисунки «а» соответствуют применению РБС, а рисунки «б» – ОРС. На рисунках справа показаны соответствующие БФ, на левых рисунках – результаты аппроксимации. Как следует из результатов моделирования, даже в случае задания минимальной дисперсии  $\sigma$  равной 0,1, ошибка восстановления нелинейной функции (19) с помощью ОРС значительно меньше ошибки, возникающей при использовании РБС. Увеличение дисперсий гауссовских БФ приводит к повышению точности аппроксимации.

На рис. 3 отражены результаты аппроксимации функции (19) при настройке всех параметров сетей:  $w, c, \sigma^2$ . В этом случае количество БФ также принималось равным 11, а настройка параметров определялась по алгоритмам (16). За заданное количество обучающих пар обе сети достигли требуемой точности аппроксимации. Рис. 4 отражает результаты оценивания линейных параметров динамической части модели. Графики изменения оценок, получаемых с помощью РБС и ОРС, практически идентичны. На рис. 5 показаны графики ошибок идентификации нелинейного динамического объекта (19) – (20) после обучения всех параметров сетей. Из этих графиков видно, что с ростом времени идентификации (обучения) ошибка уменьшается и достигает заданного значения. При этом ошибка, обеспечиваемая применением ОРС (рис. 5) меньше ошибки, достигаемой применением РБС (рис. 6), за счет более точного определения статической нелинейности.

## Заключение

Результаты исследования подтвердили эффективность применения сетей радиально-базисного типа для построения нелинейной модели Гаммерштейна. Применение ОРС даже при настройке только весовых параметров сети обеспечивает получение приемлемых результатов. Настройка же всех параметров сетей позволяет существенно повысить точность решения задачи идентификации, значительно увеличивая при этом время обучения.

Так как применение ОРС для идентификации в реальном времени затруднено вследствие необходимости пересчета всех БФ при введении новых БФ, предоставляется необходимым развитие подхода, способствующего применению этих сетей в реальном времени, например, путем распараллеливания вычислений.

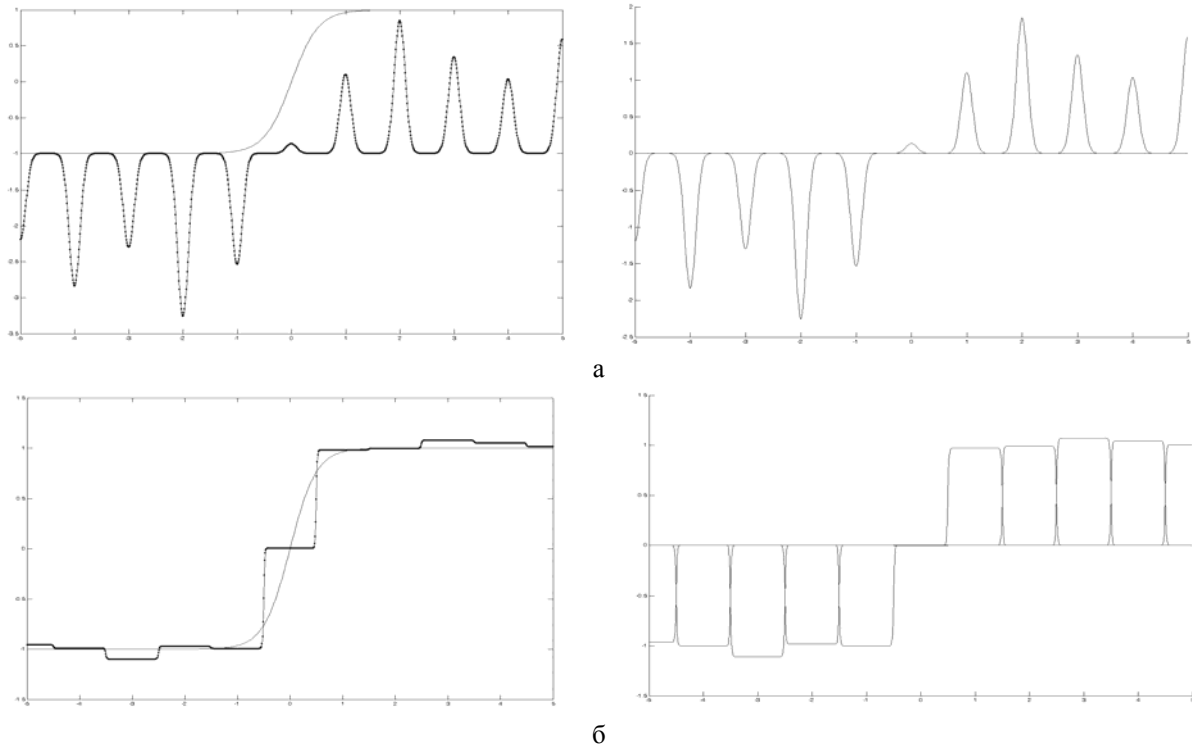


Рис. 1. Результати аппроксимации при  $\sigma = 0,1$

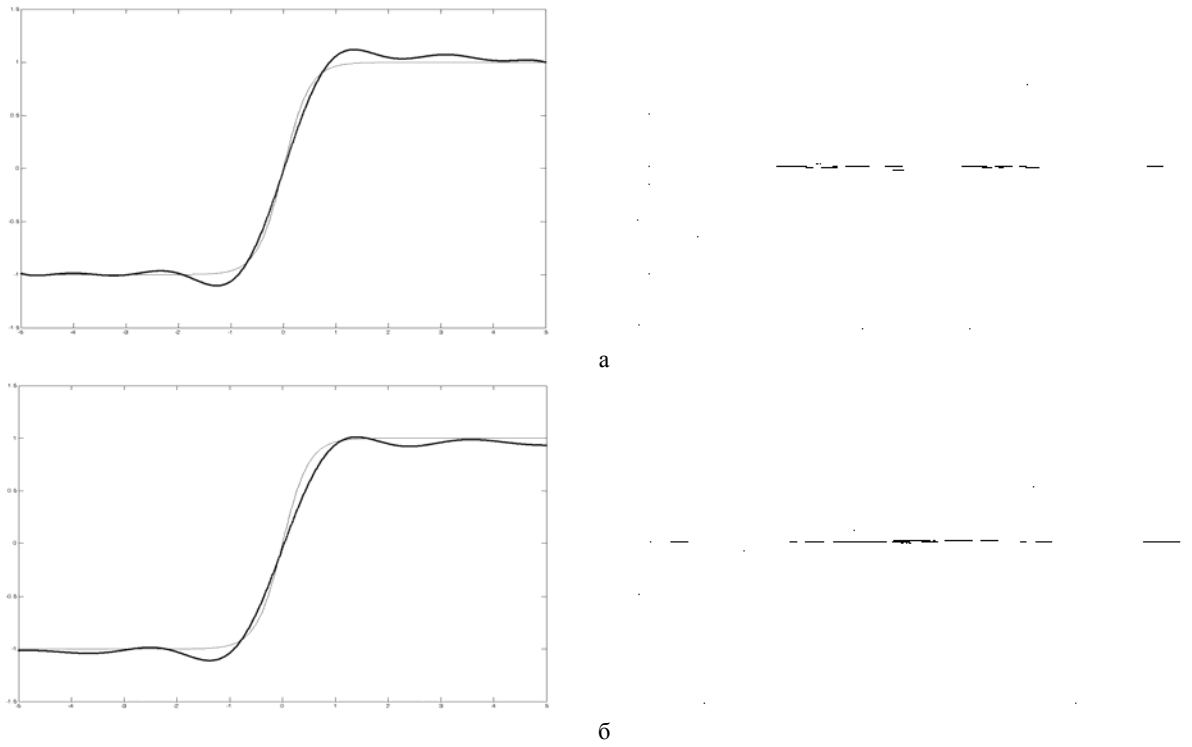
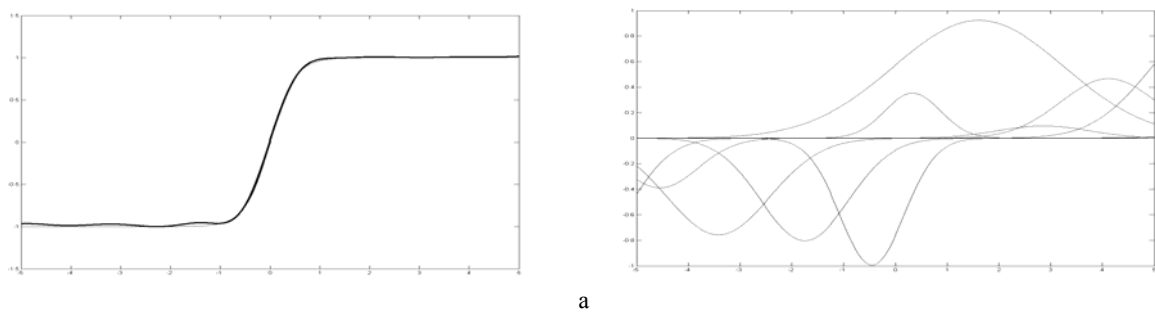


Рис. 2. Результати аппроксимации при  $\sigma = 1$



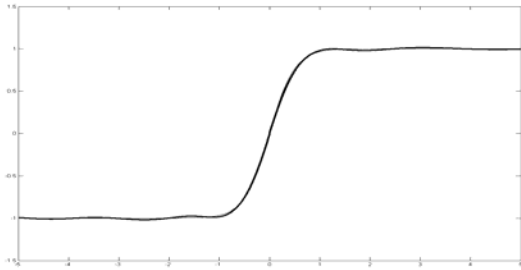


Рис. 3. Результаты аппроксимации при настройке всех параметров

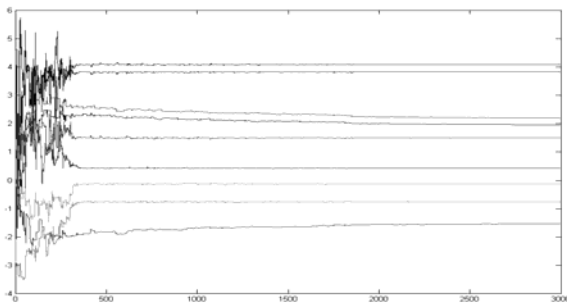


Рис. 4. Настройка параметров линейной части модели

б

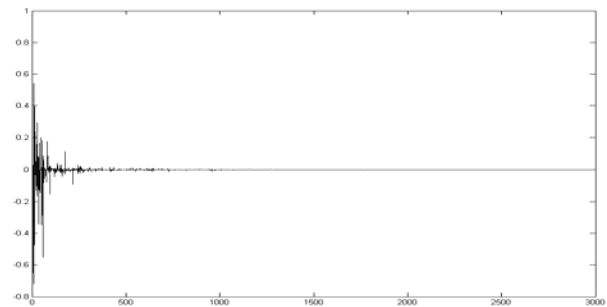


Рис. 5. График изменения ошибки идентификации (применение OPC)

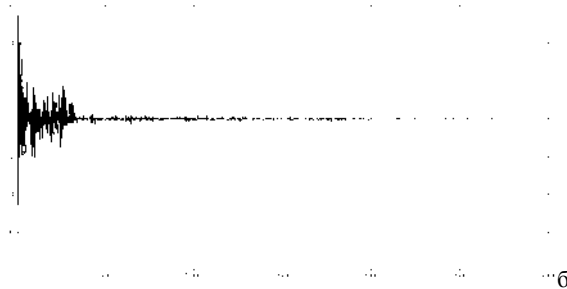


Рис. 5. Графики изменения ошибки идентификации (применение РБС)

б

2. Nelles O. *Nonlinear System identification*. – Berlin: Springer Verlag, 2001. – 785 p.

3. Chaoui F.Z., Giri F., Rochdi Y., Halona M., Naitali A. *System identification based of Hammerstein model*//Int. J. control. – 2005. – V. 78. – N 6. – P. 430-442.

4. Оссовский С. *Нейронные сети для обработки информации*. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.

5. Руденко О.Г., Бодянский Е.В. *Искусственные нейронные сети*. – Х.: ООО «Компания СМИТ», 2005. – 408 с.

Поступила в редколлегию 21.02.2008

### Список литературы

1. Эйкофф П. *Основы идентификации систем управления*. – М.: Мир, 1975. – 683 с.

**Рецензент:** д-р. техн. наук, проф. О.Г. Руденко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

### ПОБУДОВА МОДЕЛІ ГАММЕРШТЕЙНА ЗА ДОПОМОГОЮ РАДІАЛЬНО-БАЗИСНОЇ МЕРЕЖІ

С.О. Ляшенко, Т.С. Сакало

Розглядається нейромережевий підхід до побудови нелінійної динамічної моделі Гаммерштейна. Результати дослідження підтвердили ефективність застосування мереж радіально-базисного типу для побудови нелінійної моделі Гаммерштейна. Застосування узагальнено-регресійної мережі навіть при настройці тільки вагових параметрів мережі забезпечує отримання прийнятних результатів. Настройка ж всіх параметрів мережі дозволяє істотно підвищити точність рішення задачі ідентифікації, значно збільшуючи при цьому час навчання.

**Ключові слова:** ІНС, модель Гаммерштейна, радіально-базисна мережа, моделювання процесу ідентифікації

### CONSTRUCTION OF MODEL GAMMERSHTEYNA BY RADIALLY-BASE NETWORK

S.A. Lyashenko, T.S. Sakalo

The neuronet going is examined near the construction of nonlinear dynamic model of Gammershteyna. Research results confirmed efficiency of application of networks of radially-base type for the construction of nonlinear model of Gammershteyna. Application of generalized-regressive network even at tuning only of gravimetric parameters of network provides the receipt of acceptable results. Tuning of all of parameters of networks allows substantially to promote exactness of decision of task of authentication, considerably increasing teaching time here.

**Keywords:** INS, model of Gammershteyna, radially-base network, design of process of authentication.