УДК 531.534

О.О. Юрченко

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

ЗГИНАЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З ВЕЛИКОЮ КІЛЬКІСТЮ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ

Стаття присвячена розвитку методів дослідження коливань пружних механічних систем, розрахункову модель яких можна уявити як дискретну систему з великою кількістю ступенів вільності. Розглядається задача побудови рекурентних залежностей для вивчення згинальних коливань лінійних пружних систем на основі методу кінцевих елементів (МКЕ). Цей метод вміщує як ідею дискретизації, так і спосіб розв'язання поставленої задачі вимушених коливань. Він може з успіхом використовуватися для розрахунку параметрів руху вимушених коливань багатьох авіаційних конструкцій: крила, оперення, валів.

Ключові слова: коливання, лінійна дискретна система, пружна системи, метод кінцевих елементів.

Вступ

Постановка проблеми та аналіз літератури. У роботі [1] вивчались крутильні коливання механічних систем з великою кількістю ступенів вільності, в яких зв′язність системи здійснювалась за допомогою узагальнених координат.

Розглянемо задачу побудови рекурентних залежностей для вивчення згинальних коливань лінійних пружніх систем на основі методу кінцевих елементів (МКЕ). Цей метод вміщує як ідею дискретизації, так і спосіб розв′язання поставленої задачі вимушених коливань.

Крило літака не є абсолютно жорсткою конструкцією, воно має певну пружність і його можна порівняти з пружньою консольною балкою.

У реальних умовах деякі конструкції літальних апаратів, механізмів та їх елементів можна розглядати як дискретні моделі [2], які мають велику кількість ступенів вільності і здійснюють згинальні коливання.

До таких моделей можна звести багато інженерних задач, які пов’язані з розрахунками силових елементів літака, валів, повітряних гвинтів та інші.

Основна частина

Для простоти розрахункової схеми будемо вважати, що крило жорстко пов’язане з елероном. Розглянемо окремо чисто згинальні коливання, як коливання прямолінійної балки довільного поперечного перерізу (рис. 1).

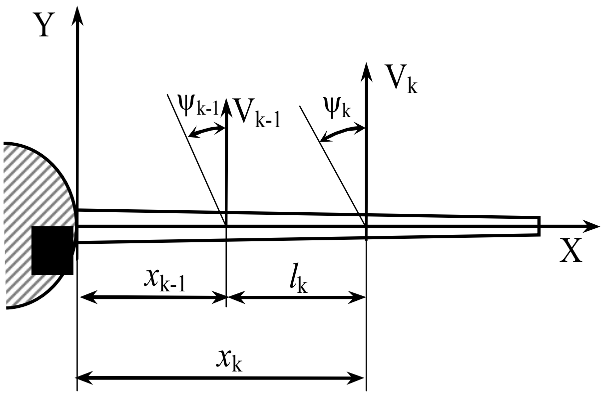

Рис. 1. Розрахункова схема

Зв’язність таких коливань дорівнює S = 2, бо в будь-якому перерізі буде вертикальні переміщення Vk вздовж вертикальної осі і кут обертання перерізу ψk. Мінімізований функціонал, якщо відсутній опір і можна знехтувати інерцією обертання, має вигляд

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/p}\int_0^{\ell}\left[G(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - EI(x)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + f(x,t)y\right]dxdt, \qquad (1)$$

де G(x); EI(x) – погонна маса і згинальна жорсткість, відповідно.

Як і раніше [1], приймаємо:

$$f(x,t) = q(x)\sin pt;$$

$$y(x,t) = U(x)\sin pt.$$

Підставляючи ці вирази до формули (1) та інтегруючи за періодом, отримаємо

$$\tilde{S} = \frac{2S}{\pi p} = \int_0^{\ell} G(x)u^2(x)dx - \frac{1}{p^2}\int_0^{\ell} EI(x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx + \frac{1}{p^2}\int_0^{\ell} q(x)u(x)dx. \qquad (2)$$

У формулі (2) тепер маємо

$$q^k = \{V_{k-1}, \psi_{k-1}, V_k, \psi_k\}.$$

В отриманому раніше [1] виразі

$$q^k = \left\{q_{11}^k,\ q_{12}^k,\ \ldots,\ q_{1S}^k,\ q_{22}^k,\ \ldots,\ q_{2S}^k\right\}$$

тепер будемо мати

$$q^k = \{V_{k-1}, \psi_{k-1}, V_k, \psi_k\}.$$

Тоді відоме співвідношення

$$U^k(x) = U_{11}^k(x)q_{11}^k + U_{12}^k(x)q_{12}^k + U_{21}^k(x)q_{21}^k + U_{22}^k(x)q_{22}^k.$$

Можна переписати більш детальнише таким чином

$$U^k(x) = U_{11}^k(x)V_{k-1} + U_{12}^k(x)\psi_{k-1} + U_{21}^k(x)V_{k-1} + U_{22}^k(x)\psi_k.$$

При підбиранні інтерполюючих поліномів будемо враховувати, що похідні від $U^k(x)$ у вузлових точках повинні дорівнювати ψ_{k-1} і ψ_k відповідно, а переміщення повинні задовольняти умовам

$$U^k(0) = V_k,\quad U^k(\ell_k) = V_k.$$

Розглянутим умовам задовольняють такі поліноми

$$U_{11}^k(x) = \frac{2x^3 - 3\ell_k x^2 + \ell_k^3}{\ell_k^3};$$

$$U_{12}^k(x) = \frac{x^3 - 3\ell_k x^2 + \ell_k^2 x}{\ell_k^2};$$

$$U_{21}^k(x) = \frac{2x^3 - 3\ell_k x^2}{\ell_k^3};$$

$$U_{22}^k(x) = \frac{x^3 - \ell_k x^2}{\ell_k^2}.$$

Визначаючи кожну функцію $U^k(x)$ в межах елемента $x_{k-1} \le x \le x_k$ в загальній системі координат і вважаючи, що вона дорівнює нулю за межами кінцевого елементу, можна записати

$$U(x) = \sum_{k-1}^{N}\Big(U_{11}^k(x)V_{k-1} + U_{12}^k(x)\psi_{k-1} + U_{21}^k(x)V_k + U_{22}^k(x)\psi_k\Big). \qquad (3)$$

Після підстановки цього виразу у формулу (2) і проведення необхідних перетворень, отримаємо:

$$\tilde{S}=\sum_{k-1}^{N}\left\{\int_{0}^{\ell}G^{k}(x)\left[V_{k-1}U_{11}^{k}(x)+\psi_{k-1}U_{12}^{k}(x)+V_{k}U_{21}^{k}(x)+\psi_{k}U_{22}^{k}(x)\right]^{2}dx-\right.$$

$$-\frac{E}{p^{2}}\int_{0}^{\ell_k}I_{k}(x)\left[V_{k-1}\frac{\partial^{2}U_{11}^{k}}{\partial x^{2}}+\psi_{k-1}\frac{\partial^{2}U_{12}^{k}}{\partial x^{2}}+V_{k}\frac{\partial^{2}U_{21}^{k}}{\partial x^{2}}+\psi_{k}\frac{\partial^{2}U_{22}^{k}}{\partial x^{2}}\right]^{2}dx+$$

$$\left.+\frac{1}{p^{2}}\int_{0}^{\ell_k}q^{k}(x)\left[V_{k-1}U_{11}^{k}(x)+\psi_{k-1}U_{12}^{k}(x)+V_{k}U_{21}^{k}(x)+\psi_{k}U_{22}^{k}(x)\right]^{2}dx\right\}.$$

Тепер задача зводиться до мінімізації функції $\tilde{S}$ багатьох змінних V_1, ψ_1, V_2, ψ_2, …, V_n, ψ_n, яка, в свою чергу, зводиться до того, щоб прирівняти до нуля похідні за всіма цими величинами.

Відповідні формули громіздкі, але досить прості, тому їх не записуємо. Отримання коефцієнтів, як і для крутильних коливань, принципових труднощів не викликає.

Висновок

Із проведених досліджень можно зробити висновок: порівняння розглянутого методу з методом динамічних жорсткостей [3] показує, що за кількістю арифметичних операцій вони відрізняються мало, але кожний з них має перевагу або недоліки в залежності від того, яка механічна система розглядається.

Так, суттєвим недоліком методу динамічних жорсткостей є наявність операції перетворювання матриць, і те, що частотне рівняння містить функцію з вертикальними асимптотами.

Перевагою МКЕ є можливість автоматичної дискретизації практично будь-яких розподілених систем.

Список літератури

1. Юрченко О.О. Особливості розрахунку лінійних дискретних систем з великою кількістю ступенів свободи // Системи озброєння і військова техніка. – 2006. – Вип. 3(7). – С. 83-85.

2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Высш. шк., 1959. – 439 с.

3. Юрченко О.О. Деякі питання вивчення руху коливальних систем з великою кількістю ступенів свободи // Збірник наукових праць ХУ ПС. – Х.: ХУПС, 2005. – Вип. 2.(2). – С. 43-44.

Надійшла до редколегії 6.02.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Х.В. Раковський, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

ИЗГИБИСТЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ СТЕПЕНЕЙ ВОЛЬНОСТИ

О.А. Юрченко

Статья посвящена развитию методов исследования колебаний упругих механических систем, расчетную модель которых можно представить как дискретную систему с большим количеством степеней вольности. Рассматривается задача построения рекуррентных зависимостей для изучения изгибистых колебаний линейных упругих систем на основе метода конечных элементов (МКЕ). Этот метод вмещает как идею дискретизации, так и способ решения поставленной задачи вынужденных колебаний. Он может с успехом использоваться для расчета параметров движения вынужденных колебаний многих авиационных конструкций: крыла, оперения, валов.

Ключевые слова: колебание, линейная дискретная система, упругая система, метод конечных элементов.

BEND VIBRATIONS OF THE LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH PLENTY OF DEGREES OF LIBERTY

O.A. Yurchenko

The article is devoted development of methods of research of vibrations of the resilient mechanical systems the calculation model of which can be presented as a discrete system with plenty of degrees of liberty. The task of construction of recurrent dependences is examined for the study of bend vibrations of the linear resilient systems on the basis of method of eventual elements (MKE). This method contains both the idea of дискретизации and method of decision of the put task of the forced vibrations. He can with success be utillized for the calculation of parameters of motion of the forced vibrations of many aviation constructions: covered, plumage, billows.

Keywords: oscillation, linear discrete systems, linear resilient systems, method of eventual elements.