УДК 519.876.5

В.І. Грабчак, В.М. Супрун, А.О. Вакал, В.М. Петренко

Науковий центр бойового застосування РВіА Сумського державного університету

УЗАГАЛЬНЕННЯ АНАЛІТИЧНОЇ МОДЕЛІ БОЮ ДЛЯ РІЗНОРІДНИХ ПРОТИДІЮЧИХ УГРУПУВАНЬ

Проведено узагальнення аналітичної моделі бойових дій для різнорідних угрупувань, коли складові правої частини диференціальних рівнянь Ланчестера (ефективні скорострільності) розглядаються як функції часу. Запропонована аналітична модель бою, що описує динаміку бойових дій між двома угрупуваннями з різнорідними бойовими засобами. Отримано аналітичні вирази, які дозволяють спрогнозувати наслідок бою між угрупуваннями, до складу яких входять різнорідні бойові засоби, знаходити середні чисельності бойових одиниць протидіючих сторін, що збереглись, на будь який момент часу ведення бою, дати якісну оцінку сил протидіючих угрупувань.

Ключові слова: *різнорідні угрупування, рівняння Ланчестера, середні чисельності бойових засобів, середня скорострільність та ймовірність ураження бойових одиниць, коефіцієнти цілерозподілу.*

Вступ

Постановка проблеми у загальному вигляді та аналіз літератури. Широке розповсюдження моделювання бойових дій між протидіючими угрупуваннями отримали аналітичні моделі. За допомогою цих моделей визначають основні параметри, які характеризують динаміку бойових дій: прогнозування результату бою на його початкових стадіях, середні чисельності бойових засобів кожної з протидіючих сторін на момент часу t ведення бою та їх витрат, побудова і щільність бойових порядків. При побудові аналітичних моделей бою досить часто використовують метод динаміки середніх [1,2,3]. У найпростішому випадку двосторонній бій між протидіючими угрупуваннями описується аналітичною моделлю у вигляді системи диференціальних рівнянь Ланчестера [1 – 4]. Ці моделі хоча і не враховують цілий ряд важливих факторів, які супроводжують бій (наприклад, бойові порядки та тактику ведення бойових дій протидіючих сторін, рельєф місцевості, умови спостереження і ін.), але дають можливість прогнозувати наслідок бою і оцінювати співвідношення сил протидіючих сторін.

В роботі [5] розглянуто узагальнення аналітичної моделі бойових дій однорідних угрупувань для випадку, коли складові правої частини рівнянь Ланчестера (ефективні скорострільності) розглядаються як функції часу. Отримані аналітичні залежності дозволяють розрахувати середні чисельності бойових одиниць протидіючих сторін, що збереглись на будь-який момент часу t ведення бою.

В той же час, суттєвим недоліком цих моделей є умова однорідності бойових засобів протидіючих сторін.

Ця умова [1] обмежує їх застосування для моделювання бойових дій різнорідних угрупувань, двохсторонній бій яких в реальних умовах є найбільш типовим. Застосування цих моделей для дослідження бойових дій різнорідних угрупувань шляхом зведення цих засобів через їх коефіцієнти ефективності до еквівалентних однорідних засобів може призвести до хибних висновків.

Метою статті є узагальнення аналітичної моделі ведення бою, між двома угрупуваннями з різнорідними бойовими засобами для випадку, коли складові правої частини диференціальних рівнянь Ланчестера (ефективні скорострільності) розглядаються як функції часу; отримання аналітичних залежностей, які дозволяють спрогнозувати наслідок бою між угрупуваннями, до складу яких входять різнорідні бойові засоби, знаходити середні чисельності бойових одиниць протидіючих сторін, що збереглись, на будь-який момент часу ведення бою.

Основна частина

Розглянемо аналітичну модель, яка описує процес динаміки бою між двома протидіючими угрупуваннями S_1 і S_2.

Угрупування S_1 має у своєму складі N_1 і N_2 різнорідних бойових одиниць, до складу угрупування S_2 входять N_3 однорідних бойових одиниць.

Позначимо через λ_i ($i = 1,2,\ldots$) середню скорострільність бойових одиниць, які входять відповідно до складу N_i ($i = 1,2,\ldots$), p_i ($i = 1,2,\ldots$) – імовірність ураження одним пострілом бойової одиниці відповідно сторін S_1 і S_2. для визначеності покладемо, що угрупування S_2 веде наступ на оборонні позиції S_1.

Окрім цього будемо дотримуватися форми організації ведення бою, яка відповідає моделі бою А [2, 3], тоді опис вогневого впливу однієї сторони на іншу відбувається за схемою, яка наведена на рис. 1.

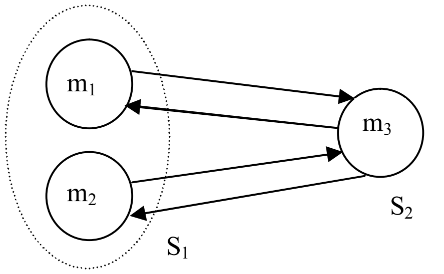

Рис. 1. Схема вогневого впливу сторін S_1 і S_2

Дотримуючись тепер підходу, наведеному у [2,3], легко показати, що аналітичною моделлю, яка описує процес динаміки бою між протидіючими угрупуваннями S_1 і S_2, є наступна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1}{dt} = -\Lambda_3\alpha_{31}m_3; \\ \dfrac{dm_2}{dt} = -\Lambda_4\alpha_{32}m_3; \\ \dfrac{dm_3}{dt} = -\Lambda_1 m_1 - \Lambda_2 m_2, \end{cases} \qquad (1)$$

де $\Lambda_1 = \lambda_i\, p_i$, $\Lambda_2 = \lambda_2\, p_2$ – ефективні скорострільності сторони S_1; $\Lambda_3 = \lambda_3\, p_3$, $\Lambda_4 = \lambda_4\, p_4$ – ефективні скорострільності сторони S_2; m_1, m_2, m_3 – середні чисельності бойових одиниць відповідно сторін S_1 і $S_{2,}$ що збереглись на момент часу t ведення бою; α_{31}, α_{32} – коефіцієнти цілерозподілу (частка бойових одиниць сторони S_2, які виділяються для ураження цілей із складу N_1 і N_2 сторони S_1 з урахуванням їх важливості на момент часу t).

У випадку, коли ефективності скорострільності Λ_i (i =1,2,3,4) та коефіцієнти α_{31}, α_{32}, що входять в (1), Є постійнИМИ величинАМИ, система лінійних диференціальних рівнянь (1), згідно з [6], має розв’язок у явному вигляді.

У випадку, коли ефективності скорострільності Λ_i (i = 1,2,3,4) та коефіцієнти α_{31}, α_{32}, розглядаються як функції часу, то розв’язок системи (1) знайдемо, скориставшись перетворенням Лапласа [4] і початковими умовами:

$$m_1(0) = N_1;$$
$$m_2(0) = N_2;$$
$$m_3(0) = N_3 \text{ при } t = 0.$$

Позначимо зображення середніх чисельностей $m_i(t)$ через $m_i(S)$ (i =1,2,3).

Тоді з (1) отримуємо ТАКУсистему алгебраїчних рівнянь відносно зображень для середніх чисельностей:

$$\begin{cases} Sm_1(S) - N_1 = -\Lambda_3\alpha_{31}m_3(S); \\ Sm_2(S) - N_2 = -\Lambda_4\alpha_{32}m_3(S); \\ Sm_3(S) - N_3 = -\Lambda_1 m_1(S) - \Lambda_2 m_2(S), \end{cases} \qquad (2)$$

звідки отримуємо:

$$m_1(S) =$$
$$= \frac{N_1S^2 - \alpha_{31}N_3\Lambda_3S + \alpha_{31}N_2\Lambda_2\Lambda_3 - \alpha_{32}N_1\Lambda_2\Lambda_4}{S\left[S^2 - (\Lambda_1\Lambda_3\alpha_{31} + \Lambda_2\Lambda_4\alpha_{32}\right]};$$

$$m_2(S) =$$
$$= \frac{N_2S^2 - \alpha_{32}N_3\Lambda_4S + \alpha_{32}N_1\Lambda_1\Lambda_4 - \alpha_{31}N_2\Lambda_1\Lambda_3}{S\left[S^2 - (\Lambda_1\Lambda_3\alpha_{31} + \Lambda_2\Lambda_4\alpha_{32})\right]};$$

$$m_3(S) = \frac{N_3S - (N_1\Lambda_1 + N_2\Lambda_2)}{S^2 - (\Lambda_1\Lambda_3\alpha_{31} + \Lambda_2\Lambda_4\alpha_{32})}. \qquad (3)$$

Покладемо

$$\Lambda_1\Lambda_3\alpha_{31} + \Lambda_2\Lambda_4\alpha_{32} = K^2$$

і перейдемо в (3) до оригіналів [7], в результаті отримуємо частинний розв’язок системи диференціальних рівнянь (1) у явному вигляді:

$$\begin{cases} m_1(t) = N_1 \mathrm{ch}kt - \dfrac{N_3\Lambda_3\alpha_{31}}{k}\mathrm{sh}kt + \\ + \dfrac{N_2\Lambda_3\Lambda_2\alpha_{31} - N_1\Lambda_4\Lambda_2\alpha_{32}}{k^2}(\mathrm{ch}kt - 1); \\ m_2(t) = N_2 \mathrm{ch}kt - \dfrac{N_3\Lambda_4\alpha_{32}}{k}\mathrm{sh}kt + \\ + \dfrac{N_1\Lambda_1\Lambda_4\alpha_{32} - N_2\Lambda_1\Lambda_3\alpha_{31}}{k^2}(\mathrm{ch}kt - 1); \\ m_3(t) = N_3 \mathrm{ch}kt - \dfrac{N_1\Lambda_1 + N_2\Lambda_2}{k}\mathrm{sh}kt, \end{cases} \qquad (4)$$

де – $\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ – гіперболічні функції.

Аналітична модель бойових дій (1) і отримані співвідношення (4) дозволяють спрогнозувати наслідок бою між угрупуваннями S_1 і S_2, до складу яких входять різнорідні бойові засоби, знаходити середні чисельності m_1 і m_2 протидіючих сторін на момент часу t ведення бою.

Очевидно також, що показники ефективності бойових засобів залежать від багатьох факторів. Так, наприклад, імовірність ураження цілі є функцією дальності стрільби, тобто $p = p_i(D)$ (i = 1,2,3,4), яка в свою чергу залежить від того, з якою швидкістю веде наступ угрупування S_2. На відміну від (1) будемо розглядати вказані імовірності як функції часу, скориставшись очевидним співвідношенням

$$p_i(t) = p_i\left(\frac{D_{max} - D_ц}{V_ц}\right), \text{ (i = 1,2,3,4)},$$

де D_{max} – максимальна дальність, з якої розпочинається ураження цілі; $D_ц$ – дальність до цілі; $V_ц$ – середня швидкість цілі у наступі.

Тоді узагальненням моделі (1) буде модель такого вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1}{dt} = -\omega(t)m_3, \\ \dfrac{dm_2}{dt} = -\alpha(t)m_3, \\ \dfrac{dm_3}{dt} = -S(t)m_1 - \beta(t)m_2, \end{cases} \quad (5)$$

де $\omega(t) = \lambda_3\alpha_{31}p_3(t)$;

$$\alpha(t) = \lambda_3\alpha_{32}p_4(t);$$

$$S(t) = \lambda_1 p_1(t);$$

$$\beta(t) = \lambda_2 p_2(t).$$

Відмітимо для подальшого, що коефіцієнти системи (5), як правило, нелінійні функції, але у випадку, коли функції ω(t), α(t), S(t) і p(t) можна розкласти за степенями t у збіжні ряди, то [6] існує єдиний розв'язок системи диференціальних рівнянь (5)

$$m_1 = m_1(t),\; m_2 = m_2(t),\; m_3 = m_3(t), \quad (6)$$

який при t = 0 задовольняє початковим умовам:

$$m_1(0) = N_1,\; m_2(0) = N_2,\; m_3(0) = N_3. \quad (7)$$

Розв'язок (6), згідно теореми Коші [6], розкладається в ряди за степенями t:

$$\begin{cases} m_1(t) = N_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k^{(1)} t^k, \\ m_2(t) = N_2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k^{(2)} t^k, \\ m_3(t) = N_3 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k^{(3)} t^k, \end{cases} \quad (8)$$

які будуть збіжними в тій самій області, в якій збігаються ряди для системи диференціальних рівнянь (5), що узагальнює модель (1).

Враховуючи початкові умови (6), розв'язок (5) будемо шукати у вигляді (8). Підставимо (8) у (5), отримаємо

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} kS_k^{(1)} t^{k-1} = -\omega(t)\left(N_3 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k^{(3)} t^k\right), \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} kS_k^{(2)} t^{k-1} = -\alpha(t)\left(N_3 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k^{(3)} t^k\right), \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} kS_k^{(3)} t^{k-1} = -S(t)\left(N_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k^{(1)} t^k\right) \times \\ \qquad \times \beta(t)\left(N_2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k^{(2)} t^k\right). \end{cases} \quad (9)$$

Послідовно диференціюючи почленно кожне з рівнянь (9) і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при степенях $t^к$, (к = 1,2,...), приходимо до такої рекурентної системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів $S_к^{(1)}$, $S_к^{(2)}$, $S_к^{(3)}$, (к = 1,2,...), що входять в (8):

$$\begin{cases} S_1^{(1)} = -\omega(0)N_3, \\ S_1^{(2)} = -\alpha(0)N_3, \\ S_1^{(3)} = -S(0)N_1 - \beta(0)N_2, \\ 2!S_2^{(1)} = -\omega'(0)N_3 - \omega(0)S_1^{(3)}, \\ 2!S_2^{(2)} = -\alpha'(0)N_3 - \alpha(0)S_1^{(3)}, \\ 2!S_2^{(3)} = -S'(0)N_1 - S(0)S_1^{(1)} - \beta'(0)N_2 - \beta(0)S_1^{(2)}, \\ 3!S_3^{(1)} = -\omega''(0)N_3 - 2\omega'(0)S_1^{(3)} - 2\omega(0)S_2^{(3)}, \\ 3!S_3^{(2)} = -\alpha''(0)N_3 - 2\alpha'(0)S_1^{(3)} - 2\alpha(0)S_2^{(3)}, \\ 3!S_3^{(3)} = -S''(0)N_1 - 2S'(0)S_1^{(1)} - 2S(0)S_2^{(1)} - \\ \quad -\beta''(0)N_2 - 2\beta'(0)S_1^{(2)} - 2\beta(0)S_2^{(2)}, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\,. \end{cases} \quad (10)$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в (8), та остаточно записуємо розв'язок системи диференціальних рівнянь (5), тобто

$$\begin{aligned} m_1(t) = {} & N_1 - \omega(0)N_3 t + \\ & + \left[-\omega'(0)N_3 + \omega(0)S(0)N_1 + \omega(0)\beta(0)N_2\right]\frac{t^2}{2!} + \\ & + \Big\{ -\omega''(0)N_2 + \left[2\omega'(0)S(0) + \omega(0)S'(0)\right]N_1 + \\ & + \left[2\omega'(0)\beta(0) + \omega(0)\beta'(0)\right]N_2 - \\ & - \left[\omega^2(0)S(0) + \omega(0)\beta(0)\alpha(0)\right]N_3 \Big\}\frac{t^3}{3!} + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2(t) = {} & N_2 - \alpha(0)N_3 t + \\ & + \left[-\alpha'(0)N_3 + \alpha(0)S(0)N_1 + \alpha(0)\beta(0)N_2\right]\frac{t^2}{2!} + \\ & + \Big\{ -\alpha''(0)N_3 + \left[2\alpha'(0)S(0) + \alpha(0)S'(0)\right]N_1 + \\ & + \left[2\alpha'(0)\beta(0) + \alpha(0)\beta'(0)\right]N_2 - \\ & - \left[\alpha(0)S(0)\omega(0) + \alpha^2(0)\beta(0)\right]N_3 \Big\}\frac{t^3}{3!} + \ldots, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} m_3(t) = {} & N_3 - S(0)N_1 t - \beta(0)N_2 t + \\ & + \left\{ \begin{aligned} & -S'(0)N_1 - \beta'(0)N_2 + \\ & + \left[S(0)\omega(0) + \beta(0)\alpha(0)\right]N_3 \end{aligned} \right\} \cdot \frac{t^2}{2!} + \\ & + \Big\{ \left[S''(0) + S^2(0)\omega(0) + \alpha(0)S(0)\beta(0)\right]N_1 - \\ & - \left[S''(0) + S^2(0)\omega(0) + \alpha(0)S(0)\beta(0)\right]N_1 - \end{aligned}$$

$$-\Big[\beta''(0)+\beta^2(0)\alpha(0)+\alpha(0)\beta(0)\omega(0)\Big]N_2 +$$

$$+\Big[\quad \beta(0)\alpha'(0)+S(0)\omega'(0)+2S'(0)\omega(0)+$$

$$+2\beta'(0)\alpha(0)\quad\Big]N_3\quad\Big\}\frac{t^3}{3!}+\ldots .$$

Очевидно, що з отриманого розв’язку системи диференціальних рівнянь (5) випливає розв’язок системи (4).

Для цього достатньо врахувати, що коефіцієнти в (1) є постійними величинами і покласти рівними нулю такі похідні:

$$\omega'(0),\ \omega''(0),$$

$$\alpha'(0),\ \alpha''(0),$$

$$S'(0),\ S''(0),$$

$$\beta'(0),\ \beta''(0),$$

скористатись розкладом в степеневий ряд функції shx і chx та виконати відповідні перетворення.

Висновки

Таким чином, наведена аналітична модель бою у вигляді системи диференціальних рівнянь (5) описує динаміку бойових дій між двома угрупуваннями з різнорідними бойовими засобами. Вона узагальнює модель (1) і дає можливість визначити середні чисельності бойових одиниць сторін S_1 і S_2, що збереглись на будь-який момент часу t ведення бою, якісно спрогнозувати наслідок бойових дій та дати оцінку сил протидіючих угрупувань.

Список літератури

1. *Алексеев О.Г., Гершелис Г.Г., Володусь И.Ф., Есаулов С.С. Управление в системах РАВ (ч.I). – Л. ЛАА., 1980. – 368 с.*
2. *Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. Радио, 1972. – 551 с.*
3. *Нещадим М.І., Колесніков В.О., Мазуренко В.О., Супрун В.М. Основи управління та прийняття рішень у військовій справі. – С.: Слобожанщина, 2000. – 376 с.*
4. *Мартыненко В.С. Операционное исчисление. – К.: Вища школа, 1973. – 268 с.*
5. *Супрун В.М., Грабчак В.І. Узагальнення аналітичної моделі бою для однорідних угрупувань // Системи управління, навігації та зв’язку. – К.: ЦНДІ НіУ, 2008. – Вип. 1 (5). – С. 97-99.*
6. *Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физмат. лит., 1959. – 468 с.*
7. *Макаров И.М., Менский Б.М. Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных z-преобразований. – М.: Высш. шк., 1978. – 247 с.*

Надійшла до редколегії 9.06.2008

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. С.В. Смеляков, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БОЯ ДЛЯ РАЗНОРОДНИХ ПРОТИВОДЕЙСТВУЮЩИХ ГРУППИРОВОК

В.И. Грабчак, В.Н. Супрун, А.А. Вакал, В.Н. Петренко

Проведено обобщение аналитической модели боевых действий для разнородных группировок, когда составляющие правой части дифференциальных уравнений Ланчестера (эффективные скорострельности) рассматриваются как функции времени. Предложена аналитическая модель боя, описывающая динамику боевых действий между двумя группировками с разнородными боевыми средствами. Получены аналитические выражения позволяющие спрогнозировать последствия боя между группировками, в состав которых входят разнородные боевые средства, находить среднюю численность сохранившихся боевых средств противодействующих сторон в любой момент времени ведения боя, дать качественную оценку сил противодействующих группировок.

Ключевые слова: *разнородные группировоки, уравнения Ланчестера, средняя численность боевых средств, средняя скорострельность и вероятность поражения боевых единиц, коэффициенты целераспределения*

THE GENERALIZATION OF ANALYTICAL MODEL OF FIGHT FOR HETEROGENEOUS COUNTERACTIVE GROUPS.

V.I. Grabchak, V.M. Suprun, A.O. Vakal, V.M. Petrenko

The generalization of analytical model of battle actions for heterogeneous groups is conducted, when the constituents of the right part of Lanchester’s differential equalizations (effective rapidity of fire) are examined as functions of time. The analytical model of fight which describes the dynamics of battle actions between two groups with heterogeneous tools is offered. The analytical expressions, which allow to forecast the investigation of fight between groups which include the heterogeneous battle tools, to find the middle quantity of battle units of counteractive sides which was saved, at any moment of time of embay, to give the high-quality forces estimation of counteractive groups.

Key words: *heterogeneous groups, equalizations of Lanchester, middle quantity of battle tools, middle rapidity of fire and probability of hitting the battle units, coefficient of target distribution.*